

다중 Ridge 원형 도파관의 TM과 TE 모드 해석

TM and TE Modes in Multiple-Ridged Circular Waveguides

유종원·명노훈

Jong-Won Yu · Noh-Hoon Myung

요 약

다중 ridge 원형 도파관을 푸리에 급수 전개와 모드 정합법을 이용하여 정확하게 해석하였다. 경계 조건을 이용하여 두 급수식을 전개하고 이를 풀어 모드를 정확하게 구하였다. 다중 ridge 원형 도파관의 ridge의 수, 길이, 폭에 따른 차단 파수(cutoff wavenumber)의 변화를 살펴보았다. 구한 해는 정확하고 수렴성이 뛰어나며 dominant mode에 대해서는 간단한 근사식을 제시하였다.

Abstract

The multiple-ridged circular waveguides is analyzed using Fourier series and the mode matching technique. The enforcement of the boundary conditions yields the simultaneous equations for the field coefficient inside the waveguides. The simultaneous equations are solved to represent a dispersion relation in an analytic series form. The numerical computation is performed to illustrate the behavior of the cutoff wavenumbers in terms of number, length and angle of ridges. The presented series solution is exact and rapidly-convergent so that it is efficient for numerical computation. A simple dispersion relation based on the dominant mode analysis is obtained and is shown to be very accurate for most practical applications.

I. 서 론

Ridge 원형 도파관은 필터, 정합 회로, 편광기(polarizers) 그리고 서큘레이터 등 많은 회로에 응용되고 있다. 따라서, 이에 대한 많은 연구가 이루어져왔다. Single ridge 원형 도파관[1], double ridge 원형 도파관[2]~[5], triple ridge 원형 도파관[6],[7], 그리고 quadruple ridge 원형 도파관

[4],[8],[9]에 대하여 ridge의 두께가 일정하고 대칭인 경우에 대한 연구가 되어왔다. 그리고, 그 해석 방법에 있어서 모드 정합법과 수치 해석적인 방법을 사용하고 있다. 본 논문에서는 다중 ridge 원형 도파관을 푸리에 급수 전개와 모드정합법을 이용하여 구하였다. 이 해는 지금까지 다루어진 대칭형 구조가 아닌 비대칭형 구조의 해석으로 일반화된 것이며, 정확하고 빠른 수렴성을 갖는다.

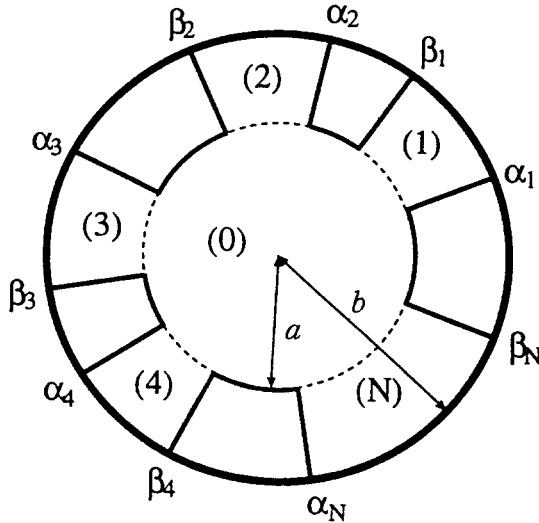
II. 수식 전개

본 논문에서는 시간 조화 함수를 $e^{j\omega t}$ 로 취하였다. [그림 1]과 같은 다중 ridge 원형 도파관의 내부에 z 방향으로 TM과 TE 모우드가 전파한다고 하자. 그리고, 반경 a 를 기준으로 영역을 나누어 각각의 영역을 모우드로 전개한다. 각 영역에서의 전계(E_z)와 자계(H_z)는 아래식과 같이 각각 모우드의 전개로 나타낼 수 있다.

먼저, 영역 0 ($\rho < a$, $0 < \phi < 2\pi$)에서의 전계와 자계는 아래와 같다.

$$E_z^0(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n J_n(k\rho) e^{jn\phi} \quad (1)$$

$$H_z^0(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_n(k\rho) e^{jn\phi} \quad (2)$$



[그림 1] 다중 ridge 원형 도파관의 구조
[Fig. 1] The geometry of multiple-ridged circular waveguides.

