

## 자동차 충돌해석용 프로그램 개발(I)

### Development of Finite Element Program for Automobile Crashworthiness(I)

강 신 유, 김 현 영  
S. Y. Kang, H. Y. Kim



강 신 유  
· 1959년 6월생  
· 정회원  
· 기계설계 및 자동차 충돌해석



김 현 영  
· 1962년 2월생  
· 정회원  
· 강원대학교  
· 비선형구조해석 및 금형설계

- 셀 요소 정식화
- 셀 요소 hourglass 제어
- 접촉 알고리즘 정식화
- 6면체 요소 정식화
- 6면체 요소 hourglass 제어
- 비선형 스프링 요소 개발 및 정식화
- 초탄성 고무재료 개발
- xy 그래프 출력용 포스트 프로그램 개발

#### 1. 연구목표 및 내용

독자적인 자동차 충돌해석용 프로그램 개발 및 응용기술을 목표로 본 연구의 1단계 1차년도에서는 프로그램의 기본 모듈을 구성하기 위해 연구과제를 수행하여 완성하였으며, 2차년도 연구에서는 약 10,000개 요소의 자동차 해석 모델에 대한 충돌해석을 수행할 수 있는 정도로 프로그램 완성도를 높이기 위하여 다음과 같은 연구를 수행하고 완성하였다.

- explicit 유한요소 수식화

#### 2. Explicit 유한요소 정식화

##### 2.1 유한요소 수식화

비선형 유한요소 운동 방정식은 가상일의 원리로 부터 얻어진다. 프로세스중에 발생하는 내부응력, 접촉력, 관성력, 감쇄력, 외부 힘과 경계 조건을 모두 포함하는 평형 방정식의 약형은 다음과 같이 표현된다.

$$\int_B S \delta E dv + \int_B \rho_c \ddot{x}_i \delta u dv - \int_B \rho_c b \delta u dv - \int_{A_n} F_o \delta u dA + \sum_{i=1}^I \int_{A_i} \frac{(P_c^i \delta g_n^i + \tau_c \delta g_T^i)}{contact + friction} dA = 0 \quad (1)$$

식(1) 좌변은 순서에 따라 내부일, 관성력에 의한 일, 중력에 의한 일 및 응력 경계 조건을 나타 낸다. 위식을 유한요소화할 경우 내부일 항에 요소의 종류에 따른 재료 거동 모델과 운동학적 모델이 포함된다.

셸(shell)모델, 재료 거동 모델, 유한요소 형상함수와 강체요소의 동역학을 가상일의 원리에 도입하면 다음과 같은 비선형 유한요소 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{n=1}^{ne} (m^e \ddot{v}^e + c^e m^e \dot{v}^e + p^e - f^e + r_c^e) = 0 \quad (2)$$

여기서,

$ne$  : number of elements

$$m^e = \int_{V^e} \rho_0 N^T N dV :$$

consistent mass matrix

$$c^e m^e = c^e \int_{V^e} \rho_0 N^T N dV :$$

mass proportional damping matrix

$$p^e = \int_{V^e} B^T \sigma dV : \text{internal force vector}$$

$$f^e = \int_{V^e} \rho_0 N^T b dV + \int_{A^e} N^T t_0 dA :$$

body force + surface loading

$r_c^e$  : contribution of contact forces

## 2.2 Explicit 시간 적분

비선형 유한요소 방정식은 시간  $n$  단계에서 다음과 같은 행렬식으로 쓸 수 있다.

$$[M]\{\ddot{v}_n\} + [C]\{\dot{v}_n\} + \{P_n\} - \{F_n\} + \{R_m\} = 0 \quad (3)$$

위식으로부터 시간 증분  $n+1$ 에서의 해

를 얻기 위해 다음과 같은 central difference 방법을 사용한다.

$$\ddot{v}_n = \frac{\dot{v}_{n+\frac{1}{2}} - \dot{v}_{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}}{\Delta t^2} \quad (4)$$

$$\ddot{v}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\dot{v}_{n+1} - v_n}{\Delta t} \text{ or } \dot{v}_n = \frac{\dot{v}_{n+1} - v_{n-1}}{2\Delta t}$$

(4)식은  $v_{n+1}$ 과  $v_{n-1}$ 에 대한 Taylor series로부터 유도된다.

$$v_{n+1} = v_n + \Delta t \dot{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{v}_n + \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{v}_n + \dots \quad (5)$$

$$v_{n-1} = v_n + \Delta t \dot{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{v}_n - \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{v}_n + \dots$$

이 때 3차이상의 항을 무시한다. 그러므로 오차는  $O(\Delta t^2)$ 이며, 시간증분을 1/2로 하면 오차는 1/4이 된다. 즉, Central difference 방법은  $\Delta t$ 의 크기에 따라 선택적인 수렴성을 가지며, 정확성과 수렴성은  $\Delta t$ 의 제곱에 비례한다.

## 2.3 시간 증분

시간 증분  $n+1$ 에서의 절점 변위가 구해지면 변형영역을 수정(update)하고 그에 따라 수렴성이 보장되는 새로운 시간 증분의 크기를 결정해야 한다. 전체적인 시간 증분의 크기는 모든 요소에 대해 각각의 시간 증분 크기를 계산한 후 다음과 같은 식에 의해 결정한다.

$$\Delta t_{n+1} = \alpha \text{ Min}\{\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_N\} \quad (6)$$

위식에서  $N$ 은 총 요소 수이며  $\Delta t_i$ 는  $i$ 요

소에 대한 시간 증분의 크기를 나타낸다.  $\alpha$  는 안정성을 위한 상수로 통상 0.9 이하의 값을 선택한다. 쉘 요소의 시간 증분 크기는 다음과 같은 식으로 결정한다.

$$\Delta t_c = L_c / C = \sqrt{\frac{\rho L_c^2}{E}} \quad (7)$$

위식에서  $L_c$ 는 요소의 면적을 최대변의 길이로 나눈 특성 길이(characteristic length)이며,  $C$ 는 소재내에서의 음속이다.

### 2.4 쉘 요소 정식화

Belytschko-Tsay 쉘 요소는 비선형 수치계산의 효율성을 위하여 Hughes-Liu 쉘 요소의 대안으로 개발되었으며, 그런 효율성 때문에 쉘 요소 정식화에 널리 사용된다.[1] 이것은 요소좌표계(element or co-rotational coordinate system)와 Cauchy 응력에 대응되는 속도 변형률(velocity strain, rate of deformation)을 기본으로 정식화된 것이다. 사각형 요소의 기준면은 4개 절점의 위치에 의하여 정의되며, 요소의 변형에 따라 함께 변하는 요소좌표계는 그 절점 좌표값들로 표현된다. Fig.1의 요소좌표계를 구성하는 절차는 먼저, 사각형 요소의 두 대각선 벡터로부터 단위 법선 벡터를 계산하고, 요소 좌표계의

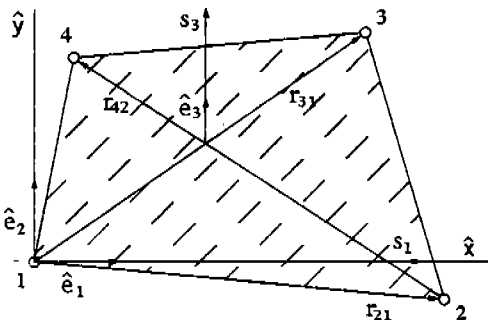


Fig.1 Co-rotational coordinate system of Belytschko-Tsay shell.

