

## LAYERWISE이론을 이용한 적층보의 선형 및 파괴해석



김 영 찬\*

### 1. 적층보의 해석

적층구조(laminated structures)는 항공, 기계 뿐만 아니라 토목, 건축분야에서도 많이 찾아볼 수 있으며 복합재료(composite materials)는 strength-to-weight ratio가 크고 기존의 건설재료가 갖지 못하는 장점이 있어 관심의 대상이 되고 있다.

적층보 해석분야의 최근 연구는 변위장의 운동 역학방정식에 고차항을 도입하여 변형 후에 단면이 평면으로 남아있다는 가정을 필요로 하지 않는다. 고차전단변형이론이 바로 그러한 조건을 충족시키는 것으로 단면상의 전단력분포가 비선형이기 때문에 구성방정식에 전단수정계수가 필요없다.

Layerwise이론을 이용하여 개발된 1차원 적층보요소(Beam finite element with Layerwise Constant Shear, BLCS)<sup>1)</sup>는 Yuan<sup>2)</sup>의 요소보다 간단하고 각층에서 정확한 수직 및 전단응력을 산

정한다. BLCS는 평면응력과 두께방향으로의 변위는 없다고 가정하였고 임의의 점에서의 변위는 다음과 같이 나타낸다.

$$u_1(x, z) = u(x) + U(x, z)$$

$$u_2(x, z) = w(x)$$

여기서  $u, w$ 는 각각 기준축에 대한 축방향변위와 처짐을 나타내며,  $U$ 는 층별로 길이 방향변위를 나타내는 함수로 연속함수  $\phi$ 와 미지계수  $U^j$ 를 이용하여 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$U(x, z) = \sum_{j=1}^n U^j(x) \phi^j(z)$$

평면응력(x-y평면)만 고려하고 횡방향수직응력을 제외한 직교이방성층의 응력-변형도관계로부터 구한 층의 구성방정식은

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

\* 내림산업기술연구소 선임연구원

보에서의 응력중  $\sigma_y, \sigma_{yz}$ 는 일반적으로 무시하며 직교적층판에서는  $\sigma_{xy}=0$ 이므로 다음과 같이 보의 응력상태를 간략화 할 수 있다.

$$\sigma_x = E_x \epsilon_x, \quad \sigma_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz}$$

여기서  $E_x, G_{xz}$ 는 층의 등가탄성계수이다. 각 층의 간략화된 응력상태를 적분하여 적층판에 대한 구성방정식을 유도하여 평형방정식을 수립하였다. 가상일법과 유한요소법을 적용하여 감쇄적분을 이용한 BLCS는 여러가지의 실험 및 수치해석예를 비교하여 본 결과 상당히 정확한 응답을 보였다.<sup>3)</sup>

## 2. 파괴해석

복합적층판, 보의 해석을 위한 많은 이론이 제시되었다. 효율적인 복합구조를 설계하기 위해서는 정확한 응력산정, 신뢰할 수 있는 극한강도추정이 필수적이라 하겠다. 기존의 total-ply-discount(TDP)법은 층의 파괴가 국부적이고 파괴된 층의 잔여강성을 인정하지 않는다. 최초파괴는 응력이 정확하게 산정되었다면 쉽사리 예측할 수 있다. 복합재의 적층판기동이 복잡하기 때문에 파괴 예측과 실제의 기동과는 어느 정도의 차이가 예상된다. 또한, 적층판의 미세파괴 및 결합에 의한 재료의 비균일성은 파괴모델개발의 난점중의 하나라서 일반적으로 완전접착과 같은 이상적인 조건을 가정하게 된다. 최근에는 초기파괴이후의 기동 예측에 관심을 갖고 있으며 두가지의 기시적 접근법으로 강성매트릭스를 수정하는 방법과 재료성질을 열화(degrade)시키는 방법이 있다. 전자에서는 파괴된 요소(element)의 강성이 포함되지 않을 수 있으며 후자에서는 열화정도 또는 열화계수(degradation factor, DF)를 실험에 의하지 않고는 정할 수 없다.

