

3차원 유한요소법을 이용한 농형유도전동기 단락환의 저항계산

(Calculation of Resistance of Squirrel Cage Induction Motor End Ring using 3-D Finite Element Method)

朴敏雨* · 李福鎔** · 李基植***

(Min-Woo Bak · Bok-Yong Lee · Ki-Sik Lee)

요 약

본 논문에서는 3차원 유한요소법을 이용한 농형유도전동기 단락환의 등가저항계산법에 대하여 연구하였다. 농형유도전동기의 단락환은 회전자 봉도체의 유도 전류 폐로를 형성케 하는 역할을 하게 된다. 폐로 형성시 단락환의 표피효과로 인하여 적은 단면적으로 전류가 흐르게 되어 저항이 커진다. 본 논문에서는 자기벡터포텐셜 \vec{A} 과 전기스칼라포텐셜 ϕ 에 의한 3차원 유한요소법을 이용하여 회전자에서 발생하는 주울손실로부터 저항을 계산하였다.

Abstract

The end-ring may contribute a significant influence to the performance of machine. The induced currents flow through the bars of a cage rotor and complete their closed paths by passing around the end-ring. This dissertation is to describe a method for calculating end-ring resistance of squirrel cage rotor, based on 3-D finite element method($\vec{A} - \phi$). The resistance under consideration of skin effect is calculated by using Joule's loss equation.

1. 서 론

본 논문에서 다루고자 하는 농형유도전동기에서 단락환은 고정자에 가해 준 전류에 의하여 회

전자의 봉도체에 유도된 전류가 흐를 수 있도록 폐로를 형성하게 한다. 폐로를 형성할 때 단락환에서의 표피효과로 인하여 설계치수에 비해 적은 단면적으로 전류가 흐르게 되어 저항이 커진다. 또한 농형유도전동기 회전자의 봉도체와 단락환이 접속되는 부분에서 전류분포가 고정자의 여자된 상태에 따라 틀리게 되는데 이것으로 인해 봉도체의 각 부분에서 유효저항이 틀려지게 된다.

*正會員 : 단국대학교 대학원 석사과정 졸업

**正會員 : 대유공업전문대학 전기과 교수

***正會員 : 단국대 공대 전기공학과 교수

接受日字 : 1995年 11月 11日

고정자의 기자력이 항상 균형을 이루며 분포하기 위해서는 회전자 봉도체에 적절한 저항의 균형이 이루어져야만 하고 저항의 균형을 이루는데 있어서 단락환의 저항은 큰 변수로서 자리잡게 된다.

1), 7), 8)

이전에는 등가회로법을 이용하여 회전자의 봉도체와 단락환의 저항결선으로 등가화시켜 등가저항을 구하였다. 유한요소해석을 도입한 Williamson은 2차원 유한요소해석과 기존의 해석방식인 회로해석법을 연결하여 단락환의 등가저항을 구하였는데, 회전자 봉도체와 단락환의 접합면에서 전류밀도가 균일하다는 가정과 단락환의 두께가 매우 작다는 가정을 하였으므로 단락환의 표피효과를 충분히 고려하지 못하였다.⁸⁾

유도전동기의 전자장 해석은 시간항을 고려하여 해석하여야 한다. 따라서 본 논문에서는 자장이나 전류 등이 시간에 대해 정현적인 변화를 한다는 가정과 회전자의 정지상태를 가정하였다. 그리고, 3차원 해석으로 단락환 두께를 고려하여 표피효과를 감안하였다.^{4), 5), 6)}

2. 회전자 등가회로

그림 1은 농형유도전동기 회전자의 등가회로를 나타내었다. 회전자 부분의 등가회로는 단락환의 인덕턴스를 무시한다고 하였을 경우 봉도체와 단락환으로 이루어진 저항회로로 이루어진다.

