

단층 래티스돔의 안정해석기법 및 좌굴특성에 관한 연구

A Study on the Analytical Technique of Stability and Buckling Characteristics of the Single Layer Latticed Domes

한 상 을*
Han, Sang-Eul

요 약

본 논문의 목적은 단층래티스 돔의 안정해석 기법을 제안하고, 다양한 조건 하에서 단층래티스 돔이 갖는 좌굴특성을 규명하는데 있다. 기하학적 비선형 평형경로의 탐색 및 좌굴점 그리고 분기경로의 방향 등을 수치적으로 계산하기 위하여 弧長法(Arc-Length Method)을 이용하였으며, 부재의 좌굴가능성을 판단하기 위하여 에너지밀도함수를 제안하였다. 강절점을 갖는 구조물의 거동 특성을 규명하기 위하여 3 종류의 비선형 강성 행렬을 유도하여 해석하였으며, semi-rigid 질점을 갖는 구조물을 해석하기 위하여 스프링모델을 제안하고, 부재의 세장비, 반개각(半開角), 경계조건 및 다양한 하중조건을 파라메터로 하여 좌굴특성을 규명하였다.

Abstract

The primary objective of this paper is to grasp many characteristics of buckling behavior of latticed spherical domes under various conditions. The Arc-Length Method proposed by E.Riks is used for the computation and evaluation of geometrically nonlinear fundamental equilibrium paths and bifurcation points. And the direction of the path after the bifurcation point is decided by means of Hosono's concept. Three different nonlinear stiffness matrices of the Slope-Deflection Method are derived for the system with rigid nodes and results of the numerical analysis are examined in regard to geometrical parameters such as slenderness ratio, half-open angle, boundary conditions, and various loading types. But in case of analytical model 2 (rigid node), the post-buckling path could not be surveyed because of Newton-Raphson iteration process being diveded on the critical point since many eigenvalues become zero simultaneously.

Keywords : bifurcation, homogeneous mode, particular mode, stability, buckling, latticed dome, modal analysis

* 정회원 · 인하대학교 건축공학과 교수

• 이 논문에 대한 토의를 1996년 12월 31일까지 본 학회에
보내주시면 1997년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

구조물의 좌굴특성을 규명하는 이론적 수법중에는 평형경로를 연속적으로 계산하여 각 단계에서의 변형성상을 검토해 가는 방법이 많이 이용되고 있다. 구조물의 평형경로를 구하는 주요한 목적은 구조물의 좌굴전 거동, 좌굴하중의 크기, 좌굴후의 거동 등에 관한 특성을 파악하는데 있다. 특히, 분기좌굴이 발생할 것으로 예상되는 구조물에 있어서는 초기 불완전성(initial imperfection)의 영향이 크기 때문에 분기후의 경로를 구하는 것은 중요한 의미를 갖는다. 현재, 많은 형태의 구조물중에서 래티스돔의 안정에 관한 연구가 널리 행해져 그 역학적 거동특성이 계속 구명(究明)되고 있지만, 정확한 좌굴경로 및 좌굴하중의 추정에 관한 연구는 많지 않으며, 좌굴특성 및 변형특성이 충분히 규명되었다고는 말할 수 없다. 특히, 래티스돔과 같은 웨일형 구조물은 내력이 탄성좌굴에 의해 결정되는 경우가 많지만, 탄성좌굴하중을 구형웨일과 같이 閉形(closed form)으로 표현하는 것은 불가능하며, 현재로서는 기하학적 비선형을 고려한 수치해석이 불가결한 상황이다. 따라서, 본 연구에서는 편접합 또는 강접합을 갖는 비교적 편평한 래티스돔에 관하여 몇 가지 분포하중상태에 대한 좌굴해석을 행하고, 상현재의 세장비, 정부(頂部) 부재의 반개각(半開角) 등을 파라메타로 하여 거동특성을 규명한다.

강접합 래티스돔의 좌굴해석에 있어서는 축력과 처짐의 상호작용을 고려하여 정식화한 3종류의 기초방정식에 대한 해석결과를 비교, 고찰하고, semi-rigid 절점을 갖는 구조물에 대해서는 스프링모델을 도입하여 해석한다.