등방성 또는 복합재료에 대한 파괴기준이 제시되었지만 한가지의 기준이 모든 적층판의 파괴를 예측할 수 없다고 인식되고 있다. 일반적으로 두가지로 분류할 수 있는데 독립적 기준과 상호작용

식(또는 2차다항식)기준이다. 최대응력 또는 최대 변형도와 같은 독립적 기준은 간단하고 적용하기 편리하고 파괴모드를 알 수 있으나 파괴시의 응력 성분간의 상호작용을 무시한다. Tsai-Wu나 Hill의 기준과 같은 상호작용식 기준은 응력성분간의 상호작용을 포함하지만 파괴모드를 알 수 없고 기준식에 있는 계수를 정해야하는 단점이 있다.

최대응력기준은 임의방향 응력성분의 크기가 재료가 갖고 있는 그 방향의 강도보다 클 때 파괴가 생긴다고 보기 때문에 파괴모드를 추측할 수 있다. Tsai-Wu기준은 일반화된 2차다항식기준으로 횡방향(2.3평면)으로 등방성인 층의 다항식은 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{44}\sigma_4^2 + F_{66}(\sigma_3^2 + \sigma_6^2) = 1$$

여기서  $\sigma_i$ 는 재료좌표계에서의 응력텐서성분이고  $F_i, F_{ij}$ 는 재료의 강도로 구성된 계수이다.

## 3. 점진적 파괴해석

Reddy<sup>4)</sup>는 Layerwise판이론을 이용하여 인장을 받는 적층판의 파괴를 연구하였다. 변위를 먼저 주고 응력을 직분함으로써 하중을 구하였다. 두가지의 강성감소법을 이용하였다: 탄성계수와 포아송비 또는 탄성계수, 전단탄성계수, 포아송비. 그러나 재료의 물성은 파괴 모드에 관계없이 같은 계수로 감소시켰다. 압축이나 휨하중을 받는 적층판에 대해서는 추가적인 연구가 필요하다고 결론지었다. Greif<sup>5)</sup>는 복합재의 적층보에 대한 3점 휨실험을 하고 TPD를 이용하여 보의 연속적 파괴를 해석하여 극한파괴하중을 예측하였다. 한 층이 파괴된 후 그 층의 강성을 0으로 놓고 재해석을 5번째 파괴가 생길 때까지 계속하였다. 그러나 그들의 예측은 실험결과와는 상이한 결과를 얻었다.

BLCS를 이용한 점진적 파괴해석(progressive failure analysis)<sup>6)</sup>에서 재료는 극한파괴까지 선형 탄성으로 가정하였다. 손상된 층의 일정한 길이의

강성은 열화된 균일층으로 치환하였으며 재료의 물성은 원래물성의 일정배수로 하였다. 열화계수 (DF)는 미세손상이 생겼을 때 한층에 남아있는 강성을 퍼센트로 나타낸다. DF는 거시적 손상모델에 널리 사용되고 있지만 그것을 예측할 수 있는 수학적 모델은 없는 실정이다. 섬유(fiber)와 모체(matrix)의 파괴에 대하여 다른 열화계수를 사용하였으며 파괴기준과 조합되었을 때 수직응력성분은 섬유파괴, 횡방향수직, 전단응력은 모체 파괴와 연계시켰다. 열화수준은 균열집중도, 층배열순서등 여러가지 요소에 관계되어 있어 정확한 DF의 평가는 매우 어렵기 때문에 거시적 손상모델링에 수치해석법을 적용하는 것은 쉽지 않다. 실험결과와의 상관관계를 조사하여 DF를 결정하였다. 열화계수는 섬유(DF<sub>f</sub>)와 모체(DF<sub>m</sub>)에 각각 다르게 적용하였으며 열화된 물성은 첨자 d로 원래의 물성은 첨자 o로 다음과 같이 적용하였다.