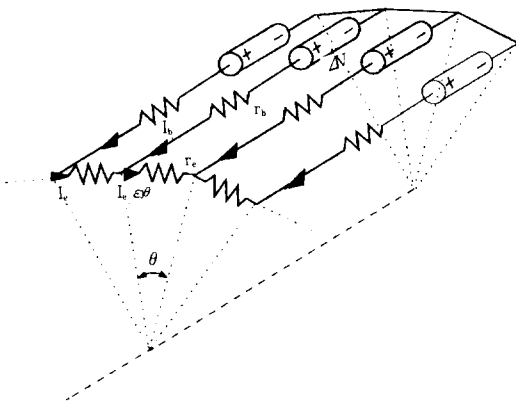


그림 1. 회전자 등가회로
Fig. 1. Rotor Equivalent Circuit

대개의 일반적인 경우 봉도체 사이는 등간격이고, 도체의 재질은 균일하게 되므로 봉도체와 봉도체 사이를 연결하는 단락환의 저항을 r_s 으로 근사할 수 있고, 봉도체의 저항은 r_b 로 나타낸다.^{1), 9), 11)}

그림 2는 인접된 각 구분도체의 전류를 등가성형의 전류로 나타내어 벡터선도로 나타낸 것이다. 여기서 단락환의 일구간 도체의 전류를 I_e 라고 하면, 그 다음 구간 도체의 전류는 $I_e \epsilon^{j\theta}$ 이므로, 결선에서의 전류는 다음의 식으로 표현된다.

$$I_e + I_b = I_e \epsilon^{j\theta} \quad (1)$$

$$I_b = I_e (\epsilon^{j\theta} - 1) = I_e (\cos\theta + j \sin\theta - 1) \quad (2)$$

식 (2)의 실효치는

$$I_b = I_e \sqrt{(\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta} = 2I_e \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3)$$

식 (3)은 전동기의 극수 p 와 회전자 전체의 봉도체의 개수 N_b 를 고려하여 $\theta = \pi p / N_b$ 로 나타내어 다음과 같은 관계를 가진다.

$$I_e = \frac{I_b}{2 \sin(\pi p / 2N_b)} \quad (4)$$

주울손실식에 식 (4)를 대입하여 단락환 내에서의 손실식으로 완성하면 식 (5)와 같다.

$$P = I_e^2 r = I_b^2 r_b + I_e^2 r_s = I_b^2 \left(r_b + \frac{r_s}{4 \sin^2(\pi p / 2N_b)} \right) \quad (5)$$

식 (5)를 이용하여 단락환의 한핏치에서의 전체

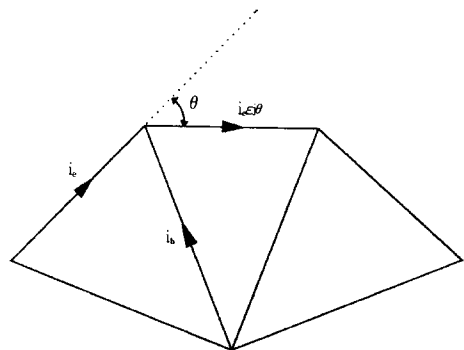


그림 2. 그림 1 회로의 전류벡터선도
Fig. 2. Current Vector Diagram of Fig. 1

저항을 구할 수 있게 되고 그 저항을 r_b^+ 라고 하면,

$$r_b^+ = r_b + \frac{r_c}{4\sin^2(\pi p/2N_b)} \quad (6)$$

r_b^+ 는 유효봉도체 저항인데, 식 (6)에서 봉도체 저항 r_b 는 봉도체 재질의 균일함과 봉도체내부의 표피효과를 무시할때 간단한 수식에 의하여 쉽게 구할 수 있으나, 단락환저항 r_c 는 단락환에서의 표피효과와 봉도체와의 접합면에서 전류밀도의 불균일로 쉽게 계산해 낼 수가 없다. 2차원 유한요소법과의 결합을 통하여 실제적인 모델에 적용하는 것이 가능하기는 하지만, 표피효과로 인한 특성의 고려는 사실상 어렵다.