2. 비선형 수치해석 알고리즘

2.1 호장증분법의 정식화

본 논문에서는 기하학적 비선형문제의 평형경로를 추적하는 수치해석법으로 호장증분법(arc-length incremental method)을 이용한다. 또한, 평형경로상에 좌굴이 발생하는 경우, 분기점 이후

의 경로방향을 결정하기 위하여 고유치에 의한 동차모드(homogeneous mode)와 하중에 의한 특차모드(particular mode)를 이용한다. 본 논문에 사용하고 있는 수치해석법의 특징을 기술하면 1) 증분파라메타로 평형경로의 길이를 이용하는 호장증분계의 해법이기 때문에 하중증분법이나 변위증분법에서는 수치계산이 불가능한 평형경로도 추적이 가능하다. 2) 증분계의 강성매트릭스가 비대칭이기 때문에 skyline법과 같은 대칭매트릭스의 이점을 살리는 수치해법이 불가능하다. 3) 각 증분단계에서 Newton-Raphson법에 의한 수렴계산을 여러번 반복하기 때문에 래티스돔과 같이 자유도수가 대단히 많은 구조물의 해석에 있어서는 경제적이지 못하며, 따라서 모드증첩법 등의 적용이 요구된다. 4) 분기점에서의 접선강성매트릭스의 계수(rank)가 <자유도-1>일때만 적용이 가능하며, 현재로서는 다중저감(multi-degeneration)의 경우 분기이후의 경로탐색이 불가능하다. 5) 분기해석에 자주 사용되는 섭동법(perturbation method)과 비교하면 정식화 및 프로그래밍이 대단히 용이하다. 6) 분기모드의 추정에 있어서 시행착오적으로 계산을 행하기 때문에 해석이 불안정하게 되기 쉽다.

호장증분계의 해법에 적용되는 알고리즘은 다음과 같다.

소문자의 아래첨자 i : 증분 스텝수

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

소문자의 위첨자 m : 수렴 스텝수

$$(m = 0, 1, 2, \dots, l)$$

계의 증분방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[K(D_{i-1})] \{d_i^0\} - p_i^0 \{F\} = \{0\} \quad (1)$$

여기에서, D는 임의 스텝까지의 총변위량, d는 증분변위, p는 증분하중, {F}는 하중모드이다.

일반 호장증분방정식은 다음식으로 쓸 수 있다.

$$(\|d_i^0\|^2 + (p_i^0)^2) = (a_i)^2 \quad (2)$$

여기에서, a_i 는 임의 스텝에서의 평형경로의 길이이다.

식(1)과 식(2)를 연립하여 해를 구할 수 있지만, 식(2)는 충분에 관한 비선형방정식이므로 해를 구하기 위해 전 스텝의 계산결과를 이용하여 선형화한다.

$$\Psi_{i-1}^T \cdot d_i^0 + \mu_{i-1} \cdot p_i^0 = (a_i^0)^2 \quad (3)$$

여기에서,

$$\Psi_{i-1} = \frac{a_i}{a_{i-1}} \sum_{m=0}^l d_i^m \quad (3.a)$$

$$\mu_{i-1} = \frac{a_i}{a_{i-1}} \sum_{m=0}^l p_i^m \quad (3.b)$$

따라서, 식(1)과 식(3)을 연립해서 각 스텝에서의 해를 구할 수 있다. 이 식을 매트릭스형태로 쓰면 호장증분단계에서의 기초식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K(D_{i-1}) - F \\ \Psi_{i-1}^T & \mu_{i-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i^0 \\ p_i^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (a_i^0)^2 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

다음, 수정 Newton-Raphson 수렴과정에서의 제 n 스텝 수렴방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K(D_{i-1} + \sum_{m=0}^{n-1} d_i^m) \{d_i^n\} - p_i^n \{F\} = \{G_i^{n-1}\} \quad (5)$$

여기에서, $\{G_i^{n-1}\}$ 은 다음식으로 부터 얻어지는 불평형력이다.

$$\begin{aligned} \{G_i^{n-1}\} &= (p_{i-1} + \sum_{m=0}^{n-1} p_i^m) \{F\} \\ &- [N(D_{i-1} + \sum_{m=0}^{n-1} d_i^m)] \{D_{i-1} + \sum_{m=0}^{n-1} d_i^m\} \quad (6) \end{aligned}$$

식(5)에서 미지수의 개수가 방정식의 수보다 하나 많기 때문에, 이 방정식을 풀기 위하여 부대조건으로서 지정한 호의 길이 a_i 를 일정하게 유지시킨다. 이 일정조건식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(\sum_{m=0}^{n-1} d_i^m + d_i^n)^2 + (\sum_{m=0}^{n-1} p_i^m + p_i^n)^2 = (a_i)^2 \quad (7)$$

