한국통계학회논문집 제3권 3호
1996년 12월 pp. 1-9

일반화혼합회귀 추정량과 베이지안 회귀추정량의 비교

김 주 성[1], 김 영 권[2]

요 약

본 논문에서는 일반화 회귀모형의 회귀모수 β에 대한 사전정보의 형태에 따른 각 추정량들에 대하여 연구하였다. 먼저 사전정보가 β에 대한 사전분포로 주어지는 경우에 해당하는 베이지안 회귀추정량을 제시하였고, 다른 하나는 β에 대한 사전정보모형으로 선형회귀모형식이 주어진 경우의 일반화 혼합회귀추정량에 대하여 연구하였다. 두가지 경우로부터 얻어진 각 추정량의 정도를 알아보기 위하여 각 추정량의 공분산행렬을 이용하여 서로 비교하여 보았다. 각 추정량의 분산비들을 이용하여 일반적으로 일반화 혼합회귀추정량이 베이지안 회귀추정량들보다 비교적 작은 분산값을 가진다는 결론을 얻었다.

1. 서 론

일반화 회귀모형의 모수추정 문제에 있어서 활용가능한 사전정보를 가지고 있는 경우에 대하여 회귀모수를 추정하는 방법은 사전정보의 형태에 따라 다음의 경우를 고려해 볼 수 있다. 먼저 일반화 회귀모형의 형태는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u} \quad , \quad \boldsymbol{u} \sim N(\boldsymbol{0}, V\sigma^2) \tag{1}$$

여기서 X는 $T\times k$행렬로 계수는 k이고, $\boldsymbol{y}$와 $\boldsymbol{\beta}$는 각각 $T\times 1$, $k\times 1$벡터이다. V는 $T\times T$ 정칙행렬이다. (1)의 모형에 대하여 회귀모수 $\boldsymbol{\beta}$가 사전분포함수 $p(\boldsymbol{\beta})$를 가지는 경우로, 여기서 얻어진 추정량을 베이지안 회귀추정량이라 부르기로 한다. 다른 한 경우는 Theil과 Goldberger[6]에 의해 제안된 것으로, (1)의 모형에 대하여 동일한 회귀모수 $\boldsymbol{\beta}$를 가지는 사전정보모형을 가지는 경우이다. 이때 사전정보 모형은

$$\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{v} \quad , \quad \boldsymbol{v} \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Psi}) \tag{2}$$

으로 표현된다. 이때 R은 $g\times k$행렬로 계수는 $g(\le k)$이며, $\boldsymbol{v}$는 $g\times 1$벡터이고, $\boldsymbol{\Psi}$는 양정칙행렬이며, 대칭행렬이다. 또한 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$는 독립으로 $E(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}')=\boldsymbol{0}$의 관계를 가진다. 이 경우의 회귀추정량을 일반화 혼합회귀추정량이라한다,

1) (360-763) 청주시 흥덕구 개신동 충북대학교 통계학과 교수.
2) (360-763) 청주시 흥덕구 개신동 충북대학교 통계학과.

2장에서는 베이지안 회귀추정량과 일반화 혼합회귀추정량을 얻고, 각 경우에 해당하는 공분산행렬을 제시하였으며, 3장에서는 얻어진 추정량들의 분산값을 구하여 서로 비교해 보았으며, 결론을 포함한 제언은 4장에서 다루었다.

2. 회귀추정량과 공분산행렬

2.1 베이지안 회귀추정량

일반화 회귀모형 (1)에서 회귀모수 $\boldsymbol{\beta}$는 사전분포함수 $p(\boldsymbol{\beta})$를 가지고, σ의 사전분포를 Jeffreys[2]와 Savage[3]의 제안처럼 $\boldsymbol{\beta}$와는 독립적으로 분포하며 $1/\sigma$에 비례하는 분포를 가진다면, 두 모수에 대한 우도함수는

$$L(\boldsymbol{\beta},\sigma)=\left(\frac{1}{(2\pi)^{T/2}|V|^{1/2}\sigma^{T}}\right)\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})'V^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})\right)$$

와 같이 얻을 수 있다. 결합사후분포함수 $p(\boldsymbol{\beta},\sigma|\boldsymbol{y})$는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$p(\boldsymbol{\beta},\sigma|\boldsymbol{y})\propto p(\boldsymbol{\beta})\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{T+1}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})'V^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})\right)$$