3. 3차원 유한요소해석

1) 지배방정식

변위전류를 무시한 전자장 Maxwell 방정식과 벡터항등식을 이용하여 유도전류가 존재하는 전자장에서 지배방정식을 구성하게 되는데, 자기벡터포텐셜 \vec{A} 을 다음과 같이 정의하여 식을 구성한다.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (7)$$

자기벡터포텐셜 \vec{A} 와 전기스칼라포텐셜 ϕ 로 구성되는 지배방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) = \vec{J}_0 - \sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) \quad (8)$$

여기서, ν : 자기저항률[mH⁻¹]

J_0 : 전원전류밀도[A]

식 (8)에서 자기벡터포텐셜의 시간미분항을 \vec{A} 가 시간에 대하여 정현적 변화를 하는 정상상태 해석으로 전개한다. 그리고 식 (9)와 같은 전하의 축적을 무시한 전류 연속 방정식으로 또 하나의 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\nabla \cdot (j\omega\sigma\vec{A} + \sigma\nabla\phi) = 0 \quad (9)$$

2) 유한요소 정식화

앞절에서 도출한 지배방정식 (8)과 (9)에 대해서 형상함수를 가중함수로 하는 Galerkin법을 적용하고 Dirichlet경계조건과 Neumann경계조건을 경

계적분항에 적용하면 다음과 같이 잔차의 식을 쓸 수 있다.

$$\vec{R}_i = -\int_V \nabla N_i \times \nu (\nabla \times \vec{A}) dV - \int_V N_i \vec{J}_0 dV + \sigma \int_V N_i (j\omega\vec{A} + \nabla\phi) dV \quad (10)$$

$$R_\phi = -\int_V \nabla N_i \cdot (j\omega\sigma\vec{A} + \sigma\nabla\phi) dV \quad (11)$$

여기서, N_i 는 형상함수를 나타내고, \int_V 는 체적 적분 연산자를 나타낸다.

3) 이산화

식 (10), (11)을 각 성분별로 이산화하기 위해 해석 영역을 그림 3과 같이 유한개의 사면체 요소로 분할하고 요소내에서 미지함수를 일차함수로 근사시키면 식 (12), (13)과 같은 근사식을 얻을 수 있다.^{6), 7)}

$$\vec{A}(x, y, z) = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta z \quad (12)$$

$$\phi(x, y, z) = a + \beta x + \gamma y + \delta z \quad (13)$$

여기서, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 는 일차시험함수의 계수 위의 식 (12)와 (13)을 잔차의 식에 대입하여 이산화된 계방정식을 얻으면 다음과 같다.

$$R_{xi} = \frac{1}{36\mu V^e} \sum_{j=1}^4 \{ (c_j c_i + d_j d_i) A_{xj} - c_j b_j A_{yj} - d_j b_j A_{zj} \} + j\omega\sigma \frac{V^e}{20} \sum_{j=1}^4 (1 + \delta_{ij}) A_{xj} + \frac{\sigma}{24} \sum_{j=1}^4 b_j \phi_j - \frac{V^e}{4} J_{xi} \quad (14)$$

$$R_{vi} = \frac{1}{36\mu V^e} \sum_{j=1}^4 \{ -b_j c_j A_{xj} + (b_j b_i + d_j d_i) A_{vj} - d_j c_j A_{zj} \} + j\omega\sigma \frac{V^e}{20} \sum_{j=1}^4 (1 + \delta_{ij}) A_{vj}$$

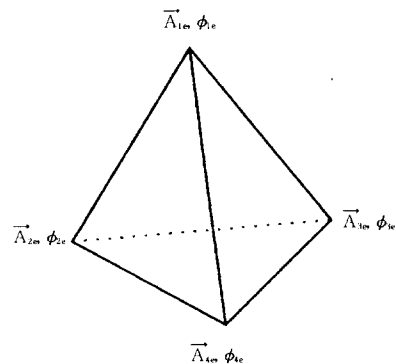


그림 3. 사면체 요소
Fig. 3. Tetrahedron Element

$$+ \frac{\sigma}{24} \sum_{i=1}^4 c_i \phi_i - \frac{V^e}{4} J_{v_i} \quad (15)$$

$$R_{z_i} = \frac{1}{36\mu V^e} \sum_{i=1}^4 \{ -b_i d_i A_{x_i} - c_i d_i A_{y_i} \\ + (b_i b_i + c_i c_i) A_{z_i} \} + j\omega\sigma \frac{V^e}{20} \sum_{i=1}^4 (1 + \delta_{ii}) A_{z_i} \\ + \frac{\sigma}{24} \sum_{i=1}^4 d_i \phi_i - \frac{V^e}{4} J_{z_i} \quad (16)$$

$$R_{\phi} = -j\omega\sigma \frac{1}{24} \sum_{i=1}^4 \{ b_i A_{x_i} + c_i A_{y_i} + d_i A_{z_i} \} \\ - \frac{\sigma}{36V^e} \sum_{i=1}^4 (b_i b_i + c_i c_i + d_i d_i) \phi_i \quad (17)$$

식 (14)~(17)로부터 다음과 같은 16×16 요소행렬 (element matrix)을 구성할 수 있게 된다.