식(7)은 충분에 관한 비선형방정식이므로 선형화 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(\sum_{m=0}^{n-1} d_i^m)^T \cdot d_i^n + (\sum_{m=0}^{n-1} p_i^m) \cdot p_i^n = 0 \quad (8)$$

호의 길이가 일정하다는 조건식인 식(7)을 충분방향과 수렴방향이 직교한다는 조건식으로 변환시킨것이 식(8)이다. 따라서, 수정 Newton-Raphson 수렴과정의 기초식을 매트릭스로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K(D_{i-1} + \sum_{m=0}^{n-1} d_i^m) & -F \\ (\sum_{m=0}^{n-1} d_i^m) & \sum_{m=0}^{n-1} p_i^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i^n \\ p_i^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_i^{n-1} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

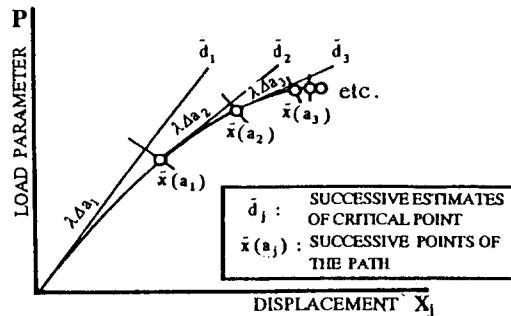


그림 1 호장증분법에 의한 평형경로의 추적

2.2 좌굴경로의 탐색

구조물에 하중이 점차 증가하여 임계점에 도달하면, 하중-변위곡선은 기본 경로로 부터 분기경로로 이동하게 된다. 이 과정에서 좌굴경로의 방향을 수치적으로 어떻게 정식화 할 것인가의 문제가 좌굴해석에서는 대단히 중요한 의미를 갖는다. 최소 고유치에 관계되는 同次모드(homogeneous mode) $\{\alpha\}$ 와 하중에 관계하는 特解모드(particular mode) $\{\beta\}$ 를 구하여 $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$ 의 선형결합 즉,