$x$ 축은 절점 1과 2 사이의 변에 가깝도록 결정한후, 나머지 단위 벡터는 앞에서 얻은 두 벡터의 곱으로 구해진다.

$$\begin{aligned} \hat{e}_3 &= s_3 / |s_3| \\ s_3 &= \gamma_{31} \times \gamma_{42} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} |s_3| &= \sqrt{(s_{31}^2 + s_{32}^2 + s_{33}^2)} \\ \hat{e}_1 &= s_1 / |s_1| \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} s_1 &= \gamma_{21} - (\gamma_{21} \cdot \hat{e}_3) \hat{e}_3 \\ \hat{e}_2 &= \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 \end{aligned} \quad (10)$$

윗 식에서 윗 첨자  $\hat{\phantom{x}}$ 는 요소 좌표계임을 의미한다. Belytschko-Tsay 쉘 사용에서 유의할 점은 요소 두께 방향의 재료의 회전과 요소좌표계의  $e_3$  벡터의 회전 사이의 차이가 작아야 적용성이 보장된다는 것이다. 이는 out-of-plane 변형, 즉 변형률에 대한 규제이며, 강제회전을 규제하는 것이 아니다.

$$|e_3 \cdot f - 1| < \delta \quad (11)$$

$f$ 는 쉘 두께 방향의 단위 벡터이다. 대개의 응용에서  $\delta$ 가  $10^{-2}$  이하의 값을 갖는 것이 적합하다. 쉘에 대한 Mindlin 이론으로부터 쉘 요소내의 어떤 점에서의 속도는 다음과 같이 표현된다.

$$v = v^m - z e^3 \times \theta \quad (12)$$

위식에서  $v^m$ 은 기준면의 속도,  $\theta$ 는 각속도 벡터,  $z$ 는 쉘 요소의 두께 방향을 따른 좌표값이다. 속도 변형률의 요소좌표계 성분은 다음과 같다.

$$\widehat{d}_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widehat{v}_j}{\partial x_i} \right] \quad (13)$$

기준면 속도와 각속도를 bilinear 선형 함수를 사용하여 절점 속도와 절점 각속도로 나타내면 (12)식과 (13)식으로부터 속도변형률이 절점 속도와 절점 각속도로 표현된다. 또한, 속도 변형률을 구성식에 대입하여 응력식을 얻고, 이것을 셀 두께 방향으로 적분하면 합력과 합모멘트를 얻는다.

$$\widehat{f}_{a\beta} = \int \widehat{\sigma}_{a\beta} d\widehat{z} \quad (14)$$

$$\widehat{m}_{a\beta} = \int \widehat{z} \widehat{\sigma}_{a\beta} d\widehat{z}$$

### 2.5 8절점 6면체 요소 정식화

Fig.2과 같은 8절점 6면체 요소를 사용하여 임의의 형상의 물체를 분할하는 경우,

$$X_i(a_\alpha, t) = X[a_\alpha(\xi, \eta, \zeta), t] = \sum_{j=1}^8 \phi_j(\xi, \eta, \zeta) X_j(t) \quad (15)$$

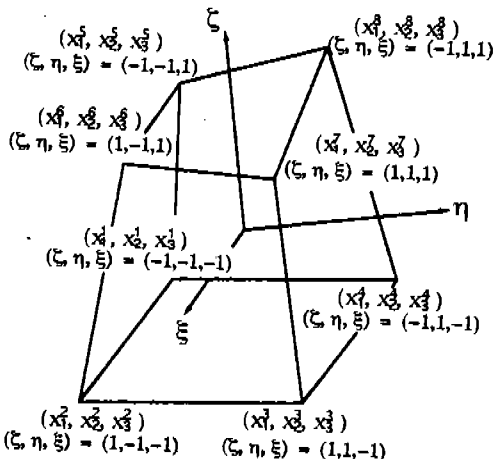


Fig.2 Eight node solid hexahedron element.

의 관계가 성립하며, 형상함수  $\phi$ 는 8절점 6면체에 대하여 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_j = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_j) (1 + \eta \eta_j) (1 + \zeta \zeta_j) \quad (16)$$

여기서  $\xi, \eta, \zeta$ 는  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ 에서의 절점값을 취하며,  $X_i$ 는  $j$ 번째 절점의  $i$  방향의 절점 좌표이다. 식(2)의 가상일 원리식은 다음의 행렬식으로 기술된다.

$$\sum_{m=1}^N \left[ \int_{v_m} \rho N^t N dV a + \int_{v_m} B^t \sigma dV - \int_{v_m} \rho N^t b dV - \int_{\partial v_m} N^t t dS \right]^m = 0 \quad (17)$$

이다. 여기서,  $N$ 은  $3 \times 24$ 의 형상 행렬,  $\sigma$ 는 응력 벡터,  $B$ 는  $6 \times 24$ 의 변형률-변위행렬,  $a$ 는 절점 가속도 벡터이다.

대각 질량 행렬(diagonal mass matrix)를 구하기 위하여,  $k$ 번째 대각항은 형상 함수의 합이 1이 됨을 상기하면

$$m_{kk} = \int_v \rho \phi_k \sum_{i=1}^8 \phi_i dV = \int_v \rho \phi_k dV \quad (18)$$

로 된다.

변형률-변위 행렬식은

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta}$$

다음의 형태로 재기술할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (20)$$

결국 Jacobian 행렬,  $J$ 를 역변환시키면

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (21)$$

과 같다.

### 3. 셀요소에 대한 Hourglass 제어

#### 3.1 Hourglass 제어

요소의 변형을 한 점에서 평가하면 계산 시간의 단축과 전단 잠금(shear locking) 문제를 해결하는 등의 장점이 있으나 그로 인해 요소가 어떤 형상으로 변형되는데 필요한 에너지가 '0'이 되는 변형모드가 발생할 수 있다. 이러한 모드를 기하학적 모드(kinematic mode) 혹은 '0' 에너지 모드, Key-stoning, hourglass 모드라 하며 1점 적분을 하는 경우에는 이에 대한 제어가 필수적이다. 일반적으로 제거해야할 hourglass 모드는 구조물의 응답보다 짧은 주기를 가지며, 통상 진동한다. 한편 구조물의 응답에 가까운 주기를 갖는 hourglass는 안정된 전체 변형 모드로 받아들여져야 한다. 원치않는 hourglass 모드로의 변형을 제어하는 방법으로는 점성

감쇠(viscous damping)에 의한 것과 탄성 강성(elastic stiffness)에 의한 것이 있다. 이러한 방법에 의해 원치 않는 hourglass 모드의 생성을 막을수 있는데, 이것이 전체 변형에 주는 효과는 무시할 만큼 작아야 한다. 셀 요소에서도 hourglass 제어가 필요한데, Belytschko-Tsay 셀의 경우 요소 수준의 계산시에 hourglass 응력을 물리적인 응력에 더해주는 방법이 쓰인다.<sup>1)</sup>

셀 요소의 형상함수는 변형양상에 따라 다음과 같이 몇개의 기준벡타의 조합으로 나타낼 수 있다.<sup>2)</sup>

$$\phi_i = \frac{1}{4} \Sigma_i + \frac{1}{2} \xi \Lambda_{1i} + \frac{1}{2} \eta \Lambda_{2i} + \xi \eta \Gamma_i \quad (22)$$

( $I = 1, 2, 3, 4$  : number of nodes)

위의  $\phi_i$ 는 4절점 셀요소의 형상함수(shape function)이며,  $\Sigma_i$ ,  $\Lambda_{1i}$ ,  $\Lambda_{2i}$ ,  $\Gamma_i$ 는 단위 사 변형의 변형모드(displacement modes)를 나타낸다.(Fig.3)  $\Sigma_i$ 는 강체 운동(rigid body translation)을 나타내며,  $\Lambda_{1i}$ 는 균일 수직변형률 모드(uniform normal strain mode)를,

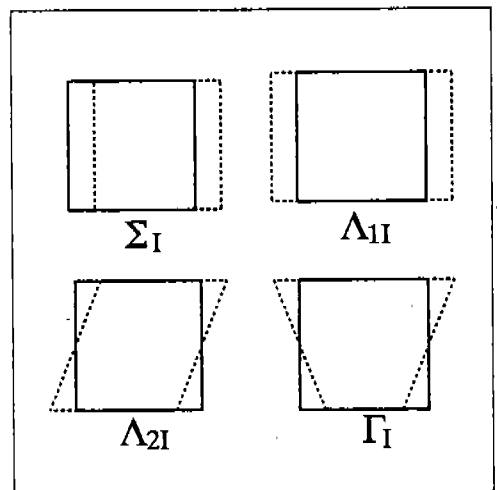


Fig.3 Displacement modes of quadrilateral.