영역 1 ($a < \rho < b$, $\alpha_1 < \phi < \beta_1$)에서의 전계와 자계는 아래와 같다.

$$E_z^1(\rho, \phi) = \sum_{p_1=1}^{\infty} C_{p_1} F_{p_1}(k\rho) \sin \mu_{p_1}(\phi - \alpha_1) U_1 \quad (3)$$

$$H_z^1(\rho, \phi) = \sum_{q_1=0}^{\infty} D_{q_1} G_{q_1}(k\rho) \cos \nu_1(\phi - \alpha_1) U_1 \quad (4)$$

영역 2 ($a < \rho < b$, $\alpha_2 < \phi < \beta_2$)에서의 전계와 자계는 아래와 같다.

$$E_z^2(\rho, \phi) = \sum_{p_2=1}^{\infty} C_{p_2} F_{p_2}(k\rho) \sin \mu_{p_2}(\phi - \alpha_2) U_2 \quad (5)$$

$$H_z^2(\rho, \phi) = \sum_{q_2=0}^{\infty} D_{q_2} G_{q_2}(k\rho) \cos \nu_2(\phi - \alpha_2) U_2 \quad (6)$$

영역 N ($a < \rho < b$, $\alpha_N < \phi < \beta_N$)에서의 전계와 자계는 아래와 같다.

$$E_z^N(\rho, \phi) = \sum_{p_N=1}^{\infty} C_{p_N} F_{p_N}(k\rho) \sin \mu_{p_N}(\phi - \alpha_N) U_N \quad (7)$$

$$H_z^N(\rho, \phi) = \sum_{q_N=0}^{\infty} D_{q_N} G_{q_N}(k\rho) \cos \nu_N(\phi - \alpha_N) U_N \quad (8)$$

여기서,

$$F_{\mu}(k\rho) = J_{\mu}(k\rho) - J_{\mu}(kb) Y_{\mu}(k\rho) / Y_{\mu}(kb) \quad (9)$$

$$G_{\nu}(k\rho) = J_{\nu}(k\rho) - J'_{\nu}(kb) Y_{\nu}(k\rho) / Y'_{\nu}(kb) \quad (10)$$

$$\mu = p_i \pi / (\beta_i - \alpha_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

$$\nu_i = q_i \pi / (\beta_i - \alpha_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$U_i = \begin{cases} 1, & \alpha_i < \phi < \beta_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

이며 J_n 과 Y_n 은 각각 1차, 2차 베셀함수이다. 위의

z-방향 성분으로부터 아래식을 이용하여 E_ϕ 와 H_ϕ 성분을 구할 수 있다.

$$E_\phi(\rho, \phi) = \frac{-j}{k} \left\{ \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - w\mu \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right\} \quad (11)$$

$$H_\phi(\rho, \phi) = \frac{-j}{k} \left\{ \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + w\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right\} \quad (12)$$

2-1. TM 모우드 해석

먼저, $E_z \neq 0$ 이고 $H_z = 0$ 인 TM 인 경우에 대해 해석한다. 위에서 구한 각각의 미지수를 구하기 위해 $\rho = a$ 에서의 접선성분 전계와 자계의 연속성을 이용한다. $\rho = a$ 에서의 접선성분 전계 연속성에 의해 아래의 식이 구해진다.

$$E_z^0(a, \phi) = E_z^1(a, \phi)U_1 + E_z^2(a, \phi)U_2 + \dots + E_z^N(a, \phi)U_N \quad (13)$$

위 식에 각 성분을 대입하면 아래의 급수식이 구해진다.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n J_n(ka) e^{jn\phi} = \sum_{i=1}^N \sum_{\rho_i=1}^{\infty} C_{\rho_i} F_{\rho_i} \sin \mu_i(\phi - \alpha_i) U_i \quad (14)$$