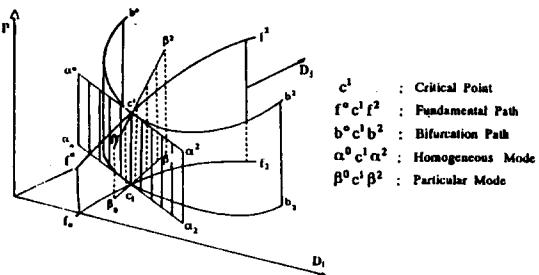


그림 2 대칭 분기좌굴시 분기경로의 방향

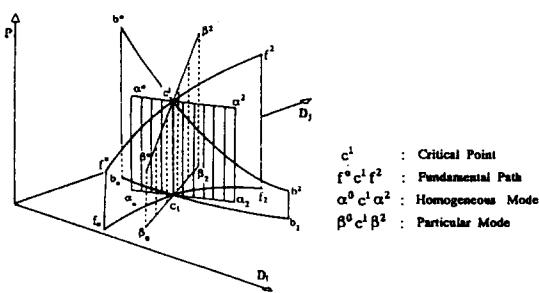


그림 3 비대칭 분기좌굴시 좌굴경로의 방향

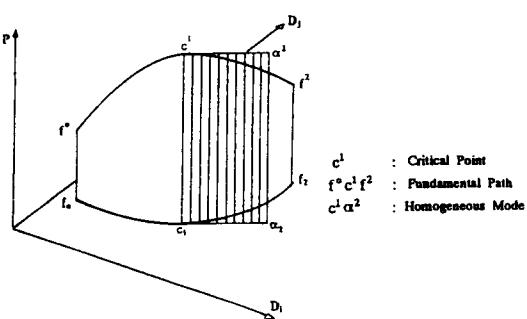


그림 4 극한좌굴시 좌굴경로의 방향

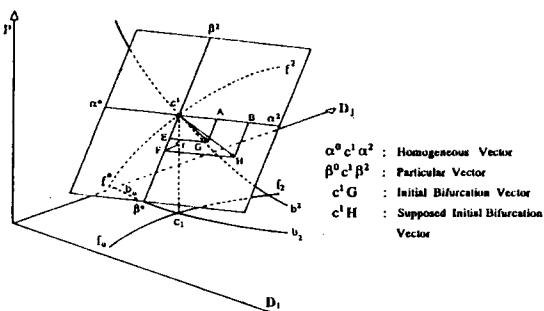


그림 5 초기 분기벡터의 가정

$t_1\{\alpha\} + t_2\{\beta\}$ 에 의해 분기경로의 방향이 얻어진다. 본 논문에서는 t_1 및 t_2 에 추정 초기값을 부여하고, 수정 Newton-Raphson법을 이용하여 수렴시킨다.

2.3 좌굴판정기준 및 특정부재의 선택방법

일반적으로, 비선형 좌굴해석을 위한 수치계산상에 있어서, 시스템의 접선강성매트릭스행렬식이 0으로 되는 점을 좌굴점으로 간주한다. 그러나, 실제상으로는 최소고유치가 정확히 0가 되지 않기 때문에 본 논문에서는 다음과 같은 판정기준을 설정하였다. 평형경로상의 k스텝에서의 임의점 a_k 가 임계점인 a^* 의 근방에 있다고 가정할 때, a^* 에 대하여 Taylor전개를 하면 다음과 같다.

$$\omega(a^*) = \omega(a_k) + da_k \cdot \dot{\omega}(a_k) = 0 \quad (10)$$

위 식에서

$$\begin{aligned} da_k &= -\omega(a_k) / \dot{\omega}(a_k) \\ &\approx -\omega(a_k) \cdot da_{k-1} / \{\omega(a_k) - \omega(a_{k-1})\} \end{aligned} \quad (11)$$

만일, $a_k \rightarrow a^*$ 면, $da_k \rightarrow 0$ 가 되므로 다음식으로 좌굴점을 판단한다.

$$da_k < \varepsilon \cdot da_1 \quad (\text{본 논문에서, 제약정수 } \varepsilon = 0.05) \quad (12)$$

또한, $\omega(a_k) \approx \omega(a_{k-1})$ 의 경우에는 $da_k \rightarrow \infty$ 가 되므로 충분파라메타의 제한치도 설정하지 않으면 않된다. 또한, 래티스돔의 해석에서 좌굴에 가장 영향을 미치는 부재를 판단하여 이 부재를 보강함으로서 국부좌굴을 방지할 수 있으며, 이의 판단지표로 부재의 변형도에너지 밀도함수를 부재의 강성매트릭스를 이용하여 다음식으로 계산한다.

$$E^{(n)} = \frac{1}{2A^{(n)}} \{u^{(n)}\}^T [k_{cr}^{(n)}] \{u^{(n)}\} \quad (13)$$

여기에서

- $[k_{cr}^{(n)}$: 좌굴시 n번째 부재의 강성매트릭스
 $\{u^{(n)}\}$: n번째 부재단의 좌굴모드
 $A^{(n)}$: n번째 부재의 단면적
 $I^{(n)}$: n번째 부재의 부재길이

3. 부재, 접합부의 모델화 및 기초 방정식

3.1 기본가정

- 1) 부재는 축대칭 원형단면을 갖는다.
- 2) 변형전 중립축에 수직이고, 평면이었던 단면은 변형후에도 수직이고, 평면을 갖는다.
- 3) 축에 대한 비틀림변형은 고려하지 않는다.
- 4) 면외 2방향의 흡은 서로 독립이다.
- 5) 접합부는 핀접합, 강접합, 강역(剛域)+회전스프링으로 모델링한다.

3.2 부재의 기초방정식

1) 좌굴처짐각법 1(SDM1)

변형후 부재의 전포텐셜에너지를 구하여 강성매트릭스를 유도하는 과정에서 축방향 변위는 x의 1차식, y, z방향 변위는 x의 3차식으로 가정한다.

2) 좌굴처짐각법 2(SDM2)

좌굴처짐각법 1에서 절점회전각은 2차이상의 항이 무시될 만큼 미소하다고 가정한다.

3) 좌굴처짐각법 3(SDM3)

처짐이 미소하다고 가정, 모멘트에 관한 미분방정식으로 부터 유도된다.