$\Lambda_2$ 는 균일 전단 변형률 모드(uniform shear strain mode)를,  $\Gamma_1$ 는 Hourglass 모드를 나타낸다. Table 1은 4절점 셀요소에 대한 기준 벡터를 나타낸다. 계의 Hourglass 속도  $v_{ij}^{HG}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$v_{ij}^{HG} = v_{ij} - v_{ij}^{LIN} \quad (23)$$

이때  $v_{ij}^{HG}$ 와  $\Sigma_i v_{ij}^{HG}$ 와  $B_{ij}$ 는 서로 직교하며,  $v_{ij}^{HG}$ 는  $\Gamma_1$ 의 선형조합으로 이루어진다.<sup>2)</sup>

$$\Sigma_i v_{ij}^{HG} = 0 \quad (24)$$

$$B_{ij} v_{ij}^{HG} = 0 \quad (25)$$

$$\widehat{v}_{ij}^{HG} = \dot{q}_i \Gamma_j \quad (26)$$

$\dot{q}$ 는 hourglass 모드 속도(hourglass generalized strain rate)로서, 다음과 같이 가정한다.

$$\dot{q}_i = \gamma \widehat{v}_{ib} \quad \begin{aligned} \dot{q}_a^B &= \gamma \widehat{\theta}_{a1} \\ \dot{q}_3^B &= \gamma \widehat{v}_{z1} \\ \dot{q}_a^M &= \gamma \widehat{v}_{a1} \end{aligned} \quad (27)$$

여기서  $B$ 는 굽힘,  $M$ 은 평면을 나타내는 첨자이며,  $\gamma$ 는 hourglass 형상벡터(shape vector)이다.

$$\gamma_j = \Gamma_j - \frac{1}{A} B_{ij} \widehat{x}_{ij} \Gamma_j \quad (28)$$

Table 1 Quadrilateral base vectors

Node	$\xi$	$\eta$	$\Sigma_i$	$\Lambda_{1i}$	$\Lambda_{2i}$	$\Gamma_i$
1	-1/2	-1/2	1	-1	-1	1
2	1/2	-1/2	1	1	-1	-1
3	1/2	1/2	1	1	1	1
4	-1/2	1/2	1	-1	1	-1

Hourglass 모드 속도  $\dot{q}$ 에 대응하는 hourglass 응력  $Q_i$ 는 점성과 탄성의 2가지 형태가 가능하며, 이를 구조물의 물리적 응력에 부가하여 hourglass 모드를 제어한다.

$$Q_i = \epsilon C_{cr} \dot{q}_{ia} + \kappa K_{max} q_{ia} \quad (29)$$

여기서  $C_{cr}$ 은 계의 임계 감쇠(critical damping)이며,  $K_{max}$ 는 계의 최대 강성을 나타내며,  $\epsilon$ 과  $\kappa$ 는 각각 감쇠와 강성에 대한 상수 값이다. 점성형과 탄성형의 hourglass 응력은 각각 다음과 같다. 대변형 문제의 경우 탄성형은 응력속도를 계산한 후, 다음단계의 hourglass 응력을 계산한다.

Viscous	$Q_a^B = C_1 \dot{q}_a^B, \quad C_1 = \frac{1}{2} \epsilon \rho c \sqrt{A} t^2$ $Q_3^B = C_2 \dot{q}_3^B, \quad C_2 = \epsilon \rho c \sqrt{A} t$ $Q_a^M = C_3 \dot{q}_a^M, \quad C_3 = \epsilon \rho c \sqrt{A} t,$ $c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ ; sound speed
Stiffness	$\dot{Q}_a^B = C_1 \dot{q}_a^B,$ $C_1 = \frac{1}{192} \kappa (Et^3 A) B_{a1} B_{a1}$ $\dot{Q}_3^B = C_2 \dot{q}_3^B,$ $C_2 = \frac{1}{12} \kappa (Gt^3) B_a B_{a1}$ $Q_a^M = C_3 \dot{q}_a^M$ $C_3 = \frac{1}{8} \kappa (Et A) B_{a1} B_{a1}$
	$Q^{n+1} = Q^n + \Delta t \dot{Q}$

Hourglass 모드를 제어할 목적으로  $\widehat{f}^{HG}$  를 도입하면,  $Q_i$ 와 이를 대응하는  $\widehat{q}_i$ 는 다음의 관계를 만족한다.

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{ij}^{HG} \widehat{v}_{ij} &= Q_i \widehat{q}_i \\ &= \widehat{v}_{ij} Q_i \gamma_i \end{aligned} \quad (31)$$

그러므로 hourglass 응력에 대응하는 절점력은

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{ij}^{HG} &= Q_i \gamma_i, & \widehat{m}_{ai}^H &= \gamma_i Q_a^B \\ & & \widehat{f}_{zi}^H &= \gamma_i Q_3^B \\ & & \widehat{f}_{ai}^H &= \gamma_i Q_a^M \end{aligned} \quad (32)$$

위식으로 주어지는 hourglass 절점력이 변형에 의한 절점력에 각각 더해진다.

### 3.2 S형 프레임 충돌해석과 Hourglass 제어

S형 프레임 모델은 단면의 상하 대칭성을 이용하여 한쪽 부재의 1/2만 모델링하였으며, 사용된 요소수는 440개, 절점수는 492개이다.(Fig.4) 10mm/ms의 속도로 강체벽에 충돌하여 30ms까지 해석을 수행하였다. Fig.5은 시간에 따른 프레임의 변형양상을 나타낸 것으로 t=20ms와 30ms에서 보이듯이 불안정한 변형모드가 급격히 발전됨을 알 수 있다. Fig.6은 점성제어와 탄성제어에 의한 시간 20ms에서의 프레임의 변형을 보인 것이다. 점성 제어의 경우,  $\epsilon=0.001$ 일 때 hourglass 모드가 프레임 전반에 발생하였으

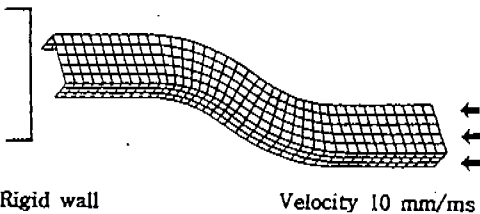


Fig.4 Finite element model of S type frame

며,  $\epsilon=0.01$ 일 때는 불안정한 모드가 시작됨을 알 수 있다. 즉, 점성제어는 단지 불안정한 변형모드를 늦게 발생하도록 할 뿐이지 변형을 근본적으로 안정되게 할 수는 없다. Fig.6에서  $k=0.001$ 의 탄성제어의 경우 점성제어와 비교할 때 안정된 반응을 보이며, 작은 계수를 사용하더라도 계를 안정되게 할 수 있다.

