

〈논 문〉 SAE NO. 96370088

## 구조동역학에서의 오차 추정과 시간간격 제어 알고리즘

### Error Estimation and Adaptive Time Stepping Procedure for Structural Dynamics

장 인 식\*  
I. S. Jang

#### ABSTRACT

Step-by-step time integration methods are widely used for solving structural dynamics problem. One difficult yet critical choice an analyst must make is to decide an appropriate time step size. The choice of time step size has a significant effect on solution accuracy and computational expense. The objective of this research is to derive error estimate for newly developed time integration method and develop automatic time step size control algorithm for structural dynamics. A formula for computing error tolerance is derived based on desired period resolution. An automatic time step size control strategy is proposed based on a normalized local error estimate for the generalized- $\alpha$  method. Numerical examples demonstrate the the developed strategy satisfies general design criteria for time step size control algorithm for dynamic problem.

주요기술용어 : Time Integration(시간 적분법), Time Step(시간간격), Error Tolerance(오차한계), Normalized Local Error Estimate(정규화된 국부오차 추정치), Generalized- $\alpha$  Method (일반화된 알파 방법), Structural Dynamics(구조동역학)

#### 1. 서 론

공학문제에 있어서 많은 물리적인 시스템들이 편미분 방정식을 이용하여 수학적으로 모델링된다. 이러한 방정식들은 구조물의 형상이나 물질 혹은 물리적인 현상에 따라서 다른 형태로 표시된다. 일반적으로 구조물이 고체로 되어있고 물

리적인 행태가 시간에 관계되는 구조동역학(structural dynamics) 혹은 탄성동역학(elastodynamics)에서는 수학적인 모델이 시간과 공간을 포함하는 편미분방정식으로 나타나며, 초기 및 경계조건을 가진다. 이러한 초기-경계치 문제(initial-boundary value problem)의 완전해(exact solution)를 구하는 것이 매우 어렵거나 불가능하기 때문에 수치해석적인 근사적 방법을 통하여 문제해결을 하는 경우가 많다.

\* 정희원, 홍익대학교 기계설계학과

수치근사법 중에서 구조동역학에 많이 이용되는 방법은 유한요소법(finite element method)과 유한차분법(finite difference method)이다. 구조동역학에서의 전형적인 풀이과정은 : 시간과 공간으로 구성되어있는 편미분방정식을 먼저 유한요소법을 이용하여 공간에 대해 요소화 한다. 이 결과로 편미분방정식은 시간에 대한 상미분방정식으로 바뀌고 적절한 초기조건을 가지게 된다. 따라서 본래의 초기-경계치 문제는 공간요소화를 거치면서 초기치 문제로 변환된다. 따라서, 구조동역학의 문제를 다음과 같은 식으로 표시할 수 있다<sup>1)</sup>.

$$M \ddot{X} = F^*(X, \dot{X}, t) - F(X, \dot{X}) \quad (1)$$

여기서,  $M$ 은 질량행렬이며  $F^*$ ,  $F$ 는 각각 외력과 내력의 힘벡터를 나타낸다. 또한,  $X$ ,  $\dot{X}$ ,  $\ddot{X}$ 는 각각 절점(node)의 변위, 속도 및 가속도를 나타내는 벡터이다. (1)을 만족하는  $X=X(t)$ 를 구하는 초기치 문제에 필요한 초기치는 다음과 같다.

$$X(0) = d_0, \dot{X}(0) = v_0$$

여기서,  $d_0$ ,  $v_0$ 는 각각 초기의 변위와 속도를 나타내는 벡터이다.

위에서 주어진 방정식을 수치적으로 푸는 방법 중의 하나가 시간적분법(time integration)이라고 하는데, 시간이 증가함에 따라 단계적으로 주어진 요소화된 방정식을 풀어감으로써 근사해를 구하는 방법이다.