그리고 $\rho = a$ 에서의 접선성분 자계의 연속성에 의해 아래의 식이 구해진다.

$$H_\phi^0(a, \phi) = H_\phi^1(a, \phi)U_1 + H_\phi^2(a, \phi)U_2 + \dots + H_\phi^N(a, \phi)U_N \quad (15)$$

이에 각 성분을 대입하여 아래의 급수식을 얻는다.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n J'_n(ka) e^{jn\phi} = \sum_{i=1}^N \sum_{\rho_i=1}^{\infty} C_{\rho_i} F'_{\rho_i} \sin \mu_i(\phi - \alpha_i) U_i \quad (16)$$

위에서 구한 두 개의 급수식 (14)와 (16)으로부터 미지수를 구한다.

위의 (14)에 지수함수의 직교성(orthogonality)을 이용하여 미지수 A_k ($-\infty < k < \infty$)를 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$2\pi A_k J_k(ka) = \sum_{i=1}^N \sum_{\rho_i=1}^{\infty} C_{\rho_i} F_{\rho_i}(ka) f_{\mu_i(-k)} \quad (17)$$

여기서

$$f_{\mu_i(-k)} = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} e^{-jk\phi} \sin \mu_i(\phi - \alpha_i) d\phi$$

이다. 또한 (16)에 사인 함수의 직교성을 이용하여 C_{ρ_i} ($i=1, 2, \dots, N$)를 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$C_{\rho_i} F'_{\rho_i}(ka) = \frac{2}{\beta_i - \alpha_i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n J'_n(ka) f_{\mu_i n} \quad (18)$$

여기서

$$f_{\mu_i n} = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} e^{jn\phi} \sin \mu_i(\phi - \alpha_i) d\phi$$

이다. 식(18)을 (17)에 대입하여 미지수 A_n 만의 함수를 구할 수 있다.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \{J_n(ka)\delta_{kn} - J'_n(ka)I_{kn}\} A_n = 0 \quad (19)$$

여기서 δ_{kn} 은 Kronecker delta 이고,

$$I_{kn} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \sum_{\rho_i=1}^{\infty} \frac{2}{\beta_i - \alpha_i} \frac{F_{\rho_i}(ka)}{F'_{\rho_i}(ka)} f_{\mu_i n} f_{\mu_i(-k)}$$

이다.

도파관 내의 모우드는 인가 전원이 없더라도 전개 모우드의 계수가 값을 가지므로 도파관 모우드를 구하기 위해서는 (19)는 다음과 같은 식을 만족

해야 한다.

$$\det[J_n(ka)\delta_{kn} - J'_n(ka)I_{kn}] = 0 \quad (20)$$

위 식에서 dominant mode (n=0)에 대해서는 아래와 같이 간단한 식으로 나타낼 수 있다.

$$|J_0(ka) - J'_0(ka)I_{00}| = 0 \quad (21)$$

위에서 구한 (20)으로부터 다중 ridge 원형 도파관의 차단파수를 구한다. 이때, 차수가 무한대인 급수식은 빠른 수렴성(결과에서 제시) 때문에 몇 개의 차수 만으로 그 해를 구할 수 있다.

2-2. TE 모우드 해석

다음으로 $E_z=0$ 이고 $H_z \neq 0$ 인 TE 인 경우에 대해 해석한다. 접선성분 전계와 자계의 연속성을 이용하여 두 개의 급수식을 구한다.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_n(ka) e^{jn\phi} = \sum_{i=1}^N \sum_{q_i=0}^{\infty} C_{q_i} G_{\nu_i} \cos \nu_i(\phi - \alpha_i) U_i \quad (22)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J'_n(ka) e^{jn\phi} = \sum_{i=1}^N \sum_{q_i=0}^{\infty} C_{q_i} G'_{\nu_i} \cos \nu_i(\phi - \alpha_i) U_i \quad (23)$$

위의 식 (22)와 (23)에 각각 지수함수와 코사인함수의 직교성(orthogonality)을 이용하여 미지수 $B_k (-\infty < k < \infty)$ 와 $D_{q_i} (i=1, 2, \dots, N)$ 구한다.