이를 통하여 $\boldsymbol{\beta}$의 주변사후분포함수를 구하면

$$p(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{y})\propto p(\boldsymbol{\beta})\left[1+\frac{(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b}^*)'\boldsymbol{X}'V^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b}^*)}{\nu s}\right]^{-T/2}$$

이 된다. 여기서 $s=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Xb}^*)'V^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Xb}^*)/\nu$ 이며, $\boldsymbol{b}^*=(\boldsymbol{X}'V^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'V^{-1}\boldsymbol{y}$ 이며, $\nu=T-k$ 이다. 이를 통하여 Theil[4]의 경우처럼 우리의 목적에 부합되도록 $\boldsymbol{\beta}$의 사후분포함수를 다음과 같이 근사적으로 얻을 수 있다.

$$p(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{y})\approx p(\boldsymbol{\beta})\exp\left(-\frac{1}{2s}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b}^*)'\boldsymbol{X}'V^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b}^*)\right) \tag{3}$$

(3)식의 결과로부터 β의 베이지안 회귀추정량 $\widetilde{\beta}$는 손실함수 $L(\beta,\widetilde{\beta})$의 기대손실을 최소화함으로써 얻을 수 있다. 본 연구에서는 $L(\beta,\widetilde{\beta})=(\beta-\widetilde{\beta})'(\beta-\widetilde{\beta})$의 손실함수를 사용한다.

사전분포함수로 일양분포와 정규분포의 경우를 고려해보자. 먼저 $\boldsymbol{\beta}$가 $k\times1$벡터 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$를 모수로 가지는 일양분포 $Uni(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$를 따르는 경우에는 $\boldsymbol{\beta}$의 사후분포함수가

$$p(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{y})\approx\exp\left(-\frac{1}{2s}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b}^*)'\boldsymbol{X}'V^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b}^*)\right)$$

이 되므로 베이지안 회귀추정량은 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}_u}=(\boldsymbol{X}'V^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'V^{-1}\boldsymbol{y}$이 된다. 또한 추정량의 공분산행렬의 추정량은

$$\widehat{V}(\widetilde{\beta_u})=\frac{1}{12}(b-a)(b-a)'+s(X'V^{-1}X)^{-1}$$

이 된다. 다음으로 β가 평균이 ξ, 분산이 $\Sigma\sigma^2$인 정규분포를 따르는 경우에는 β의 사후분포함수가

$$p(\beta|y)\approx \exp\left(-\frac{1}{2s}(\beta-\widetilde{\beta_n})'[X'V^{-1}X+\Sigma^{-1}](\beta-\widetilde{\beta_n})\right)$$

와 같이 얻어지므로, $\widetilde{\beta_n}=(X'V^{-1}X+\Sigma^{-1})^{-1}(X'V^{-1}y+\Sigma^{-1}\xi)$와 같이 베이지안 회귀추정량을 얻을 수 있다. 이 경우 공분산 행렬의 추정량은

$$\widehat{V}(\widetilde{\beta_n})=s(X'V^{-1}X+\Sigma^{-1})^{-1}[X'V^{-1}X\Sigma X'V^{-1}X+X'V^{-1}X](X'V^{-1}X+\Sigma^{-1})^{-1}$$

으로 얻어진다.

2.2 일반화 혼합회귀추정량

일반화 회귀모형 (1)과 β의 사전정보모형 (2)식을 결합하여 일반화 혼합모형을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$Z=W\beta+\varepsilon \quad , \ \varepsilon \sim N(0,\Omega) \tag{4}$$

여기서 $Z'=(y' \ r')$, $W=(X' \ R')$, $\varepsilon'=(u' \ v')$, 그리고 $\Omega=\begin{pmatrix} V\sigma^2 & 0 \\ 0 & \Psi \end{pmatrix}$이 된다. (4)식을 통하여 β의 GLS 통계량을 얻으면

$$\beta^*=(X'V^{-1}X+\sigma^2R'\Psi^{-1}R)^{-1}(X'V^{-1}y+\sigma^2R'\Psi^{-1}r)$$

이 된다. 이 경우 공분산행렬의 추정량은

$$\widehat{V}(\beta^*)=s(X'V^{-1}X+sR'\Psi^{-1}R)^{-1}$$

와 같이 얻어진다. 또한 GLS 추정량 β^*내의 σ^2을 추정량인 s로 대치하여 추정량을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\widehat{\beta}=(X'V^{-1}X+sR'\Psi^{-1}R)^{-1}(X'V^{-1}y+sR'\Psi^{-1}r)$$