시간적분법은 두가지의 기본개념이 있다. 식 (1)을 어떠한 시간  $t$ 에도 만족하는 해를 구하는 것이 아니고  $\Delta t$  만큼 떨어진 각각의 순간에 식을 만족하도록 하는 것이다. 즉 단속적인(discrete) 시점에서 동역학적인 평형상태를 찾는 방법을 모색하는 것이다. 두번째 아이디어는 이 방법은 변위, 속도, 가속도가 시간적인  $\Delta t$  사이에 국부적으로 변화하는 것을 기본개념으로 하고 있다.

특정한 시간  $t_{n+1}$ 에서 수치해를 계산하기 위해서

는 시간적분법에서 이전시점  $t_n$ 에서의 해와 시간간격의 크기,  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$  가 필요하다. 시간간격을 선택하고자 할 때, 두가지의 상반된 요구사항이 있다. 해의 정확도와 계산비용이 그것이다. 즉, 가장 효율적인 시간간격이란 계산에 드는 노력을 최소화하면서 해의 정확도를 최대한 높이는 것이다<sup>2), 3)</sup>.

여러 형태의 시간간격 제어 기법이 연구되어 왔는데 그 중에서도 수치해를 이용하여 각 스텝에서의 오차를 계산하여 시간간격 결정에 사용하는 기법은 많지 않다. 그 중에서 Zienkiewicz 등은 간단한 오차추정치와 오차한계를 이용하여 시간간격을 결정하는 방법을 제시하였다<sup>5), 6)</sup>. 또 Zeng은 비슷한 형태의 오차추정치를 보다 간단한 방법으로 유도하고 시간간격 제어 알고리즘도 약간 달리 하였다<sup>7)</sup>.

본 연구는 구조동역학의 시간적분법의 일종인 일반화된 알파 방법에서 수치해를 이용한 국부오차를 유도하고, 이를 이용한 시간간격의 크기를 자동으로 제어하는 알고리즘을 개발하였다. 또, 알고리즘의 효용성을 검증하기 위하여 수치해의 예제를 제시하였다.

## 2. 시간적분기법

본 연구에서 사용된 일반화된 알파방법(generalized- $\alpha$  method)은 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} M((1-\alpha_m)a_{n+1} + \alpha_m a_n) + C((1-\alpha_f)v_{n+1} + \alpha_f v_n) \\ + K((1-\alpha_f)d_{n+1} + \alpha_f d_n) = F(t) \end{aligned} \quad (2)$$

$$d_{n+1} = d_n + \Delta t v_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 a_n + \beta \Delta t^2 \Delta a_n \quad (3)$$

$$v_{n+1} = v_n + \Delta t a_n + \gamma \Delta t \Delta a_n \quad (4)$$

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n \quad (5)$$

$$d_0 = d, v_0 = v \quad (6)$$

여기서,  $M$ ,  $C$ ,  $K$ 는 각각 질량, 땀평, 강성행렬

을 나타내며,  $d$ ,  $v$ ,  $a$ 는 각각 변위, 속도, 가속도벡터를 표시하며,  $F(t)$ 는 시스템에 가해지는 외력벡터를 나타낸다. 또한, 알고리즘 파라미터는 다음과 같이 주어진다.

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}, \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1} \quad (7)$$

$$\beta = (1 - \alpha_m + \alpha_f)^2 / 4, \quad \gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m - \alpha_f \quad (8)$$

위 식에서 보듯이 파라미터들이  $\rho_\infty$ 에 의하여 결정되는데,  $\rho_\infty$ 는 고주파수에서 수치적 떤평의 정도를 나타내는 요소이다. 이 요소가 변화하는 범위는  $0 \leq \rho_\infty \leq 1$ 인데,  $\rho_\infty = 0$ 인 경우는 떤평이 아주 커서 해가 접근적으로 소산하며,  $\rho_\infty = 1$ 인 경우는 수치적 떤평이 존재하지 않는다. 이 방법은 최근에 개발되었는데 고주파수와 저주파수에서의 수치적 떤평이 최적으로 구성되어 있고, 무조건안정화된(unconditionally stable) 2 차의 정확도(second-order accurate)를 가진 시간적분 기법이다.