### 4. 6면체 요소에 대한 Hourglass 제어

#### 4.1 6면체 요소에 대한 hourglass 모드 제어

6면체 요소의 형상함수는 변형양상에 따라 다음과 같이 몇개의 기준벡터의 조합으로 나타낼 수 있다.

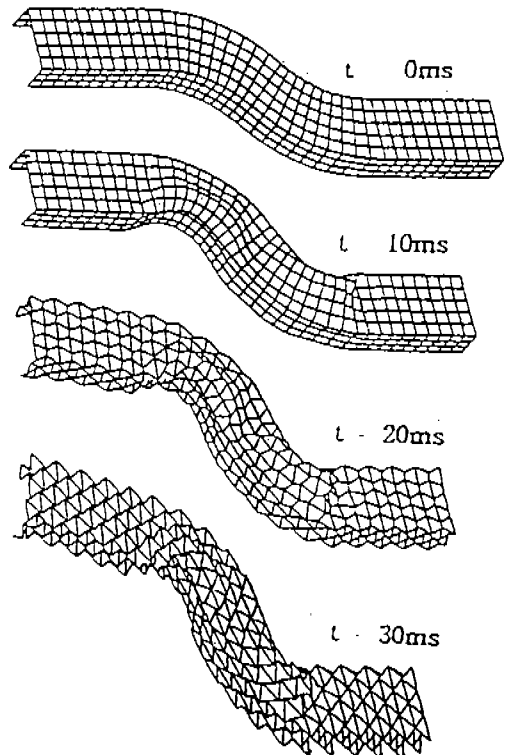


Fig.5 Deformed meshes without anti-hourglassing

$$\Phi_I = \frac{1}{8} \Sigma_I + \frac{1}{4} \xi \Lambda_{1I} + \frac{1}{4} \eta \Lambda_{2I} + \frac{1}{4} \zeta \Lambda_{3I} + \frac{1}{2} \eta \zeta \Gamma_{1I} + \frac{1}{2} \zeta \xi \Gamma_{2I} + \frac{1}{2} \xi \eta \Gamma_{3I} + \xi \eta \zeta \Gamma_{4I} \quad (33)$$

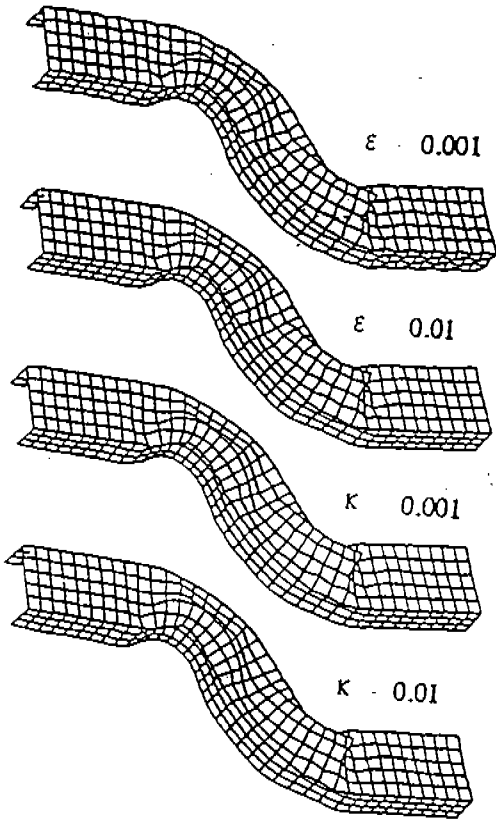


Fig.6 Deformed meshes without various anti-hourglassing

위의  $\Phi_I$ 는 8절점 6면체 요소의 형상함수 (shape function)이며,  $\Sigma_I$ ,  $\Lambda_{1I}$ ,  $\Lambda_{2I}$ ,  $\Lambda_{3I}$ 는 단위 입방체의 변형모드(displacement modes)를 나타낸다.(Fig.7)  $\Sigma_I$ 는 강체 운동(rigid body translation)을 나타내며,  $\Lambda_{1I}$ 는 균일 수직변형률 모드(uniform normal strain mode)를,  $\Lambda_{2I}$ 는 균일 전단 변형률 모드(uniform shear strain mode)를,  $\Lambda_{3I}$ 는 강체회전 모드(rigid body rotation mode)를 나타내며, 4개의  $\Gamma_{aI}$ 는 단위 입방체의 Hourglass 모드를 나타낸다.

Table 3은 8절점 6면체 요소에 대한 기준

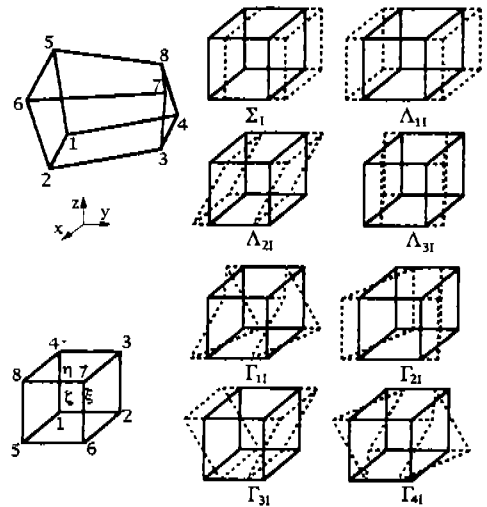


Fig.7 Displacement modes of 8 node solid element

Table 3 base vectors of 8-node solid element

Node	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	$\Sigma_I$	$\Lambda_{1I}$	$\Lambda_{2I}$	$\Lambda_{3I}$	$\Gamma_{1I}$	$\Gamma_{2I}$	$\Gamma_{3I}$	$\Gamma_{4I}$
1	-1/2	-1/2	-1/2	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
2	1/2	-1/2	-1/2	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
3	1/2	1/2	-1/2	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
4	-1/2	1/2	-1/2	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
5	-1/2	-1/2	1/2	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1
6	1/2	-1/2	1/2	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
7	1/2	1/2	1/2	1	1	1	1	1	1	1	1
8	-1/2	1/2	1/2	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1



벡터를 나타낸다.

(1) Flanagan-Belytschko hourglass 제어

계의 Hourglass 속도  $v_{ij}^{HG}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$v_{ij}^{HG} = v_{ij} - v_{ij}^{LIN} \quad (34)$$

이때  $v_{ij}^{HG}$ 와  $\Sigma_i$ ,  $v_{ij}^{HG}$ 와  $B_{ij}$ 는 서로 직교하며,  $v_{ij}^{HG}$ 는  $\Gamma_{ai}$ 의 선형조합으로 이루어진다.<sup>2)</sup>

$$\Sigma_i v_{ij}^{HG} = 0 \quad (35)$$

$$B_{ij} v_{ij}^{HG} = 0 \quad (36)$$

$$A_{ij} v_{ij}^{HG} = 0 \quad (37)$$

$$\tilde{v}_{ij}^{HG} = \frac{1}{\sqrt{8}} \dot{q}_{ia} \Gamma_{ai} \quad (38)$$

$\dot{q}_{ia}$ 는 hourglass모드 속도(hourglass generalized strain rate)로서, 다음과 같이 가정한다.

$$\dot{q}_{ia} = \frac{1}{\sqrt{8}} \tilde{v}_{ij} \gamma_{ai} \quad (39)$$

여기서  $\gamma_{ai}$ 는 hourglass 형상벡터(shape vector)이다.

$$\gamma_{ai} = \Gamma_{ai} - \frac{1}{V} B_{ij} \tilde{x}_{ij} \Gamma_{aj} \quad (40)$$

Hourglass 모드 속도  $\dot{q}_i$ 에 대응하는 hourglass 응력  $Q_i$ 는 점성과 탄성의 2가지 형태가 가능하며, 이를 구조물의 물리적 응력에 부가하여 hourglass 모드를 제어한다.

$$Q_i = 2\epsilon\omega_{\max} \left( \frac{\rho V}{8} \right) \dot{q}_{ia} + \kappa K_{\max} q_{ia} \quad (41)$$

여기서  $K_{\max}$ 는 계의 최대 강성을 나타내며,  $\epsilon$ 와  $\kappa$ 는 각각 감쇠와 강성에 대한 상수 값이다. 대변형 문제의 경우 탄성형은 응력 속도를 계산한 후, 다음단계의 hourglass 응력을 계산한다.