Giles와 Srivastava[1]가 제시한바와 같이 추정량 $\widehat{\beta}$는 β의 일치추정량이며, 근사불편추정량이 된다. 또한 $\widehat{\beta}$은 근사정규분포를 따른다. 이 경우 추정량의 공분산행렬의 추정량은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned}\widehat{V}(\widehat{\beta})=&\ \frac{s}{2}\int_0^1 w^{\frac{\nu}{2}-1}(X'V^{-1}X+wsR'\Psi^{-1}R)^{-1}X'V^{-1}X\\&\times(X'V^{-1}X+wsR'\Psi^{-1}R)^{-1}dw+\left(\frac{s}{2}\right)^2(X'V^{-1}X+wsR'\Psi^{-1}R)^{-1}\\&\times R'\Psi^{-1}R(X'V^{-1}X+wsR'\Psi^{-1}R)^{-1}\end{aligned}$$

얻어진 각 추정량의 공분산행렬의 추정량은 사전정보량의 개념을 이용하여 나타낼 수 있는데, Theil[4]에 의하면 사전정보량은 사후분산의 역에 대한 사전분산의 역을 나타내는 값으로 정의하였으며, 이것에 따르면 사전정보량은 사후분산의 변동량중에서 사전분산의 변동량의 비율을 의미한다. 사전정보량을 θ라 하면, 앞서 얻어진 베이지안 회귀추정량중 일양분포의 경우에는 $\theta=\frac{1}{k}tr\left\{\frac{1}{12}(b-a)(b-a)'\left[\frac{1}{12}(b-a)(b-a)'+s(X'V^{-1}X)^{-1}\right]\right\}^{-1}$, 정규분포의 경우에는 $\theta=\frac{1}{k}tr\{\Sigma^{-1}(X'V^{-1}X+\Sigma^{-1})^{-1}\}$, 그리고 일반화 혼합회귀모형의 경우에는 $\theta=\frac{1}{k}tr\{sR'\Psi^{-1}R(X'V^{-1}X+sR'\Psi^{-1}R)^{-1}\}$로 표현할 수 있다. 이 사전정보량의 값들을 이용하여 각 추정량을 비교하여 보자. 자료의 의존성을 없애기 위하여 공분산행렬의 i번째 대각원소인 다음의 분산추정량의 값들을 통하여 비교할 수 있다. 즉, 베이지안 회귀추정량의 경우 일양분포에서의 추정량의 분산값은 $P'X'V^{-1}XP=I$와 $P'(b-a)(b-a)'P=B$를 만족하는 정칙행렬 P가 존재하는 경우,

$$g_i^{uni}=\frac{1}{12}b_i+s=s(1-\theta_i)^{-1}$$

의 값으로 얻을 수 있다. 여기서 $B=diag(b_i)$로 B의 고유치를 대각원소로 가지는 대각행렬이며, $\theta_i=b_i/\left(b_i+\frac{12s}{n}\right)$이다. 정규분포에서의 추정량의 분산값은 $P'X'V^{-1}XP=I$와 $P'\Sigma^{-1}P=C$를 만족하는 정칙행렬 P가 존재하는 경우,

$$\begin{aligned} g_i^{nor} &= s\frac{1+c_i}{c_i(1+\nu c_i)} \\ &= s\theta^{-1}(1-\theta_i)^2[\nu+(1-\nu)\theta_i] \end{aligned}$$

의 값을 통하여 얻을 수 있다. 여기서 $C=diag(c_i)$로 C의 고유치를 대각원소로 가지는 대각행렬이며, 사전정보량 $\theta_i=\frac{\nu c_i}{1+\nu c_i}$이 된다. 일반화 혼합회귀추정량의 경우는 Giles와 Srivastava[1]가 제안한 GLS 추정량, 불편추정량, 그리고 근사분산추정량의 경우에 대하여 각각 다음과 같은 값으로 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} g_i^{GLS} &= s(1-\theta_i) \\ g_i^{u} &= s\left[\int_0^1 w^{\frac{\nu}{2}-1}\Big/\left(1+w\frac{\theta_i}{1-\theta_i}\right)^2 dw+\theta_i(1-\theta_i)\right] \\ g_i^{a} &= s\left(1+\frac{\nu\theta_i}{(\nu+2)(1-\theta_i)}\right)^{-1} \end{aligned}$$

여기서 사전정보량의 값은 $\theta_i=\frac{s\lambda_i}{\nu+s\lambda_i}$이다. Giles와 Srivastava[1]는 이들 세 분산비의 비교를 통하여 일반화최소제곱추정량과 근사분산추정량에 대하여 자신이 제안한 불편추정량의 정도를 보

임으로써 분산비들의 별 차이를 보이지 않음을 주장하고, 근사분산추정량이 계산이 용이하고 쉽다는 점을 주장하였다. 본 연구에서는 이들 일반화 혼합회귀추정량의 분산값들과 베이지안 회귀추정량의 분산비와의 비교를 실시하였다.