- 섬유방향의 수직응력에 의한 파괴

$$E_1^d = DF_f \times E_1^o, \quad G_{12}^d = DF_f \times G_{12}^o$$

$$v_{12}^d = DF_f \times v_{12}^o$$

- 섬유와 직각방향의 수직응력에 의한 파괴

$$E_2^d = DF_m \times E_2^o, \quad G_{12}^d = DF_m \times G_{12}^o$$

$$G_{23}^d = DF_m \times G_{23}^o, \quad v_{21}^d = DF_m \times v_{21}^o$$

- 전단응력에 의한 파괴

$$G_{12}^d = DF_m \times G_{12}^o, \quad G_{23}^d = DF_m \times G_{23}^o$$

하중조절법(load-controlled scheme)을 이용하는데 다음과 같은 과정으로 해석을 하였다.

1. 초기 하중에 대하여 응력을 산정하고 선정된 파괴기준으로 가우스점에서 파괴여부를 검사한다.
2. 강도와 응력간의 최소비(R<sub>min</sub>)를 구하여 1보다 작으면 초기하중을 더 작게하여 파괴가 일어나지 않게 한다. 1보다 크면 초기하중을 R<sub>min</sub>으로 나누어 초기파괴하중을 구한다.
3. 열화계수를 입력한다.

4. 파괴모드에 따라 물성을 열화시켜 현재의 하중에서 응력을 산정한다.

5. 파괴여부를 검사하여 파괴가 생겼으면 4번째 단계로 간다. 파괴가 없으면 초기층파괴하중의 일정한 퍼센트를 상승시켜 다음 단계의 하중을 구한다.

6. 극한파괴가 일어날 때까지 4번째와 5번째 단계를 반복한다. 극한파괴는 임의의 가우스점에서 두께방향으로 모든 층에서 파괴가 일어났을 때로 정의하였다.

#### 4. 수치해석 예

Greif<sup>6)</sup>는 AS4/3502 graphite-epoxy로 만든 적층보의 3점 휨실험을 하였다. 시험체는 길이 15cm, 폭 2.5cm, 두께 4.5mm로 30개층으로 구성되어 있으며 0°, 45°, 90°의 층배열이 혼합되어 있다. 적층판에서 손상이 진행되면서 열화계수는 응력의 재분포 및 극한강도의 결정에 중요한 역할을 한다. 표에서 열화계수에 의한 극한강도의 영향을 알 수 있다. 표에서의 열화계수는 (DF<sub>f</sub>, DF<sub>m</sub>)를 의미한다. 앞부분에서도 언급하였듯이 손상모델링의 다른 접근법은 강성매트릭스를 수정하는 것인데 이것은 아주 작은 열화계수를 적용하는 것과 같다고 생각할 수 있다. 따라서, 표에서 알 수 있듯이 (10<sup>-6</sup>, 10<sup>-6</sup>)인 경우 극한강도가 상당히 과소 평가되어 있다. Reddy에 의하면 (0.1, 0.1)의 계수가 일축인장하에 좋은 결과를 내었으나 여기서는 그렇지 못하다. 본 예에서는 (0.25, 0.005)의 경우 가장 실험치와 근사한 결과를 얻었다. 그림 1에

표 1 극한파괴하중(단위 : KN)

실험체	10 <sup>-6</sup> , 10 <sup>-6</sup>	0.1, 0.1	0.25, 0.005	실험치
A1	1.08	1.57	1.29	1.31
A2	1.11	1.33	1.36	1.25
B1	3.40	3.74	3.40	2.80
B2	3.40	3.74	3.40	2.80
C1	1.92	2.23	2.44	2.54
C2	1.82	2.11	2.31	2.40
D1	1.29	1.36	1.49	1.60
D2	1.30	1.37	1.50	1.56
E1	1.68	1.84	1.99	2.05
E2	1.74	1.90	2.06	2.00