4) 강역+회전스프링모델

강역과 부재사이에 있는 접합회전스프링의 주축은 부재의 주축과 일치하는 것으로 가정하며, 가초식의 유도에 필요한 재단모멘트는 SDM2를 사용하였다. 이 식을 이용한 이유는 식의 유도가

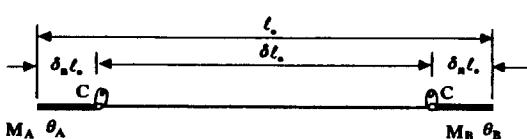


그림 6 양단 강역과 회전스프링으로 모델링된 부재형상

대단히 간편하고, 회전각의 2차항 이상을 고려한 SDM1의 결과와 차이가 대단히 미소하기 때문이다.

4. 래티스돔의 비선형 수치해석 결과

4.1 해석모델 1(parallel lamera dome)

이 모델의 접합부는 핀이며, 단층래티스돔의 전체좌굴에 대한 탄성좌굴하중을 라이즈/스팬비와 하중모드를 파라메타로 하여 검토하였다. 평면은 원형, 분할평면은 수평으로 한다.

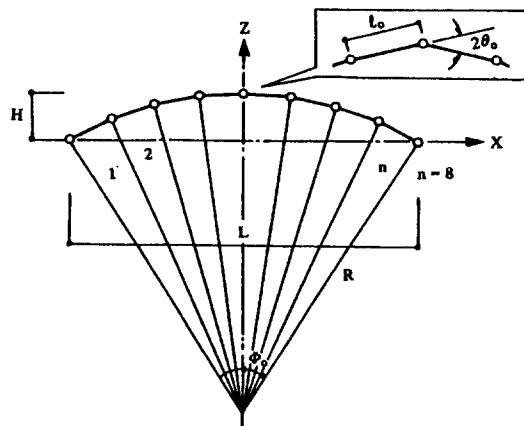


그림 7 해석모델1의 단면형상

표 1 해석모델1의 제원

돔의 형식	원형
분할수	4
라이즈/스팬비	0.05~0.25
스팬	cm 2000
부재단면적	cm $11.2(D=8.91\text{ cm}, t=0.42\text{ cm})$
접합부모델	핀접합
하중	t / node 등분포연직하중
지지조건	전주 핀지지

표 2 라이즈/스팬비에 따른 래티스돔의 좌굴하중 비교

라이즈/스팬비	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
EA $\theta_0^3(t)$	0.36	2.86	9.09	20.2	36.6
좌굴하중 (t / node)	Hangai	0.63	4.92	15.7	34.9
(t / node) 본해석 결과		0.62	4.91	16.7	39.4

해석모델 1의 접선강성매트릭스의 고유치의 변화를 조사해 보면, 극한점 및 극한점부근의 경로에서 그림 8의 숫자로 표시한 것과 같이 몇개의 고유치 부호가 동시에 부(負)로 바뀜을 알수 있으며, 이 현상으로부터 좌굴후의 여러곳에서 다분 기좌굴(multi-bifurcation)이 일어날 가능성이 높으며, 분기경로의 방향을 결정하는 것이 대단히 곤란할 것으로 사료된다.

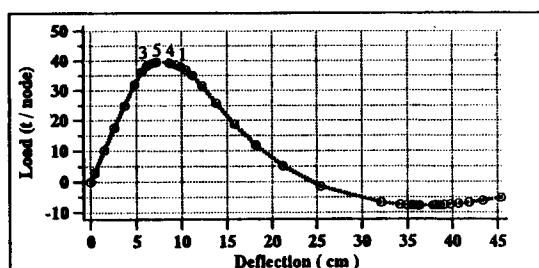


그림 8 해석모델1 정점의 비선형 탄성좌굴거동

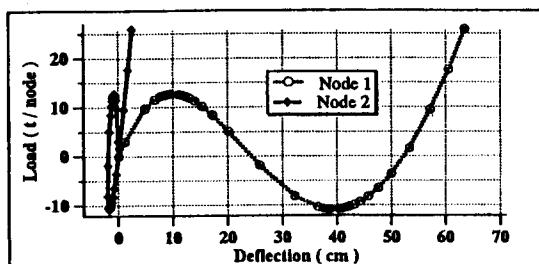


그림 9 정점 집중하중시 비선형 탄성좌굴거동

4.2 해석모델 2(hexagonal dome)

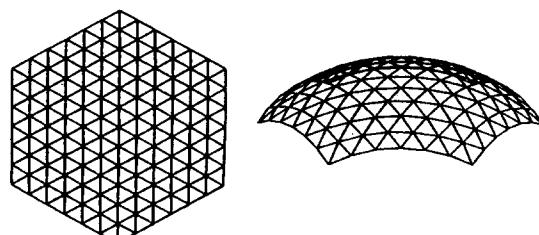


그림 10 해석모델2의 평면 및 입면형상

해석모델2는 거의 동일한 삼각형그리드를 갖고, 대단히 편평한 정육각형 평면의 단층래티스돔으로 각 절점은 곡률반경 R의 곡면상에 있다. 또한, 분할면은 연직이며, 각부재의 길이는 거의 동일하다.