3. 공분산행렬의 비교

일반화 회귀모형으로부터 얻어진 베이지안 회귀추정량과 일반화 혼합회귀추정량의 분산비를 비교하기 위하여 2장의 분산값을 통하여 각각의 분산비를 얻으면, 다음의 [표]와 [그림]의 결과를 얻을 수 있다. [표1], [표2], [표3]의 결과는 베이지안 회귀추정량중 일양분포로부터 얻어진 추정량과 일반화 혼합회귀추정량과의 분산비들을 얻은 결과로, 일양분포에서의 추정량의 분산값들이 일반화 혼합회귀추정량의 분산값보다 자유도 ν에 관계없이 항상 큰 값을 가지는 것을 볼 수 있다. 또한 사전정보량 θ의 값이 증가함에따라 각 분산비의 값들도 증가하는 것을 볼 수 있다. 이러한 결과는 [그림1], [그림2], [그림3]을 통하여 그래프로 확인해 볼 수 있다.

[표 1] 추정된 분산비(g_i^{uni}/g_i^{GLS})

θ								
0.01	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80
1.02	1.23	1.56	2.04	2.78	4.00	6.25	11.11	25.00

[표 2] 추정된 분산비(g_i^{uni}/g_i^{u})

	θ								
ν	0.01	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80
5	1.01	1.17	1.41	1.77	2.34	3.28	5.05	8.95	20.47
10	1.02	1.20	1.48	1.89	2.53	3.61	5.63	10.07	23.03
15	1.02	1.21	1.50	1.93	2.61	3.74	5.84	10.44	23.77
20	1.02	1.21	1.52	1.96	2.65	3.80	5.94	10.61	24.11
25	1.02	1.22	1.52	1.98	2.67	3.84	6.00	10.72	24.30
30	1.02	1.22	1.53	1.89	2.69	3.87	6.05	10.79	24.43
35	1.02	1.22	1.54	1.99	2.70	3.89	6.08	10.83	24.51
40	1.02	1.22	1.54	2.00	2.71	3.90	6.10	10.87	24.58
45	1.02	1.23	1.54	2.00	2.72	3.91	6.11	10.90	24.63
50	1.02	1.23	1.54	2.01	2.73	3.92	6.13	10.92	24.67

[표 3] 추정된 분산비(g_i^{uni}/g_i^{a})

	θ								
ν	0.01	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80
5	1.02	1.20	1.47	1.87	2.46	3.43	5.18	8.89	19.29
10	1.02	1.21	1.51	1.94	2.59	3.67	5.63	9.81	21.67
15	1.02	1.22	1.53	1.97	2.65	3.76	5.81	10.20	22.65
20	1.02	1.22	1.53	1.99	2.68	3.82	5.91	10.40	23.18
25	1.02	1.23	1.54	2.00	2.70	3.85	5.97	10.53	23.52
30	1.02	1.23	1.54	2.00	2.71	3.88	6.02	10.62	23.75
35	1.02	1.23	1.55	2.01	2.72	3.89	6.05	10.69	23.92
40	1.02	1.23	1.55	2.01	2.72	3.90	6.07	10.74	24.05
45	1.02	1.23	1.55	2.01	2.73	3.91	6.09	10.78	24.15
50	1.02	1.23	1.55	2.02	2.74	3.92	6.11	10.81	24.23

[표4], [표5], [표6]의 결과는 정규분초로부터 얻어진 베이지안 회귀추정량의 분산과 일반화 혼합회귀추정량의 분산값들과의 각각의 분산비를 나타낸다. 이 경우에도 역시 마찬가지로 베이지안 회귀추정량의 분산값이 일반화 혼합회귀추정량의 분산값보다 자유도 ν에 관계없이 큰 값을 가지는 것을 알 수 있다. 그러나 사전정보량 θ를 기준으로 보면, 일양분포의 경우와는 달리 사전정보량이 작은 경우 두 정보량의 차이가 크게 나타나고, 사전정보량이 증가할수록 두 분산비의 차이가 줄어드는 것을 볼 수 있다. 이러한 결과를 그래프를 통하여 [그림4], [그림5], [그림6]에서도 확인할 수 있다.