Hourglass 모드를 제어할 목적으로  $\tilde{f}_{ij}^{HG}$ 를 도입하면,  $Q_{ia}$ 와 이에 대응하는  $q_{ia}$ 는 다음의 관계를 만족한다.

$$\tilde{f}_{ij}^{HG} \cdot \tilde{v}_{ij} = Q_{ia} \dot{q}_{ia} = \frac{1}{\sqrt{8}} \tilde{v}_{ij} Q_{ia} \gamma_{ai} \quad (42)$$

그러므로 hourglass 응력에 대응하는 절점력은

$$\tilde{f}_{ij}^{HG} = \frac{1}{\sqrt{8}} Q_{ia} \gamma_{ai} \quad (43)$$

위식으로 주어지는 hourglass 절점력이 변형에 의한 절점력에 각각 더해진다.

(2) Standard hourglass 제어

Standard 형은 F-B의 hourglass형상함수  $\gamma_{ai}$  대신에 hourglass 기준벡터  $\Gamma_{ai}$ 를 사용한다. 일반적인 입방체에 대하여  $\Gamma_{ai}$ 는  $B_{ij}$ 에 직교하며,  $\gamma_{ai}$ 는  $v_{ij}^{LIN}$ 에 직교한다.

$\Gamma_{ai}$ 는 hourglass 경향만을 정의하기 때문에 좀 더 정확하게 모드를 추적하기 위하여는  $\gamma_{ai}$ 를 사용하는 것이 필요하다.

## 4.2 U형 고무부품의 압축시험

Fig.8은 U형 고무재료의 압축시험 조건과 해석에 사용된 유한요소모델이다. 고속충격 해석이나 고무, 폼 재료등에 대한 수치해석 시 시간증분계수가 0.9인 경우에는 불안정

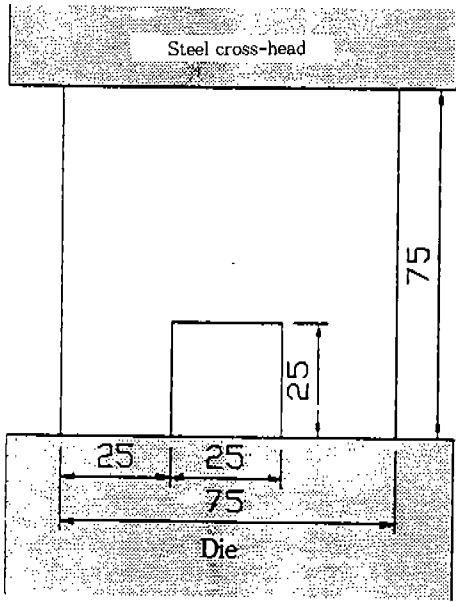


Fig.8 Test setup and finite element model of U shape rubber compression

변형모드가 초기에 급격히 발생하므로 시간 증분계수는 0.6이하의 값이 적당하다. Fig.9는 시간증분계수 0.5, 속도 3m/s 압축시 hourglass 제어에 따른 변형양상을 나타낸 것이다. 해석 결과로부터 점성제어 보다 탄성제어가 더 효과적임을 알 수 있다.

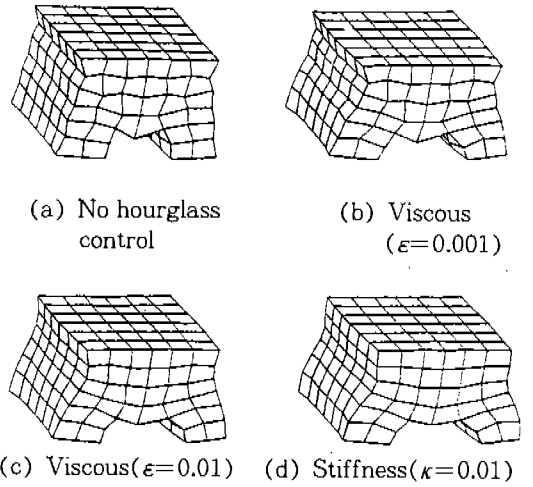


Fig.9 Deformed shapes of various hourglass control

## 5. 고무재료의 초탄성 모델의 개발

### 5.1 고무재료의 초탄성 거동

고무 재료는 우수한 탄성 복원 특성과 진동 감쇄 특성으로 인해 자동차의 여러가지 시스템의 주요 부품에 이용되어 왔다. 이러한 고무부품 설계는 대부분 시행 착오에 의한 경험적 수법이나 실험에 의존하여 왔으나, 최근 컴퓨터의 대형화, 고속화에 따라 비선형 유한요소법을 이용하여 고무 재료의 거동을 해석하는 것이 실용화됨에 따라 고무 부품의 설계를 체계화해 갈 수 있게 되었다. 고무는 역학적으로 비선형 탄성 대변형 거동을 보이며, 고무 소재 부품의 작동이 대개 대변형을 일으키는 범위에 속한다. 따라서 고무 부품의 변형해석을 위해서는 유한 탄성론에 기인한 고무의 비선형 특성 모델화와 대변형 이론에 의한 구성식이 필요하다. 이러한 고무의 역학적 성질은 초탄성(hyperelasticity) 및 점탄성(viscoelasticity) 이론으로 나타낼 수 있으며, 각각 비선형 탄성 해석 및 시간 의존성을 고려한 동해석에 사용된다.

대변형(약 변형률 500%)에 대하여 탄성 반응을 나타내는 고무와 같은 재료의 거동을 기술하는데 초탄성 모델이 사용된다. 일반 탄성론에서는 물체에 하중이 가해져 변형이 발생한 후, 제하(unloading)시키면 원래 상태로 되돌아 오는 성질을 탄성이라 하며, 하중과 변형과의 관계는 선형(linear)으로 가정한다. 그러나 고무와 같은 재료는 하중과 변형이 비선형 관계를 보이는 범위에 대하여도 탄성 거동을 나타낸다.

유한변형(finite deformation) 혹은 대변형의 탄성 거동에 대하여, 단위 체적당 변형률 에너지 포텐셜(strain energy potential)  $U$ 의 변화율이 응력에 의한 일률과 같다는 개념을 이용하여, 고무와 같은 초탄성체의 거동을 기술할 수 있다.

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \quad (44)$$

여기서,  $S_{ij}$ 는 second Piola-Kirchhoff 응력 텐서(tensor)이며,  $E_{ij}$ 는 Green-Lagrange 변형률 텐서이다.