$$2\pi B_k J'_k(ka) = \sum_{i=1}^N \sum_{q_i=0}^{\infty} D_{q_i} G'_{\nu_i}(ka) g_{\nu_i(-k)} \quad (24)$$

$$D_{q_i} G_{\nu_i}(ka) = \frac{2e_{q_i}}{\beta_i - \alpha_i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_n(ka) g_{\nu_i n} \quad (25)$$

여기서 $q_i=0$ 일 때 $e_{q_i}=0.5$ 이고 $q_i \neq 0$ 일 때 1이다. 그리고

$$g_{\nu_i(-k)} = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} e^{-jk\phi} \cos \nu_i(\phi - \alpha_i) d\phi$$

$$g_{\nu_i n} = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} e^{jk\phi} \cos \nu_i(\phi - \alpha_i) d\phi$$

이다.

식 (25)를 식 (24)에 대입하여 미지수 B_n 만의 함수를 구할 수 있다.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \{J'_n(ka)\delta_{kn} - J_n(ka)R_{kn}\} B_n = 0 \quad (26)$$

여기서 δ_{kn} 은 Kronecker delta 이고,

$$R_{kn} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \sum_{q_i=0}^{\infty} \frac{2e_{q_i}}{\beta_i - \alpha_i} \frac{G'_{\nu_i}(ka)}{G_{\nu_i}(ka)} g_{\nu_i n} g_{\nu_i(-k)} \quad (27)$$

이다. 도파관 내의 모우드는 다음과 같은 식을 만족해야 한다.

$$\det[J'_n(ka)\delta_{kn} - J_n(ka)R_{kn}] = 0 \quad (28)$$

위 식에서 dominant mode (n=1)에 대해서는 아래와 같이 간단한 식으로 나타낼 수 있다.

$$|J'_1(ka) - J_1(ka)R_{11}| = 0 \quad (29)$$

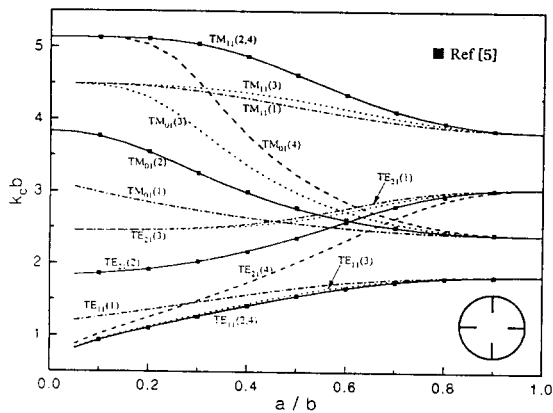
Ⅲ. 수치 해석 결과

먼저, 해의 정확성을 위해서 수렴성을 <표 1>에 제시하였다. 우리의 해와 참고문헌 [3]에서 FEM을 이용하여 구한 double ridge 원형도파관의 차단파수 (cutoff wavenumber) 결과($a/b = 0.5$ 인 경우)를 비교해 보았다. 적은 수의 모우드를 가지고도 충분히 수렴함을 알 수 있다. 그리고 우리의 dominant mode의 근사식이 거의 정확한 해를 제시함을 볼 수 있다. [그림 2] 는 두께가 없는 다중 ridge 원형 도파관 ($i=1 \sim 4$)의 TM 과 TE의 차단

<표 1> 이중 ridge 원형 도파관의 90° 두께를 갖는 ridge의 길이의 변화에 따른 수렴성

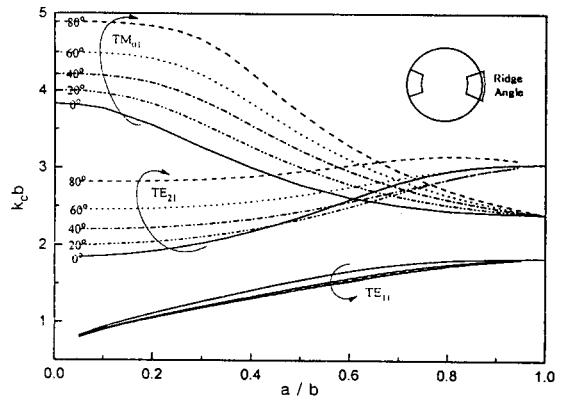
<Table 1> Convergence behavior with changing ridge length(a/b) for double-ridged circular waveguides with 90° ridge angle