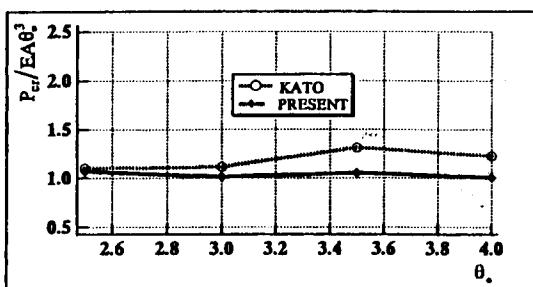
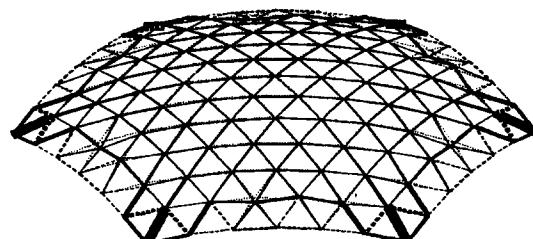
그림 11 점점부재의 반개각 θ_0 와 좌굴하중의 무차원화 좌표 η 의 관계

그림 12 좌굴모드 및 변형도에너지밀도의 분포

그림 11에서 보는 바와 같이 좌굴하중에 관한 본 해석결과가 Kato의 결과보다 약간 작게 나타나고 있다. 이것은 본 해석모델이 돔전체에 대하여 행해진 반면, Kato는 돔의 1/2부분만을 해석한 결과라고 사료된다. 전 해석모델에 걸쳐 편집합의 경우에는 수치계산시 모두 수렴하고 있으며, 비선형수치해석시 본 해석법을 충분히 적용할 수 있을 것으로 사료된다.

4.3 해석모델 3(hexagonal dome)

본 해석모델은 해석모델2와 동일형태로 분할수 $n=3$, 부재 반개각 $\theta_0=2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ$ 그리고, $\lambda=100$ 인 정육각형평면을 갖는 강접합 래티스돔이다. 또한,

본 논문에서는 균등한 절점연직하중이 작용하는 경우의 탄성좌굴하중을 좌굴처짐각법 1, 2, 3을 이용하여 산정하였다.

세개의 강성매트릭스를 사용한 결과를 비교하여 보면, 큰 차이는 보이지 않고 있으나, $\xi=0\sim4$ 에서 SDM1과 SDM2, SDM3사이에는 약 20%, $\xi=4\sim8$ 에는 SDM1, SDM2와 SDM3사이에 약 20%의 차가 발생하였다. 결론적으로 실용적인 면에서 보면, 최소의 좌굴하중을 나타내는 SDM3가 유효하다가 생각된다.

표 3 좌굴처짐각법에 의한 좌굴하중과 고전좌굴치의 비교
(t / node)

반개각 강성행렬	세장비						
		$\lambda=30$	$\lambda=50$	$\lambda=70$	$\lambda=100$	$\lambda=150$	$\lambda=200$
$\theta_0=2$	고전좌굴치	14.47			4.34		2.17
	SDM1	9.05			3.84		1.19
	SDM2	8.81			3.19		1.30
	SDM3	8.79			2.96		1.05
	고전좌굴치	57.88	34.73	24.80	17.36	11.58	8.68
	SDM1	52.79	30.08*	19.19	10.94	5.08	2.72
	SDM2	46.40	27.40*	19.24	10.72	4.86	2.72
	SDM3	46.05	26.50	16.91	8.84	3.96	2.25
	고전좌굴치	130.22			39.07		19.53
$\theta_0=4$	SDM1	123.6*			16.91		4.29
	SDM2	113.1*			16.38		4.29
	SDM3	110.3*			13.48		3.35
	고전좌굴치						

* 표는 좌굴판정전에 Newton-Raphson 수렴계산이 발산하여 그 전단계에서의 좌굴하중값을 나타내고 있다.