### 3. 단순 오차 추정치의 유도

계산 오차를 이용한 시간간격 제어를 위해서는 오차의 척도가 필요한데, 일반적으로 전체오차(global error)는 구하기가 매우 어려우므로 국부오차(local error)가 많이 이용된다. 여기서, 국부오차는 시간  $t_n$ 에서  $t_{n+1}$ 까지  $d_n$ ,  $v_n$ 을 각각 초기조건으로 할 때 수치해와 완전해의 차이를 의미한다. 이를 식으로 나타내면, 국부오차  $e_{n+1}$ 는

$$e_{n+1} = d_{n+1} - u_{n+1} \quad (9)$$

이 된다.  $u_{n+1}$ 는 다음과 같은 국부문제의 해이다.

$$\begin{aligned} M\ddot{u} &= F^*(u, \dot{u}, t) - F(u, \dot{u}) \\ u(t_n) &= d_n, \quad \dot{u}(t_n) = v_n \end{aligned} \quad (10)$$

테일러 급수를 이용하여  $u_{n+1}$ 을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{u}_n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u^{(3)}(\xi_d) \quad (11)$$

여기서,  $\xi_d \in [t_n, t_{n+1}]$ 이고  $u^{(3)}(\xi_d) = d^3 u / dt^3 |_{t=\xi_d}$ 이다.

오차해석의 편의성을 위하여 다자유도계 시스템이 일반적인 모드해석(modal analysis)을 통하여 스칼라 방정식으로 바꾸고, 땴평과 외력이 없는 시스템을 고려한다.

이 때의 국부오차는 식 (3), (9)~(11)을 사용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= d_{n+1} - u_{n+1} \\ &= \Delta t^2 (\beta \Delta a_n - \frac{1}{6} \Delta t^3 u^{(3)}(\xi_d) + \frac{1}{2} (a_n - \ddot{u}_n)) \end{aligned} \quad (12)$$

또, 일반화된 알파 방법의 평형방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_m) a_{n+1} + a_m a_n \\ + (1 - \alpha_f) \omega^2 d_{n+1} + \alpha_f \omega^2 d_n = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

식 (12)와  $n+1$  스텝에서의 완전해의 관계식

$$\ddot{u}_{n+1} + \omega^2 u_{n+1} = 0 \quad (14)$$

을 이용하여 (13)을 약간 변형하면 식 (12)의 3번째 항

$$\begin{aligned} a_n - \ddot{u}_n &= (1 - \alpha_f) \Delta \dot{u}_n - (1 - \alpha_m) \Delta a_n \\ &\quad - (1 - \alpha_f) \omega^2 e_{n+1} \end{aligned} \quad (15)$$

을 구할 수 있다. 이를 (12)에 대입하면

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \Delta t^2 (\beta \Delta a_n - \frac{1}{6} \Delta t^3 ((1 - \alpha_f) \Delta \dot{u}_n \\ &\quad - (1 - \alpha_m) \Delta a_n - (1 - \alpha_f) \omega^2 e_{n+1})) \end{aligned} \quad (16)$$

식 (15)에서  $\Delta \hat{u}_n$ 에 대하여 구하고 식 (16)을 정리하면

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \Delta t^2 \left( 1 + \frac{\Omega^2}{6} \right) \left( \left\{ \beta - \frac{1-\alpha_m}{6(1-\alpha_f)} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(1-\alpha_f) \right\} w_n \right) \end{aligned} \quad (17)$$

여기서,  $\Omega = w \Delta t$  이고

간단한 형태의 오차추정을 위해 고차항을 무시하면

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \Delta t^2 \left( \left\{ \beta - \frac{1-\alpha_m}{6(1-\alpha_f)} \right\} \Delta a_n \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(1-\alpha_f) \right\} w_n \right) \end{aligned} \quad (18)$$