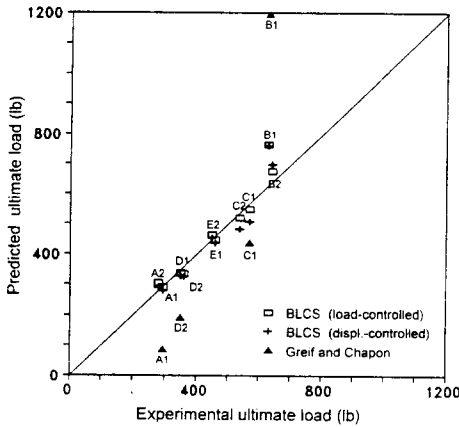


그림 1 파괴하중의 비교

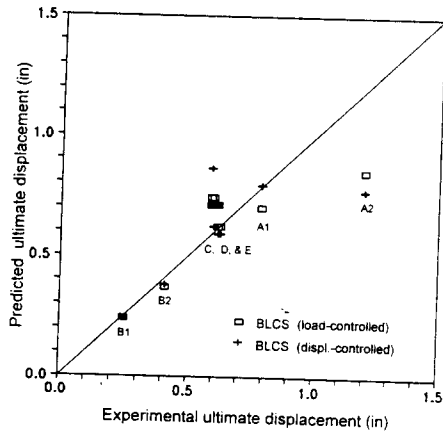


그림 2 최대변위의 비교

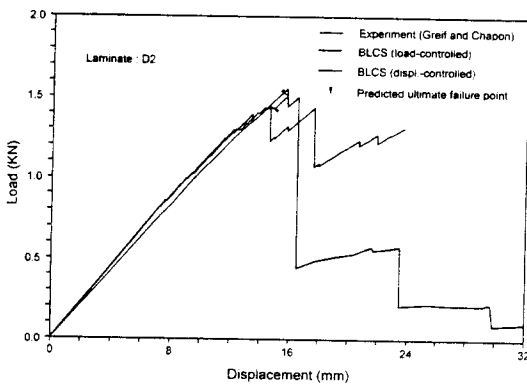


그림 3 하중-처짐곡선

는 실험결과와 Tsai-Wu 기준을 이용한 점진적 파괴결과를 비교하였다. BLCS의 결과는 대부분 대각선 주위에 몰려 있으나 TPD를 이용한 Greif의 결과는 대각선에서 많이 벗어나고 있다.

그림 2에는 최대하중점에서의 변위가 나와있는데 하중의 예측경우보다는 결과가 더 분산되어 있다. 일반적으로 하중조절법과 변위조절법에 의한 결과가 거의 비슷하게 나왔다.

하중-처짐곡선의 예측은 파괴의 진행을 적절하게 반영하여야 정확한 결과를 얻을 수 있다. 그림 3에서 보는 바와 같이 BLCS에 의한 곡선은 기울기가 약간 크게 나왔으나 곡선의 최고점 근처에서 실험곡선과 비슷하여 파괴진행이 비교적 정확하게 반영되었음을 알 수 있다.

Layerwise 이론은 부재 뿐만 아니라 파괴해석에 이르기까지 적층구조의 해석법을 향상 발전시키는데 좋은 도구가 될 것이다.

### 참 고 문 헌

1. Kim, Y., Davalos, J. F., Barbero, E. J. "A laminated composite beam element with layerwise plane sections", *Journal of Engineering Mechanics*, 120(5), 1160-1166, 1994.
2. Yuan, F. G, Miller, R. E. "A new finite element for laminated composite beams", *Computer & Structures*, 31(5), 737-745, 1989.
3. Kim, Y. "A layer-wise theory for linear and failure analysis of laminated composite beams", Ph.D. dissertation, West Virginia University, Morgantown, WV, 1995.
4. Reddy, Y. S., Reddy, J. N. "Three-dimensional finite element progressive failure analysis of composite laminates under axial tension", *Journal of Composite Technology & Research*, 15(2), 73-87, 1993.
5. Greif, R., Chapon, E. "Investigation of successive failure modes in graphite/epoxy laminated composite beams", *Journal of Reinforced Plastics & Composites*, 12(5), 602-621, 1993.
6. Kim, Y., Davalos, J. F., Barbero, E. J. "Progressive failure analysis of laminated composite beams", *Journal of Composite Materials*, 30(5), 536-560, 1996. 