[표 4] 추정된 분산비(g_i^{nor}/g_i^{GLS})

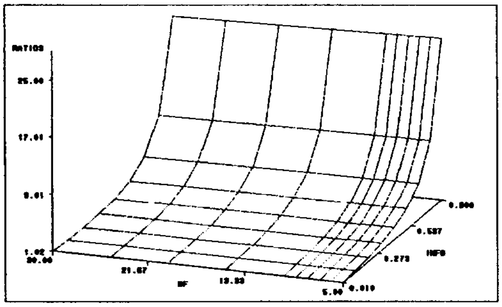
	θ								
ν	0.01	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80
5	4.96	4.60	4.20	3.80	3.40	3.00	2.60	2.20	1.80
10	9.91	9.10	8.20	7.60	6.40	5.50	4.60	3.70	2.80
15	14.86	13.60	12.20	10.80	9.40	8.00	6.60	5.20	3.80
20	19.81	18.10	16.20	14.30	12.40	10.50	8.60	6.70	4.80
25	24.76	22.60	20.20	17.80	15.40	13.00	10.60	8.20	5.80
30	29.71	27.10	24.20	21.30	18.40	15.50	12.60	9.70	6.80
35	34.66	31.60	28.20	24.80	21.40	18.00	14.60	11.20	7.80
40	39.61	36.10	32.20	28.30	24.40	20.50	16.60	12.70	8.80
45	44.56	60.60	36.20	31.80	27.40	23.00	18.60	14.20	9.80
50	49.51	45.10	40.20	35.30	30.40	25.50	20.60	15.70	10.80

[표 5] 추정된 분산비(g_i^{nor}/g_i^{u})

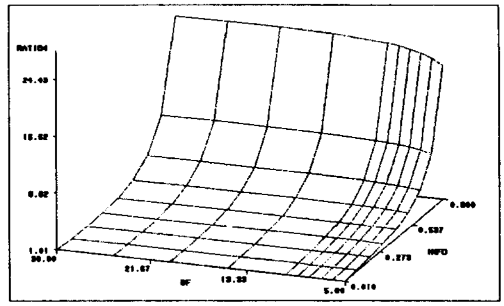
	θ								
ν	0.01	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80
5	4.93	4.36	3.80	3.30	2.86	2.46	2.10	1.77	1.17
10	9.88	8.82	7.75	6.76	5.83	4.97	4.14	3.35	2.58
15	14.83	13.31	11.73	10.24	8.83	7.47	6.17	4.88	3.61
20	19.77	17.80	15.72	13.73	11.83	9.98	8.18	6.40	4.63
25	24.72	22.30	19.71	17.23	14.82	12.48	10.18	7.91	5.64
30	29.67	26.79	23.71	20.73	17.82	14.99	12.19	9.42	6.64
35	34.62	31.29	27.71	24.22	20.82	17.49	14.19	10.92	7.65
40	39.57	35.79	31.70	27.72	23.82	19.99	16.20	12.42	8.65
45	44.52	40.29	35.70	31.22	26.82	22.49	18.20	13.93	9.65
50	49.47	44.79	39.70	34.72	29.82	24.99	20.20	15.43	10.66

[표 6] 추정된 분산비(g_i^{nor}/g_i^{a})

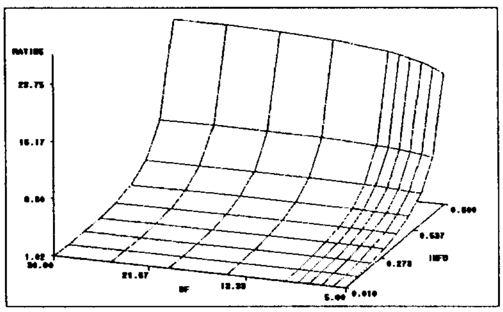
	θ								
ν	0.01	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80
5	4.95	4.47	3.96	3.47	3.01	2.57	2.15	1.76	1.39
10	9.89	8.95	7.93	6.93	5.97	5.04	4.14	3.27	2.43
15	14.84	13.44	11.91	10.42	8.96	7.53	6.13	4.77	3.44
20	19.79	17.94	15.91	13.91	11.95	10.02	8.13	6.27	4.45
25	24.74	22.43	19.90	17.40	14.94	12.52	10.13	7.77	5.46
30	29.69	26.93	23.90	20.90	17.94	15.02	12.13	9.28	6.46
35	34.64	31.43	27.90	24.40	20.94	17.51	14.13	10.78	7.46
40	39.59	35.93	31.89	27.90	23.92	20.01	16.13	12.28	8.46
45	44.54	40.43	35.89	31.39	26.93	22.51	18.13	13.79	9.47
50	49.49	44.93	39.89	34.89	29.93	25.01	20.12	15.28	10.47