위 식에서  $w_n$ 은 오차 계산의 간편성을 위하여 도입된 요소로서  $w_0 = 0$ 이며,  $n+1$  스텝에서의 계산은 다음 식으로 한다.

$$w_{n+1} = \frac{\alpha_m - \alpha_f}{(1-\alpha_f)^2} \Delta a_n - \frac{\alpha_f}{1-\alpha_f} w_n \quad (19)$$

위에서 구한 오차추정치의 정확도를 알아보기 위해서 간단한 수치예를 계산하였다. 램프이 없는 일차원 자유진동에서  $\omega = 2\pi$ ,  $d_0 = 1$ 와  $v_0 = 2\pi$ 로 주어진 시스템을 고려한다. 이 시스템은 완전해를 알 수 있으므로 실제의 국부오차( $e_{n+1}^{est}$ )도 계산 가능하다. 유도된 오차추정치( $e_{n+1}^r$ )를 식 (17), (18)에서 구하면 그 성능은 실제의 오차를 얼마나 잘 나타내느냐를 가지고 알 수 있다. 그래서, 실제오차와 추정오차의 차이를 다음과 같이 추정오차의 성능 척도로 정하였다.

$$E_{n+1}^e = e_{n+1}^{est} - e_{n+1}^r \quad (20)$$

Fig.1은 오차추정치의 오차를 나타내는 것으로써 국부오차 추정치가 실제오차를 근사하게 나타낸다. 위에서 유도한 오차의 형태는 일 반화된 알파 방법에 대하여 최초로 시도된 것으로 비교적 간단한 형식으로 오차를 나타내고 있다.

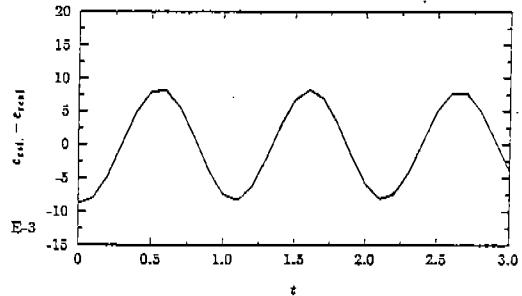


Fig.1 Error of simple error estimate for generalized- $\alpha$  method  
( $\omega = 2\pi$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $\rho_\infty = 0.5$ )

#### 4. 시간간격 제어 기법의 유도

##### 4.1 오차한계의 계산

오차를 이용하여 시간간격을 제어하는 알고리즘에서는 시간간격의 크기에 따른 수치해의 정확도를 판단할 수 있는 오차한계가 필요하다. 즉, 오차한계 범위 내에 드는 시간간격은 받아들이고 한계 밖의 시간간격은 변화시켜 범위 내에 들어오도록 한다. 시간간격제어 알고리즘에서 적절한 오차한계를 선택하는 것은 매우 어려운 일이다. 일반적으로 주어진 문제에서 사용자가 국부오차에 대한 오차의 한계를 정하기는 어렵지만, 시간간격을 정하는 데 있어서 오차한계를 공학적인 규약과 연관시킬 수 있다.  $T$ 를 진동주기라면  $\Delta t / T$ 는 때때로 시간적분에서 시간간격의 척도로 이용된다. 일반적으로 관심을 가지는 응답의 최고 주파수에 대한 주기내에 적어도 10번 정도의 시간간격이 필요하다.