## 5.2 초탄성 재료의 구성식

거의 비압축성인 고무재료의 변형을 기술하기 위하여 변형률에너지  $W$ 를 변형률 불변 계수  $I_1, I_2, I_3$ 의 함수로 표현한다.<sup>3)</sup>

$$W(I_1, I_2, I_3) = \widehat{W}(\widehat{I}_1, \widehat{I}_2) + xF(I_3) \quad (45)$$

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$I_2 = \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \quad (46)$$

$$I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

또한,

$$\widehat{I}_1 = I_1 - (I_3 - 1) \quad (47)$$

$$\widehat{I}_2 = I_2 - 2(I_3 - 1)$$

거의 비압축성인 재료에 대해  $x$ 는 매우 큰 값이므로  $F(I_3)$ 의 형태는 큰 효과를 미치지 않는다. 따라서 간편하게 다음 형태를 취한다.

$$F = \frac{1}{2}(I_3 - 1)^2 \quad (48)$$

위식에서

$$\frac{dF}{dI_3} = I_3 - 1, \quad F(1) = \frac{dF(1)}{dI_3} = 0 \quad (49)$$

$$\frac{d^3F}{dI_3^3} = 1 \quad (50)$$

2nd Piola-Kirchhoff stress  $S_{ij}$ 는,

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \quad (51)$$

$$C = 2E + 1 \quad (52)$$

위식에서

$C = F^T F$  : Right Cauchy-Green Tensor,

$F$  : Deformation Gradient

$E$  : Green-Lagrange Strain

식(51)로 부터 nearly incompressible 재료의 구성식은 다음과 같다.

$$S_{ij} = 2(\delta_{ij} - I_3 C_{ij}^{-1}) \frac{\partial \widehat{W}}{\partial I_1}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2(I_1 \delta_{ij} - C_{ij} - 2I_3 C_{ij}^{-1}) \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_2} \quad (53) \\
 &+ 2x I_3 C_{ij}^{-1} (I_3 - 1)
 \end{aligned}$$

5.3 초탄성 재료 모델의 응력-변형률 관계

비압축성 부분의  $\bar{W}$ 의 형태는 다음의 2가지 재료모델을 사용한다.

Mooney-Rivlin 모델<sup>4)</sup>

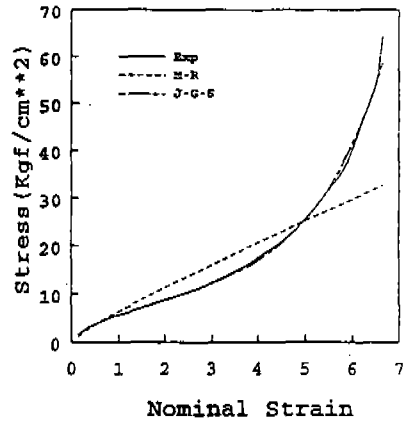
$$\bar{W} = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) \quad (54)$$

James-Green-Simpson 모델<sup>5,6)</sup>

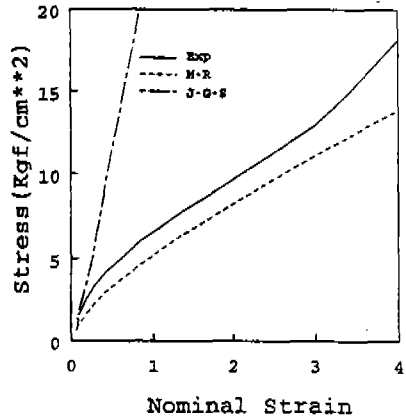
$$\begin{aligned}
 \bar{W} = &C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 \\
 &+ C_{30}(\bar{I}_1 - 3)^3 + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) \\
 &+ C_{02}(\bar{I}_2 - 3)^2 \quad (55)
 \end{aligned}$$

5.4 재료 실험과 검증해석

식(54), (55)에서 재료에 대한 변형률 에너지 포텐셜은 신장률  $\lambda$ 로 정의되는 불변 계수  $I_1, I_2$ 와 계수  $C_{ij}$ 로 나타나며, 재료의 특성은  $C_{ij}$ 를 결정함으로써 알 수 있다. 이들 계수는 단순한 변형을 포함하는 실험-1축 인장실험, 평면 실험, 2축 인장 실험 등-에 의하여 결정한다. Fig.10은 1축 인장시험 데이터로부터 재료특성을 구한 다음, 각각 1축 인장과 전단시험 해석에 적용하여 실험과 비교한 결과이다. 해석과 실험에 상당한 차이가 보임을 알 수 있다. Fig.11은 3가지 종류의 시험 데이터를 이용하여 재료의 특성을 구한 다음 이를 각각 2가지 문제에 적용한 결과이다. Mooney-Rivlin 모델의 인장 및 전단시험결과와 상당한 차이를 보이나, James-Green-Simpson 모델의 경우 실험과 거의 일치된 결과를 나타낸다. 그러므로 3가지 시험들중 어느 하나의 실험으로 계수들을 충분히 결정할 수 있으나, 실제 적용시 관심



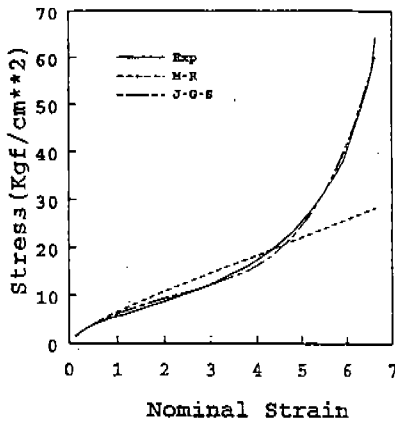
(a) Uniaxial tension test



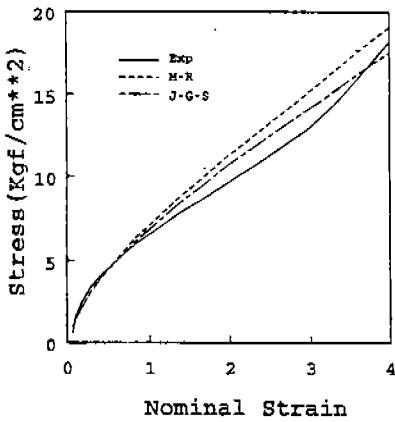
(b) Planar test

Fig.10 Stress-strain curves by using uniaxial tension test data

있는 변형률 범위에 대하여 여러가지 변형 양상을 포함할 수 있도록 2가지 이상의 실험으로부터 데이터를 얻는 것이 바람직하다. Fig.12는 실린더 형상의 고무 압축시험과 유한요소모델이다. 서로 강성이 다른 2재료 사이의 접촉문제의 경우 접촉 계수의 선택이 매우 중요하다. 개발된 프로그램을 이용하여 2가지 접촉계수에 대한 변형양상을 비교하였다. Fig.13은 접촉계수 0.1와 1.0의 2가지 경우에 대한 압축시 변형 양상을 나타낸다.



(a) Uniaxial tension test



(b) Planar test

Fig.11 Stress-strain curves by using 3 test data(uniaxial, biaxial, planar)

접촉계수 0.1의 경우 고무재료가 다이를 침범하였음을 알 수 있다.

## 6. 비선형 스프링 요소 정식화

### 6.1 비선형 스프링 요소 정식화

스프링요소에서의 변형변위(deformation displacement)는 다음과 같다.