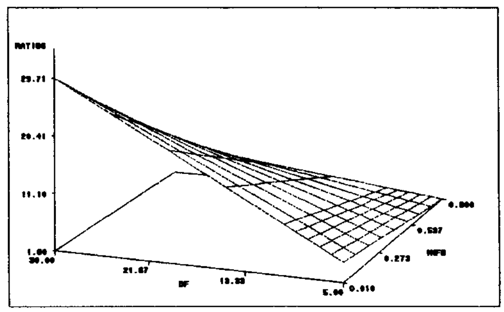
[그림 1] 추정된 분산비(g_i^{uni}/g_i^{GLS})



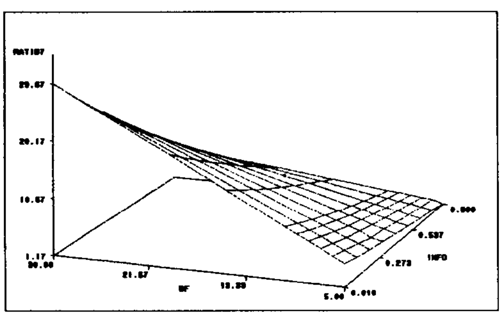
[그림 2] 추정된 분산비(g_i^{uni}/g_i^{u})



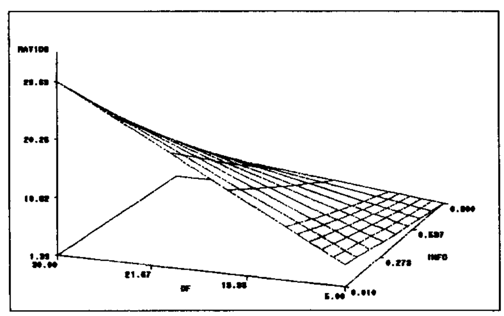
[그림 3] 추정된 분산비(g_i^{uni}/g_i^{a})



[그림 4] 추정된 분산비(g_i^{nor}/g_i^{GLS})



[그림 5] 추정된 분산비(g_i^{nor}/g_i^{u})



[그림 6] 추정된 분산비(g_i^{nor}/g_i^{a})

4. 결 론

일반화 회귀모형에서 베이지안 회귀추정량과 일반화 혼합회귀추정량의 분산값의 비교를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다. 첫째, 동일한 양의 사전정보량에 대하여 일반화 혼합회귀추정

량의 분산값이 베이지안 회귀추정량의 분산값보다 자유도 ν와 사전정보량 θ에 관계없이 항상 작은값을 가진다. 둘째, 일양분포의 경우에는 사전정보량이 작은 경우 일반화 혼합회귀추정량과의 분산비가 작게 나타나는 반면 정규분포의 경우에는 사전정보량이 큰 경우에 두 분산비가 작아진다. 이러한 결과의 원인은 일양분포가 실제로 사전정보로서 추정량을 얻는데 적합한 정보를 제공해 주지 못하는 반면, 정규분포는 원래의 일반화 회귀모형의 분포와 동일하므로 회귀모수를 추정함에 있어서 보다더 많은 정보를 제공해 줄 수 있기 때문인 것으로 생각된다.

참고문헌

[1] Giles, D. E. A. and Srivastava, V. K. (1991). An Unbiased Estimator of the Covariance Matrix of the Mixed Regression Estimator, *Journal of the American Statistical Association*, 86, 441-444.

[2] Jeffreys, H. (1961). *Theory of Probability*, 3rd ed., Oxford University Press, London.

[3] Savage, L. J. (1962). *Bayesian Statistics. In Decision and Information Processes*, Macmillan, New York.

[4] Theil, H. (1963). On the Use of Incomplete Prior Information in Regression Analysis, *Journal of the American Statistical Association*, 58, 401-404.

[5] Theil, H. (1971). *Principles of Econometrics*, Wiley, New York.

[6] Theil, H. and Goldberger, A. S. (1961). On Pure and Mixed Estimation in Economics, *International Economic Review*, 2, 65-78.

[7] Tiao, G. C. and Zellner, A. (1964). Bayes's Theorem and the Use of Prior Knowledge in Regression analysis, *Biometrika*, 51, 219-230.