이것을 전 요소에 대해서 조립, 계행렬을 만들고 경계조건을 대입한 후 행렬식을 풀면, 각 절점에서의 포텐셜을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{A}_1 \\ \vec{A}_2 \\ \vec{A}_3 \\ \vec{A}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \\ \vec{F}_3 \\ \vec{F}_4 \end{bmatrix} \quad (18)$$

4. 저항계산

본 장에서는 2장에서 고찰한 주울손실식을 자기벡터포텐셜과 전기스칼라포텐셜로 표현되는 식으로 치환하여 저항계산을 수행하는 방법에 대하여 설명한다.

2장에서 살펴본 주울의 손실식을 단락한 내에서의 식으로 표현하면 다음과 같다.^{11, 9)}

$$P = I_c^2 r_c \quad (19)$$

여기서, I_c : 단락환의 전류[A]

r_c : 단락환의 저항[Ω]

식 (19)는 에너지 보존정리에 따라 구하여진 식이므로 유도전류 \vec{J}_c 와 전계의 세기 \vec{E} 가 동상이면 식 (20)과 같이 표현할 수 있다.^{11, 10)}

$$P = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J}_c \, dv \quad [W] \quad (20)$$

여기서, \vec{E} : 전계의 세기[V/m]

\vec{J}_c : 유도 전류 밀도[A/m²]

식 (20)은 다음과 같은 식으로 전개할 수 있다.

$$P = \int_V \vec{E} \cdot \sigma \vec{E} \, dv \\ = \sigma \int_V \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \right) \cdot \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \right) \, dv \quad (21)$$

3장에서 가정과 마찬가지로 자기벡터포텐셜 \vec{A} 의 시간미분항은 정상상태해석이라는 가정을 통하여 $j\omega$ 로 표현되어 식 (21)을 전개하여 정리하면 다음과 같다.

$$P = -\omega^2 \sigma \int_V (A_x + A_y + A_z) \, dv \\ - 2j\omega \sigma \int_V \vec{A} \cdot \nabla \phi \, dv \\ + \sigma \int_V \nabla \phi \cdot \nabla \phi \, dv \quad (22)$$

식 (22)에 3장에서와 같은 방식으로 형상함수를 도입하고 체적적분하여 전개하면 각 항들은 아래의 식과 같이 된다.

$$-\omega^2 \sigma \int_V (A_x + A_y + A_z) \, dv \quad (23)$$

$$= -\omega^2 \sigma \frac{V^e}{4} \sum_{i=1}^4 (A_{x_i} + A_{y_i} + A_{z_i})$$

$$- 2j\omega \sigma \int_V \vec{A} \cdot \nabla \phi \, dv \quad (24)$$

$$= -2j\omega \sigma \frac{V^e}{4} \sum_{i=1}^4 (b_i A_{x_i} \phi_i + c_i A_{y_i} \phi_i + d_i A_{z_i} \phi_i)$$

$$\sigma \int_V \nabla \phi \cdot \nabla \phi \, dv \quad (25)$$

$$= \frac{\sigma}{36V^e} \sum_{i=1}^4 \{ |b_i \phi_i|^2 + |c_i \phi_i|^2 + |d_i \phi_i|^2 \}$$

식 (23)~(25)를 식 (19)에 대입하여 정리하면,

$$r_c = \left\{ -\omega^2 \sigma \frac{V^e}{4} \sum_{i=1}^4 (A_{x_i} + A_{y_i} + A_{z_i}) \right.$$

$$\left. - 2j\omega \sigma \frac{V^e}{4} \sum_{i=1}^4 (b_i A_{x_i} \phi_i + c_i A_{y_i} \phi_i + d_i A_{z_i} \phi_i) \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma}{36V^e} \sum_{i=1}^4 \{ |b_i \phi_i|^2 + |c_i \phi_i|^2 \right.$$

$$\left. + |d_i \phi_i|^2 \} / I_c^2 \quad (26)$$

와 같은 자기벡터포텐셜 \vec{A} 와 전기스칼라포텐셜 ϕ 를 미지수로 하는 단락환저항의 식을 도출할 수 있다.