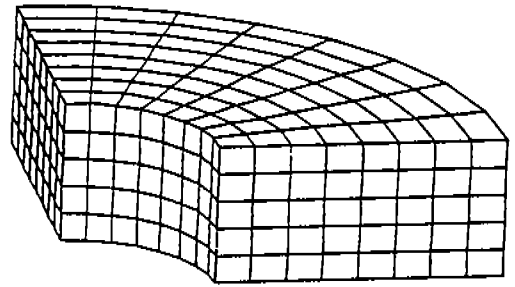
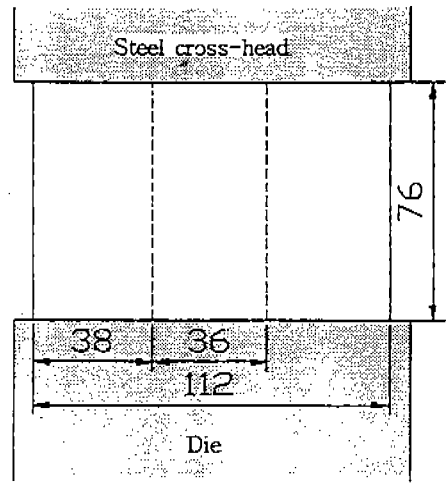


Fig.12 Test setup and finite element model of rubber ring compression



(a) Factor=0.1



(b) Factor=1.0

Fig.13 Deformed shapes of different contact scale factor

$$\widehat{d}^T = \{\delta_{ij}, \widehat{\theta}_{xji}, \widehat{\theta}_{yi}, \widehat{\theta}_{yj}, \widehat{\theta}_{zi}, \widehat{\theta}_{zj}\} \quad (56)$$

여기서  $\delta_{ij}$  = 길이 변화  
 $\widehat{\theta}_{xji}$  = 비틀림 변형  
 $\widehat{\theta}_{yi}, \widehat{\theta}_{yj}, \widehat{\theta}_{zi}, \widehat{\theta}_{zj}$  = 굽힘 변형

이며, 위치자  $\widehat{\cdot}$ 는 위의 변수들이 국부요소좌표계에서 정의된다는 것을 나타내며, I와 J는 스프링의 양끝에 있는 절점들이다.

스프링의 변형이 아주 작은 양으로 일어나면 동반회전 수식화는 요소계에서 작은변형을 가지면서 큰변위 수식화에 적용하기가 쉽다. 그리고, 요소좌표계에서의 변형은 강체회전과는 무관하기 때문에 작은 변형 이론이 적용될 수 있다.

스프링의 길이변화는 초기의 절점 좌표 ( $X_i, Y_i, Z_i$ )와 전체 변위 ( $u_{xi}, u_{yi}, u_{zi}$ )로부터 계산될 수 있다.

$$\delta_{ij} = \frac{1}{1+1^0} [2(X_{ji}u_{xji} + Y_{ji}u_{yji} + Z_{ji}u_{zji}) + u_{xji}^2 + u_{yji}^2 + u_{zji}^2] \quad (57)$$

여기서

$$X_{ji} = X_j - X_i \quad (58)$$

$$u_{xji} = u_{xj} - u_{xi} \quad (59)$$

이다.

회전변형은 초기 요소좌표 단위벡터의 몸체 좌표 성분( $e_i^0$ )을 사용하여 계산할 수 있다. 초기 단위벡터  $e_i^0$ 의 몸체 좌표 성분은 절점과 함께 회전하므로 변형형상에서 변형이 없다면 스프링의 축방향을 가르키게 된다. 그러므로 현재 방향  $e_i$ 과 초기 단위벡터  $e_i^0$ 을 비교하는 것은 회전 변형의 크기를 나타낸다.  $e_i^0$ 과  $e_i$ 의 외적은 다음과 같다.

$$e_1 \times e_1^0 = \widehat{\theta}_y e_2 + \widehat{\theta}_z e_3 \quad (60)$$

여기서  $\widehat{\theta}_y$  :  $\widehat{y}$ 축에 대한 변형증분

$\widehat{\theta}_z$  :  $\widehat{z}$ 축에 대한 변형증분

초기 요소 벡터의 몸체 성분들을 현재 요소 좌표계로 변환함에 의해 계산이 수행된다.

$$\begin{bmatrix} \widehat{e}_{ix}^0 \\ \widehat{e}_{iy}^0 \\ \widehat{e}_{iz}^0 \end{bmatrix} = [\mu]^T [\lambda] \begin{bmatrix} \widehat{e}_{ix}^0 \\ \widehat{e}_{iy}^0 \\ \widehat{e}_{iz}^0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

이 식을 식(60)에 대입하면

$$e_1 \times e_1^0 = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \widehat{e}_{ix}^0 & \widehat{e}_{iy}^0 & \widehat{e}_{iz}^0 \end{bmatrix} = -\widehat{e}_{iz}^0 e_2 + \widehat{e}_{iy}^0 e_3 = \widehat{\theta}_y e_2 + \widehat{\theta}_z e_3 \quad (62)$$

그러므로

$$\widehat{\theta}_y = -\widehat{e}_{iz}^0$$

$$\widehat{\theta}_z = \widehat{e}_{iy}^0$$

이때 비틀림 회전변형은 다음의 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_{xji} &= e_1 \cdot (\widehat{e}_{2i}^0 \times \widehat{e}_{2j}^0) \\ &= e_1 \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \widehat{e}_{x2i}^0 & \widehat{e}_{y2i}^0 & \widehat{e}_{z2i}^0 \\ \widehat{e}_{x2j}^0 & \widehat{e}_{y2j}^0 & \widehat{e}_{z2j}^0 \end{bmatrix} \\ &= \widehat{e}_{y2j}^0 \widehat{e}_{z2i}^0 - \widehat{e}_{y2i}^0 \widehat{e}_{z2j}^0 \end{aligned} \quad (65)$$

내부 축력은 스프링의 변위  $\delta$ 와 강성  $K^*$ 로부터 계산될 수 있다.

$$\widehat{f}_{xj} = K^* \delta$$

여기서  $K^a$ 는 입력된 변위-하중 선도에  
서의 기울기로 구할 수 있다.

굽힘모멘트는 회전변형과 다음의 관계  
가 있다.

$$\begin{Bmatrix} \widehat{m}_{y1} \\ \widehat{m}_{yj} \end{Bmatrix} = K_y^b \begin{Bmatrix} \widehat{\theta}_{y1} \\ \widehat{\theta}_{yj} \end{Bmatrix} \quad (67)$$

$$\begin{Bmatrix} \widehat{m}_{z1} \\ \widehat{m}_{zj} \end{Bmatrix} = K_z^b \begin{Bmatrix} \widehat{\theta}_{z1} \\ \widehat{\theta}_{zj} \end{Bmatrix} \quad (68)$$

(67)식은  $\widehat{x}-\widehat{z}$  평면에서의 회전변형식이  
며 (68) 식은  $\widehat{x}-\widehat{y}$  평면에서의 회전변형식  
이다. 여기서  $K_y^b$ 와  $K_z^b$ 는 입력된 변형각-모  
멘트 선도에서 구할 수 있다.

비틀림 모멘트는 비틀림 변형으로부터 구  
해진다.

$$\widehat{m}_{xj} = K^c \widehat{\theta}_{xj} \quad (69)$$

여기서  $K^c$ 는 입력된 변형각-모멘트 선도에  
서 구할 수 있다.

### 6.2 비선형스프링 요소 검증 및 적용예

Fig.14에 프로그램 검증을 위하여 사용된  
모델을 나타내었다. 모델은 3개의 요소로 구  
성되어 있으며 특히 회전에 대한 강성을 가  
지는 회전스프링(torsional spring)을 포함하  
고 있다.