matrix size a/b	3×3 식(28)	5×5 식(28)	근사식 식(29)	FEM[3] 100 nodes	FEM[3] extra- polation
0.1	0.913	0.909	0.913		
0.2	1.704	1.067	1.074		
0.3	1.213	1.204	1.213		
0.4	1.344	1.333	1.344		
0.5	1.469	1.456	1.469	1.469	1.456
0.6	1.587	1.573	1.585		
0.7	1.688	1.677	1.685		
0.8	1.765	1.795	1.762		
0.9	1.816	1.814	1.813		



[그림 2] 다중 ridge 원형 도파관의 ridge 길이 (a/b)에 따른 차단 파수(TE_{11} , TE_{21} , TM_{01} , TM_{11}): 그림에서 $TM_{mn}(N)$ 인 경우 N 은 ridge 수임.

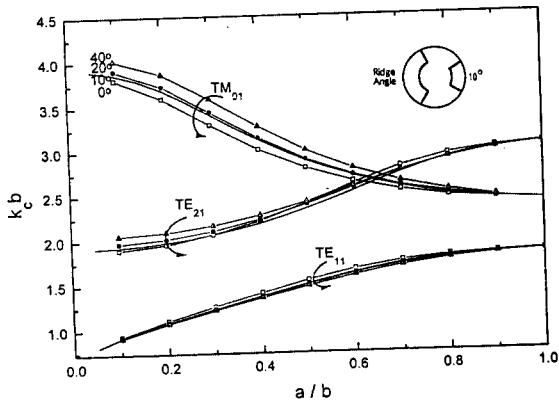
[Fig. 2] Cutoff wavenumbers versus a/b for the multiple-ridged circular waveguides(TE_{11} , TE_{21} , TM_{01} , TM_{11}): In graph, for $TM_{mn}(N)$, N is number of ridge.



[그림 3] Double ridge 원형 도파관의 두께와 길이에 따른 차단 파수

[Fig. 3] Cutoff wavenumbers versus a/b for the double-ridged circular waveguides and for different ridge angle values.

파수 $k_c b$ 를 나타낸다. 그림에서 $a/b \rightarrow 1$ 이 됨에 따라 원형 도파관의 차단 파수와 같아짐을 볼 수 있다. 이는 우리의 해의 타당성을 보여 주고 있다. 그림에서 double ridge 원형 도파관의 경우 참고문헌 [5]의 결과와 비교하였고, 일치함을 볼 수 있다. 그리고, $a/b \rightarrow 0$ 이 됨에 따라 semicircular 도파관의 특성을 나타낸다. 따라서, TM 모우드의 경우 차단 파수가 증가하고 TE 모우드의 경우 차단 파수가 줄어드는 현상이 발생함을 볼 수 있다. [그림 3]은 double ridge 원형 도파관에서 ridge의 두께 변화에 따른 차단 파수의 변화를 살펴 보았다. Ridge의 두께가 증가할 때 dominant mode인 TE_{11} 의 변화는 적고 나머지 상위 모드의 차단 파수가 커짐으로 대역폭이 증가함을 알 수 있다. 여기서, ridged 원형 도파관의 dominant mode인 TE_{11} 는 ridge의 두께보다 길이에 더 큰 영향을 받음을 알 수 있다. [그림 2]와 [그림 3]에서 ridge의 길이의 변화에 따라 첫 번째 두 모우드간의 대역폭이 피크를 가짐을 볼 수 있다. 피크 왼쪽의 첫 번째 두 모우드는 $TE_{11} \sim TE_{21}$ 이고 오른쪽은 $TE_{11} \sim TM_{01}$ 으로 이 두점이 만나는 부근에서 최대의 대역폭을 가짐을 볼 수



[그림 4] Double ridge 원형 도파관의 비대칭에 따른 차단파수
 [Fig. 4] Cutoff wavenumbers versus a/b for asymmetric double-ridged circular waveguides.