5. 시뮬레이션 및 검토

시뮬레이션은 농형회전자를 한 피치 근사시킨 모델을 통해 이루어지고, 저항의 변화를 확인할

수 있도록 단락환의 두께를 변화시킨 모델과 유도전류의 크기가 다른 모델을 설정하여 행하였다.

그림 4는 농형유도전동기 해석을 위해 한 피치만을 대상으로 한 것을 나타낸 것이고, 그림 5는 해석모델에 대한 설명이다. 시뮬레이션 모델은 회전자 봉도체를 중심으로 한 피치를 근사시킨 것으로서 단락환의 두께를 10(mm)로 한 모델 1과, 단락환의 두께를 15(mm)로 한 모델 2를 설정하였다. 고정자에 가한 전원전류에 의해 유도된 전류가 회전자 봉도체를 통해 단락환으로 유입되어 폐로를 형성하게 된다. 또한 모델 1과 2의 변형으로 고정자의 권선이 회전자 봉도체를 약간 지나간 모델 3과 4를 설정하여 시뮬레이션하였다.

모델 1~모델 4에서 회전자 철편과 고정자 철편은 성층하였다고 보아 도전율을 없다고 보았고

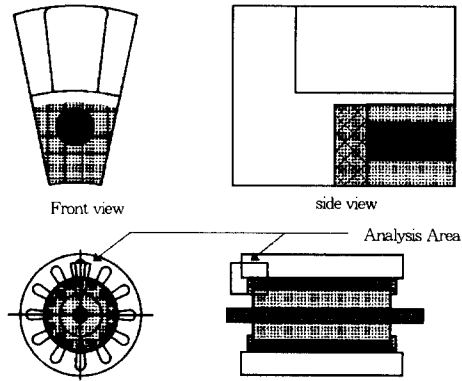


그림 4. 해석모델의 구조도
Fig. 4. Scheme for Analysis Model

비투자율은 1000으로 했으며, 모든 재질에 있어서 비선형성은 고려하지 않았다. 고정자에 가해

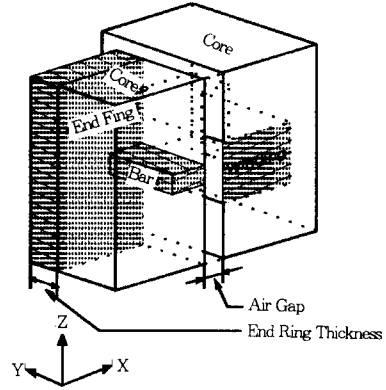


그림 5. 해석모델의 형상
Fig. 5. Shape of Analysis Model

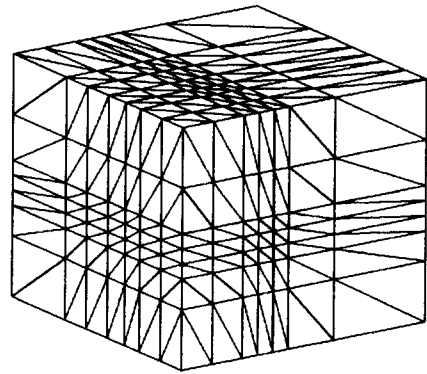


그림 6. 모델 1 사면체 요소분할도
Fig. 6. Mesh Scheme for Model 1

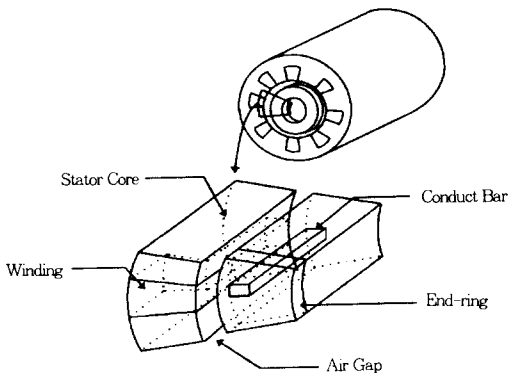


그림 7. 모델 1의 유도전류(실부)
Fig. 7. Induce Current for Model 1(Real Part)