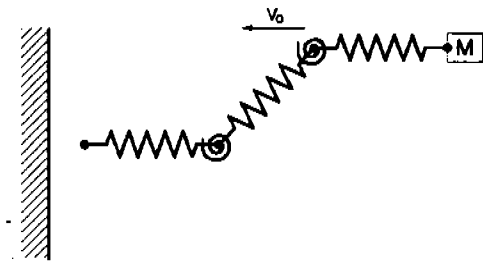
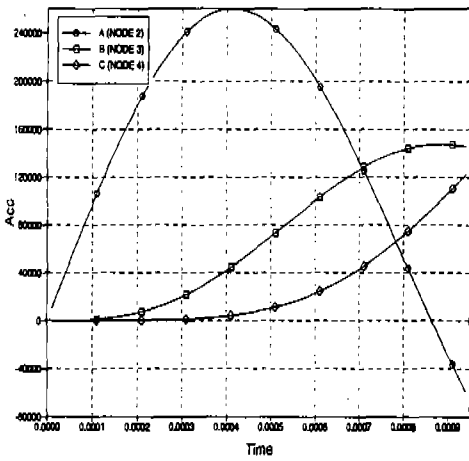


Fig.14 Test models

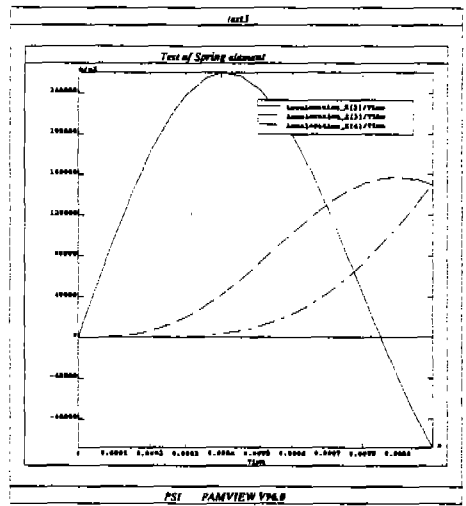
Table 4 회전스프링의 각변위-모멘트 입력값

각변위	모멘트
-1.0000	-200.0
-0.8727	-200.0
-0.2618	-300.0
-0.0872	-500.0
-0.0175	-1200.
0.00	0.0
0.0175	1200.
0.0872	500.
0.2618	300.
0.8727	200.
1.0000	200.

각 요소의 스프링 질량은 1kg이며, 집중질  
량을 0.5kg으로 하였으며 초기속도는 100mm  
/s로 하였다. 회전은 일반적인 빔의 굽힘변  
형에서 나타나는 각변위-모멘트 곡선을 스프  
링의 각변위-모멘트 곡선으로 Table. 4와 같  
이 입력하였다. 각 절점에서의 가속도가 Fig.  
15에 상용프로그램인 PAMCRASH의 결과  
와 비교되어 나타난다. 최대하중과 곡선의  
값들이 이 경우에도 유사함을 확인할 수 있다.



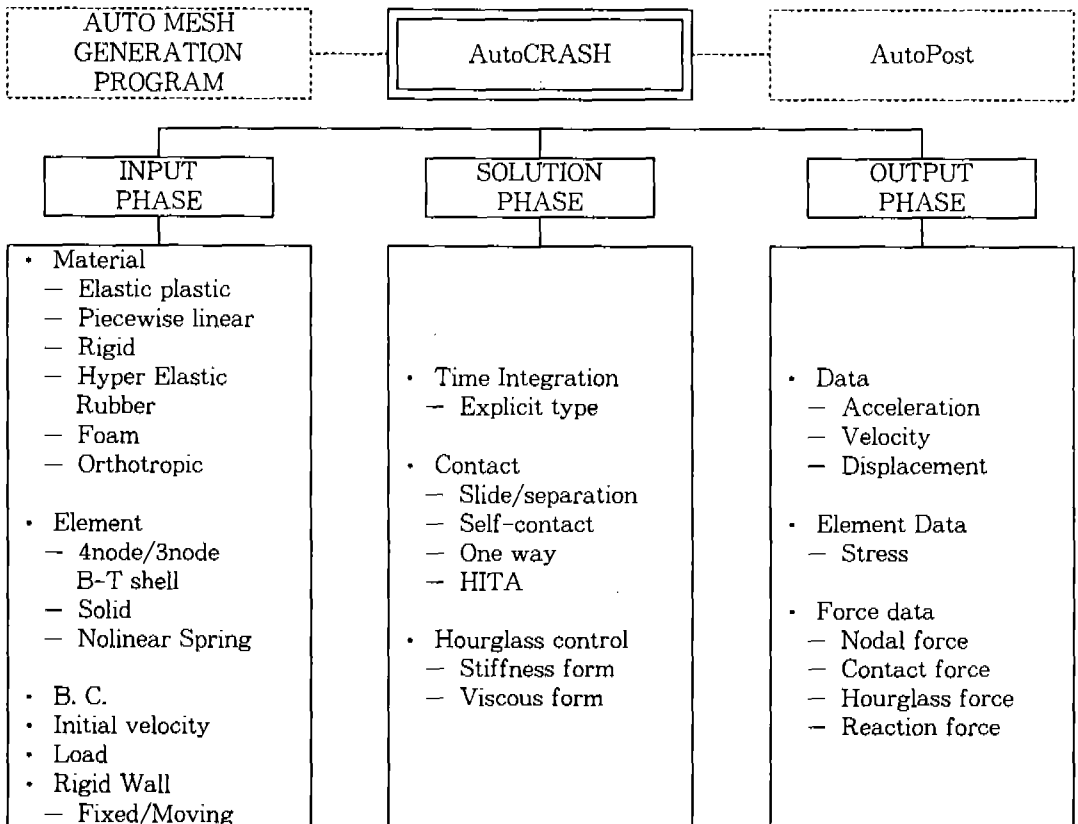
(a) AutoCrash



(b) PAMCRASH

Fig.15 Time-force curves for three elements

7. 개발 프로그램(AutoCrash, AutoPost) 구조와 기능





## 8. 결 론

## 참 고 문 헌

- 1) 차량충돌해석에 널리 사용하고 있는 B-T 셀 요소, 8절점 6면체 요소 및 이에 대한 hourglass 제어방안을 정식화하였으며, 충돌해석 전용프로그램에 도입하였다.
  - 2) 충돌해석시 점성과 탄성의 2가지형태의 hourglass 제어방안을 검증하였다. 안정된 변형 모드를 얻기 위하여는 2가지 방법중 탄성제어가 효과적이나, 과도한 제어는 전체 계의 강성을 크게 할 수 있다.
  - 3) 비선형 스프링 요소를 정식화하여 프로그래밍하였고, 검증을 위하여 S자형 프레임 모델에 적용하였다.
  - 4) 2가지 형태의 고무재료 모델을 개발하였으며 프로그램에 curve fitting 프로그램을 포함시켜 재료시험으로부터 구한 응력-변형률 데이터를 사용할 수 있도록 하였다.
  - 5) U형상 고무부품의 압축시 변형거동과 hourglass 제어 및 고무링 압축시험에 개발된 프로그램을 적용하여 고무재료 모델 및 접촉 알고리즘등을 검증하였으며, 자동차 충돌해석에 적용 가능성을 확인하였다.
1. T. Belytschko and C. S. Tsay, "A Stabilization Procedure for The Quadrilateral Plate Element with One-Point Quadrature", IJNME, Vol.19, pp.405~419, 1983.
  2. D. P. Flanagan and T. Belytschko, "A Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral with Orthogonal Hourglass Control", IJNME Vol.17, pp. 679~706, 1981.
  3. S. Cescotto and G. Fonder, "A Finite Element Approach For Large Strains of Nearly Incompressible Rubber-Like Materials", Int. J. Solids Structures, Vol.15, pp.589~605, 1992
  4. R. S. Rivlin, "The Elasticity of Rubber", Rubber Chem. Tech. vol.65, pp. G51~G66, 1992
  5. A. G. James, A. Green and G. M. Simpson, 1975, "Strain Energy Functions of Rubber I. Characterization of Gum Vulcanizates", J. Appl. Polym. Sci., Vol. 19, pp. 1033~1058, 1975.
  6. T. Belytschko, J. I. Lin and C. S. Tsay, "Explicit Algorithms for the Nonlinear Dynamics of Shells", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng'g, Vol.42, pp. 255~251, 1984.