그러한 관계를 얻기 위하여 국부오차의 절대값이 해의 적절한 척도에 의하여 정규화 될 필요가 있다. 정규화 요소의 선택은 시간간격 제어 기법에서 직접적인 영향을 미치는 중요한 요소이다. 하나의 선택으로써  $\|\Delta d_n\|$ 을 정하였다. 여기서,  $\Delta d_n = d_{n+1} - d_n$ 이며  $\|\Delta d_n\|$ 이 비현실적으로 커지는 것을 방지하기 위하여  $n$  스텝 이전의  $\Delta d$ 를 고려한  $i < n$ 인  $\|\Delta d_i\|$ 를 도입하였다. 정규화된 오차는 다음식으로 나타낸다.

$$RL_{err} = \frac{\| e_{n+1} \|}{sclfac_n} \quad (21)$$

$$sclfac_n = \max(\| \Delta d_n \|, \frac{9}{10} sclfac_{n-1}) \quad (22)$$

여기서,  $sclfac_n$ 는 비율화 요소(scaling factor)이며  $n=0$  일 때  $sclfac_{n-1}=0$ 이다.

식 (18), (19)의 벡터 형태를  $w_n$ 의 변화 과정을 모두 포함하는 식으로 변형하면 다음과 같이 된다.

$$e_{n+1} \approx \Delta t^2 c_1 (\Delta a_n + c_2 \sum_{i=1}^n (-\rho_\infty)^{(i-1)} \Delta a_{n-i}) \quad (23)$$

여기서,

$$c_1 = \beta - \frac{1 - \alpha_m}{6(1 - \alpha_f)},$$

$$c_2 = (1 - \rho_\infty)(1 + \rho_\infty) \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(1 - \alpha_f) \right) \quad (24)$$

오차한계와  $\Delta t/T$ 의 관계를 구하기 위하여 일차원 자유진동 문제를 고려하면 초기조건에 관한 방정식은 다음과 같다.

$$a_0 + \omega^2 d_0 = 0 \quad (25)$$

이 식과 일반화된 알파 방법에서 시간  $t_i$ 에서의 운동량 방정식

$$(1 - \alpha_m) a_1 + \alpha_m a_0 + (1 - \alpha_f) \omega^2 d_1 + \alpha_f \omega^2 d_0 = 0 \quad (26)$$

을 조합하여 다음 식을 구한다.

$$(1 - \alpha_m) \Delta a_0 + (1 - \alpha_f) \omega^2 \Delta d_0 = 0 \quad (27)$$

$\Delta a_0$ 에 대하여 구하고 (21)~(23)을 이용하면

$$\begin{aligned} RL_{err} &= \Delta t^2 c_1 \left| \frac{c_1 (1 - \alpha_f) \omega^2}{1 - \alpha_m} \right| \\ &= (2\pi)^2 \left| c_1 \frac{1 - \alpha_f}{1 - \alpha_m} \right| \left( \frac{\Delta t_1}{T} \right)^2 \end{aligned} \quad (28)$$

이 된다. 따라서, 이 식에서 사용자 정의량  $\Delta t$ /  $T$ 와 정규화된 국부오차의 관계를 구할 수 있다. 사용자 정의 목표치  $\Delta t/T$ 로부터 오차한계를 식 (28)로 계산할 수 있으며 다른 형태로 기술하면

$$tl = C \left( \frac{\Delta t}{T} \right)^2, \quad C = (2\pi)^2 \left| c_1 \frac{1 - \alpha_f}{1 - \alpha_m} \right| \quad (29)$$

가 된다. 여기서  $tl$ 은 정규화된 국부오차의 한계를 나타내며, 시간간격제어를 위한 중요 요소로 이용 된다. 비록 이 관계식은 데밍과 하중이 없는 경우를 기초로 하여 구하였지만 수치예에서 보듯이 보다 일반적인 경우에 대하여도 주어진 오차한계가 유효함을 알 수 있다.

#### 4.2 시간간격 제어기법

주어진  $(\Delta t/T)^{target}$ 을 이용하여 오차한계가 식 (29)에 의하여 계산된다. 이를 이용한 시간간격 제어를 위한 순서도가 Fig.2에 나타나 있다. 사용자가 주어야 할 값들은  $(\Delta t/T)^{target}$ ,  $\Delta t_0$ ,  $f_{expect}$ 이다. 여기서,  $\Delta t_0$ 는 초기 시간간격 추정치이고  $f_{expect}$ 는 예상되는 최대주파수이다. 또한, 시간적 분을 위한 알고리즘 파라미터  $\rho_\infty$ 를 주어야 한다.