주는 전류밀도는 $10 \times 10^5 [A/m^2]$ 을 하였고, 단락 환은 알루미늄으로 도전을 3.54×10^7 로 하였다. 유한요소법을 적용하기 위한 요소분할도는 그림

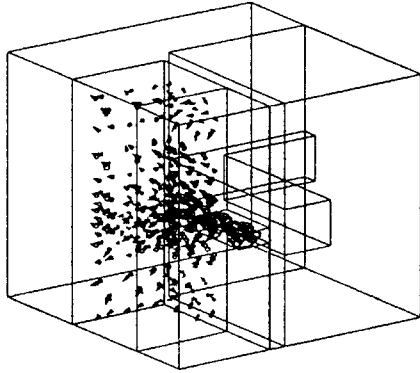


그림 8. 모델 2의 유도전류(실부)
Fig. 8. Induce Current for Model 2(Real Part)

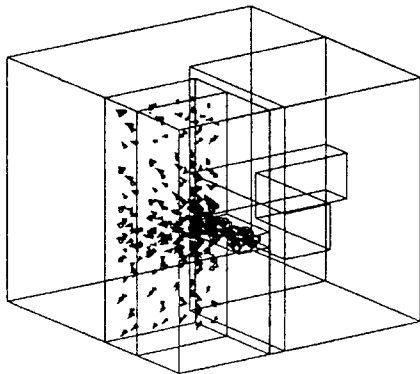


그림 9. 모델 3의 유도전류(실부)
Fig. 9. Induce Current for Model 3(Real Part)

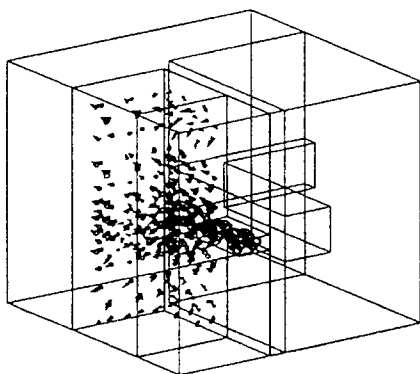


그림 10. 모델 4의 유도전류(실부)
Fig. 10. Induce Current for Model 4(Real Part)

6에 모델 1의 요소분할도를 대표적으로 나타내었다. 그림 7~10은 각각 모델 1~모델 4에서 유

표 1. 4가지 모델의 비교

Table 1. Comparison of Four Models

모델	모델 1	모델 2	모델 3	모델 4
출력값				
최대자속밀도 [T](실부)	4.152 $\times 10^{-2}$	5.471 $\times 10^{-2}$	5.75 $\times 10^{-2}$	6.59 $\times 10^{-2}$
최대자속밀도 [T](허부)	1.078 $\times 10^{-2}$	1.535 $\times 10^{-2}$	1.352 $\times 10^{-2}$	1.444 $\times 10^{-2}$
최대유도전류 [A/m ²](실부)	4.129 $\times 10^5$	5.053 $\times 10^5$	5.233 $\times 10^5$	5.155 $\times 10^5$
최대유도전류 [A/m ²](허부)	2.570 $\times 10^5$	2.65 $\times 10^5$	3.279 $\times 10^5$	3.307 $\times 10^5$
단락환의 [μQ]저항	6.32	2.11	4.72	1.81

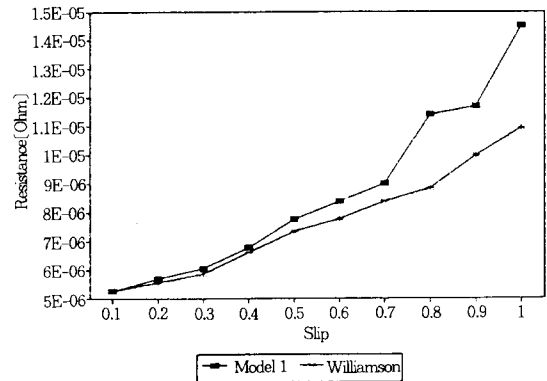


그림 11. 모델 1의 저항값 비교
Fig. 11. Resistance Comparison for Model 1

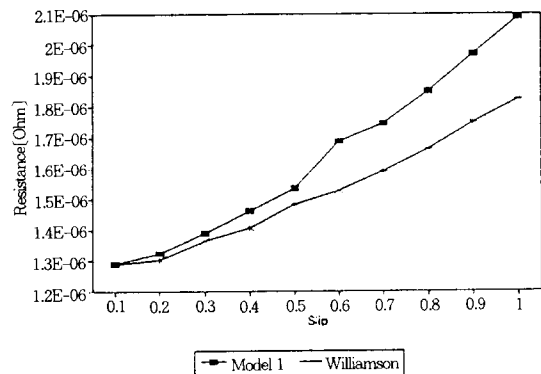


그림 12. 모델 2의 저항값 비교
Fig. 12. Resistance Comparison for Model 2

도 전류의 실부를 나타낸 것이다.