있다. [그림 2]에서 최대의 대역폭을 갖는 것은 triple ridge의 경우임을 볼 수 있다. [그림 4]는 비대칭형 double ridge 원형 도파관의 차단파수 $k_c b$ 의 특성을 나타낸다. 대칭형 구조에서처럼 ridge의 두께가 증가함에 따라 대역폭이 증가함을 볼 수 있다.

IV. 결 론

다중 ridge 원형 도파관의 모우드를 모우드 정합법을 이용하여 정확하게 구하였다. 이는 지금까지의 ridge 원형 도파관을 가장 일반화한 형태로 비대칭 구조를 포함한다. 이 해는 수렴성이 뛰어나며 또한 dominant mode에 있어서는 간단한 근사식을 제시하였다.

참 고 문 헌

[1] R. Behe and P. Brachat, "Compact duplexer-polarizer with semicircular waveguide," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*,

vol. 39, pp. 1222-1224, Aug. 1991.
 [2] D. A. Al-Mukhtar and J. E. Sitch, "Transmission-line matrix method with irregularly graded space," *IEE Proc.*, vol. 128 pt. H, no. 6, pp. 299-305 Dec. 1981.
 [3] P. Daly, "Polar Geometry Waveguides by Finite-Element Methods," *IEEE Trans. Microwaves Theory Tech.*, vol. MTT-22, pp. 202-209, March. 1974.
 [4] F. Canatan, "Cutoff wavenumbers of ridged circular waveguides via Ritz-Galerkin approach," *Electronic Lett.*, vol. 25, pp. 1036-1038, Aug. 1989.
 [5] J. L. Tsalamengas, I. O. Vardiambasis, and J. G. Fikioris, "TE and TM modes in circularly shielded slot waveguides," *IEEE Trans. Microwaves Theory Tech.*, vol. MTT-41, pp. 966-973, June /July. 1993.
 [6] B. M. Dillon and A. A. P. Gibson, "Triple-ridged circular waveguides," *J. of Electromag. Waves Applicat.*, vol. 9, pp. 145-156, 1995.
 [7] A. S. Omar, A. Jostingmeier, C. Rieckmann, and S. Lutgert, "Application of GSD technique to the analysis of slot-coupled waveguides," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* vol. 42, pp. 2139-2148, Nov. 1994.
 [8] C. C. Chen, "Quadruple ridge-loaded circular waveguide phase array" *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. AP-22, pp. 481-483, May. 1974.
 [9] W. Sun and C. A. Balanis, "Analysis and design of quadruple-ridged waveguides" *IEEE Trans. Microwaves Theory Tech.* vol. MTT-42, pp. 2201-2207, Dec. 1994.
 [10] A. -M, A. El-Sherbiny, "Cutoff wavenumbers of ridged, circular and elliptic gui-

des," *IEEE Trans. Microwaves Theory Te-*

ch. vol. MTT-21, pp. 7-12, Jan. 1973.

유 중 원



1970년 3월 2일 생
1992년 2월 : 한국과학기술대학 전자
공학과(공학사)
1994년 2월 : 한국과학기술원 전기
및 전자공학과(공학석사)
1994년 3월 ~ 현재 : 한국과학기술

원 전기 및 전자공학과 박사과정

[주 관심분야] 전자파 산란해석, 마이크로파 회로 설계, 이동
통신 등

명 노 훈



1976년 2월 : 서울대학교 전기공학
과 졸업(공학사)
1982년 12월 : Ohio State Univ.
전기공학과(석사)
1986년 8월 : Ohio State Univ.
전기공학과(박사)

1986년 9월 ~ 현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과
교수

[주 관심분야] 전파전파 및 산란해석, 마이크로파 공학, 이
동 및 위성통신, EMI /EMC /EMS 등임.