시간간격 제어의 처음과정은 각각의 스텝에 대하여 다음을 조사하는 것이다.

$$lb \times tl \leq RL_{err} \leq tl \quad (30)$$

$lb$ 는 오차한계의 최소치를 구하기 위하여 곱해주는 요소이다. 위의 조건이 만족되면 해는 받아들여지고 시간적분은 다음 스텝으로 진행하여 시간간격의 변화는 없다. 만약  $RL_{err} < lb \times tl$ 인 경우의 시간간격에 대하여는 연속된 횟수를 세어서 일정한 횟수가 넘으면 시간간격을 변화시킨다.

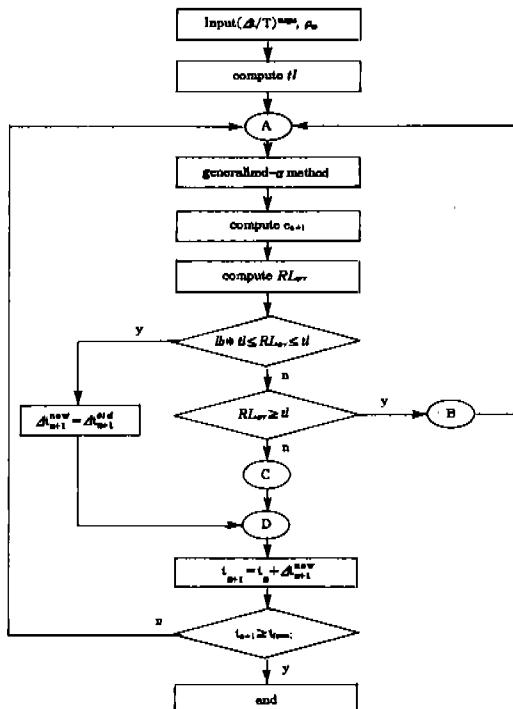


Fig.2 Flow chart for time step size control algorithm

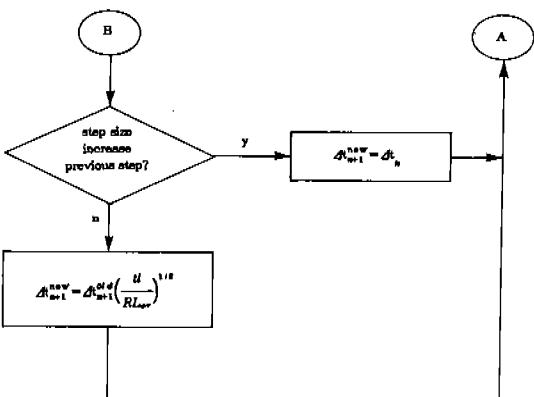


Fig.4 Flow chart for time step size decrease loop

즉, 연속회수계수가  $t_{count}$ 라는 특정한 값을 넘으면 시간간격을 증가시켜 다음 스텝으로 넘어간다. 이 계수는 시간간격이 변화하거나 오차한계를 만족할 경우에는 0으로 재조정한다. 증가되는 시간간격은 다음을 이용하여 계산한다.

$$\Delta t_{n+2} = \Delta t_{n+1} \left( \frac{t}{RL_{err}} \right)^{1/p_t} \quad (31)$$