4.4 해석모델 4(강역+회전스프링으로 구성된 부재모델)

해석의 내용은 우선 접합부 강역의 길이 / 절점간 거리 $\delta_n=0$ 으로 하고, 정부(頂部)부재의 세장비가 50, 100, 200인 경우에 대하여 접합부 무차원화 스프링정수를 0.01~1000까지 변화시키면서,

표 4 정부부재의 세장비와 접합부 무차원화 스프링정수에 의한 둘의 좌굴하중

κ	편접합	0.01	0.1	1.0	10.0	100.0	1000.0	장접합
50	11.6	11.9	12.7	15.3	23.3*	26.0*	26.3*	26.4*
100	11.6	12.16	8.59	9.62	10.3	10.13	10.4	10.26
200	11.16	12.08	14.33	11.19	2.70	2.73	2.73	2.83

좌굴하중을 조사하였다. 또한 정부부재의 세장비를 100으로 고정하고 $\kappa=0.01\sim1000$, $\delta_n=0.025$, 0.05, 0.075, 0.10으로 하여 좌굴하중을 조사하였다.

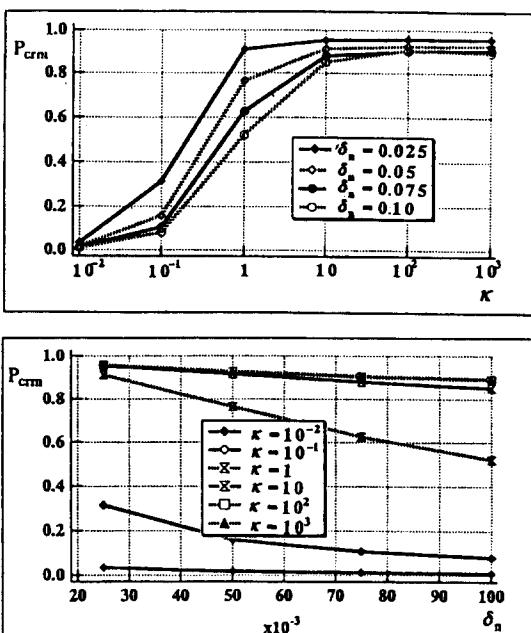


그림 13 κ 와 δ_n 에 의한 각 부재의 좌굴하중변화

5. 결 론

단층 래티스 둘에 대한 해석결과로 부터 세장비 및 반개각이 전체좌굴하중에 미치는 영향이 대단히 큼을 알 수 있었으며, 전체좌굴이 발생하기 전에 이미 오일러 좌굴하중이 일어나는 부재수가 전모델을 통하여 약 10% 정도가 됨을 알 수 있었다. 또한, 본 논문에서는, 다양한 형태의 래티스 둘에 관한 정확한 좌굴거동을 거시적으로 파악하는 해석방법 및 수치계산결과가 요구되는 상황에서, 해석 알고리즘 및 좌굴판정기준을 명확히 하였다. 또한, 몇개의 해석모델을 통하여 타 연구자와의 계산결과를 비교, 본 해석법의 타당성을 입증하였으며, 근사해법인 모-드중첩법의 개발을 위한 비교기준 데이터의 확보에 의미가 있다.

감사의 글

본 연구는 1994년도 초대형 구조시스템 연구센터의 지원으로 수행되었습니다. 이에 대해 귀 센터에 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

1. Riks, E., An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems, Int. J. Solids and Structuraes, Vol. 15, 1979, pp. 529-551
2. 細野 透 : 弧長法による弾性座屈問題の解析(その1) 座屈点に於ける増分解の性質, 日本建築學會論文報告集, 第242, 1976. 4, pp. 41-49.

3. Yang, Y. B., and M. S. Shie, Solution Method for Non-linear Problems with Multiple Critical Points, AIAA J., Vol. 28(12), 1990.12, pp 2110-2116.
4. Fujii, F., Scheme for Elasticae with Snap-back and Looping, J. Eng. Mech. ASCE, Vol. 115 (10), 1989, pp. 2166-2181.
5. Han, S. E., A Study on the Non-linear Buckling Behaviour of Latticed Structures, Ph.D. thesis, Kyoto University, 1993.

(접수일자 : 1996. 8. 26)