Dirichlet 경계조건의 경우, 자속의 형태에 대하여 알고 있음을 가정하여 자속의 방향과 유도전류의 방향에 따른 포텐셜의 각 방향성분을 고려하여 주었다.

6. 결 론

본 연구에서는 자기벡터포텐셜 \vec{A} 와 전기스칼라포텐셜 ϕ 을 이용한 농형유도전동기의 3차원 해석을 통하여 단락환의 저항을 계산하는 알고리즘을 제시하였다. 제시한 알고리즘은 3차원 해석을 하여 단락환에서의 표피효과를 고려하였고, 5장에서 설정한 해석대상의 4가지 모델에서 유도전류와 단락환의 설계치수에 따른 저항의 변화를 얻을 수 있었다. 각 모델에 대해 유한요소해석에 의한 출력값의 비교는 표 1에 나타내었다. 또한, 슬립을 변화시켰을 경우 나타내는 모델 1에서의 저항값 변화를 이전의 연구자인 Williamson의 결과와 비교하여 그림 11에 나타내었다. 그리고 모델 2에 대해서도 그림 11과 같은 방법으로 결과값을 그림 12에 나타내었다. 제시된 알고리즘은 농형유도전동기의 설계·제작시 많은 도움을 줄 수 있다고 사료된다.

참 고 문 헌

- 1) 박민호, "유도기기", 동명사, 2판, 1986.
- 2) 임달호, "전기계의 유한요소법", 동명사, 1987.
- 3) 홍성표, "A- ϕ 를 이용한 3차원 와전류 문제의 유한요소해석", 석사학위논문, 서울대학교, 1990.
- 4) Durney and Johnson, "Introduction to Modern Electromagnetics", MG-H, 1986.
- 5) David, K. Cheng, "Field and Wave Electromagnetics", Addison Wesley Co., 1989.
- 6) P. P. Silvester, "Finite element for electrical engineers", Cambridge Univ. Press, 1990.
- 7) S. Williamson, "Calculation of the bar resistance and leakage reactance of cage rotors with closed slots", IEE Proc. Vol 132, Pt. B, No. 3, May, 1985.
- 8) S. Williamson, "Calculation of the resistance of induction motor end rings", IEE Proc. Vol 133, Pt. B, No. 2, March 1986.
- 9) Michael J. Robinson, "Finite element calculation of equivalent circuit parameters for induction motors", Ph.D thesis, London University, Nov. 1988.
- 10) S. Williamson, Lian Hoon Lim, and Michael J. Robinson, "Finite-element models for cage-induction motor analysis", IEEE Trans. on Industry App., Vol. 26, No. 6, Nov/Dec, 1990.
- 11) Weiss, J. Csendes, Z. J., "A One-step Finite Element Method for Multiconductor Skin effect Problems", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, PAS-101, No. 10, pp. 3796-3803, 1982.
- 12) R. V. Churchill, J. W. Brown, "Complex Variables and Applications", fifth edition, MG-H, 1990.

◇ 著 者 紹 介 ◇



박민우(朴敏雨)

1971년 9월 20일생. 1994년 2월 단국대 공대 전기공학과 졸업. 1996년 2월 단국대학교 대학원 석사과정 졸업.



이기식(李基植)

1952년 3월 30일생. 1973년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1985년 동대학원 전기공학과 졸업(박사). 1996년 현재 단국대 공대 전기공학과 교수.



이복용(李福鎔)

1950년 12월 25일생. 1974년 2월 한양대 공대 전기공학과 졸업. 1996년 현재 단국대 대학원 전기공학과 박사과정. 1996년 현재 대우공업전문대학 전기과 교수.