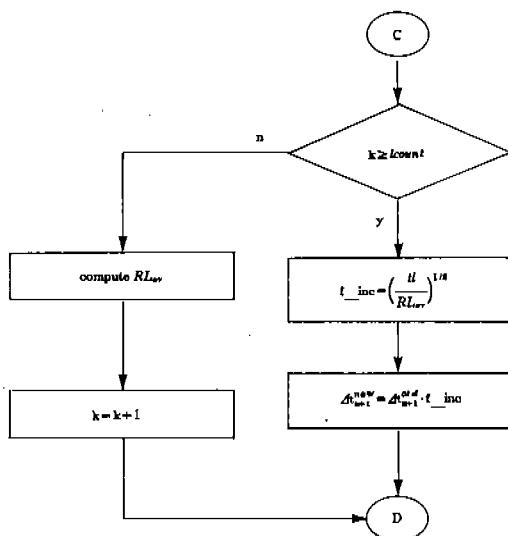
여기서,  $p_t$ 는 정규화된 국부에러의 수렴률(rate of convergence)에 관계되는 파라미터이다. 이 과정에 대한 순서도가 Fig.3에 나타나 있다.

계산된 오차값이 한계범위를 넘으면 시간간격을 보다 작은값으로 변화시킬 필요가 있는데, 시간간격 감소가 요구되는 경우는 두 가지가 있다. 먼저, 이전 스텝에서  $\Delta t$ 가 증가하였을 경우에는 새로운  $\Delta t$ 는 증가하기 이전의 시간간격으로 사용된다. 만약, 이전 스텝에서 시간간격이 증가하지 않았다면 새로운 시간간격은 다음을 이용하여 계산한다.

$$\Delta t_{n+1}^{new} = \Delta t_{n+1}^{old} \left( \frac{t}{RL_{err}} \right)^{1/p_t} \quad (32)$$

$p_t$ 는 정규화된 국부에러의 수렴률에 관계되는 파라미터이다. 또한, 시간  $t_n + \Delta t_{n+1}^{old}$ 에서 계산된

Fig.3 Flow chart for time step size increase loop



해는 버리고  $\Delta t_{n+1}^{new}$ 를 이용하여 새로운 해를 구한다. 이 과정에 대한 순서도가 Fig.4에 나타나 있다. 시간간격 제어 알고리즘에 필요한 파라미터는  $lb$ ,  $p_d$ ,  $p_i$ 와  $l_{count}$ 이며,  $lb=0.75$ ,  $RL_{err}$ 에서  $p_d=p_i=2$ 로 정해졌다.  $l_{count}$ 는 사용자가 정의한 값  $(\Delta t/T)^{target}$ 을 이용하여 정의할 수 있는데, 주기적인 해에 대하여는  $l_{count}$ 가  $RL_{err}$ 의 최대값 사이의 일정한 시간간격의 스텝수보다 커야 한다는 것을 이용하여  $(\Delta t/T)^{target}$ 의 역수의 정수값을 취한다.

## 5. 수치해석의 예

위에서 유도된 시간간격 제어 알고리즘의 효용성을 살펴보기 위하여 두 가지 경우의 수치예를 풀었다.

### 5.1 갑작스런 부하변화를 수반하는 진동

댐핑이 없는 일차원 진동에서 주어지는 힘이 갑자기 변할 때의 시간간격을 어떻게 결정하는지를 조사해보는 문제이며, 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (33)$$

여기서,  $M$ 은 질량이고  $K$ 는 스프링 상수이며  $f(t)$ 는 가해지는 힘이다. 또,  $\ddot{x}$ ,  $x$ 는 각각 가속도, 변위이다. 본 예제에 이용된 모델 파라미터는 다음과 같다.

$$M=1, K=12, x(0)=1, \dot{x}(0)=1$$

여기서,  $x(0)$ ,  $\dot{x}(0)$ 는 각각 초기변위, 초기속도이다. 또, 갑작스런 부하 변화에 따른 시간간격의 변화를 조사하기 위하여 가해지는 힘의 변화는 다음과 같다. 즉, 시간이 10까지는 삼각함수 형태의 외력을 가하다가 시간이 10 이후에는 스텝(step) 형태의 외력을 가한다.

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\omega_n t/2) : 0 \leq t \leq 10 \\ 20 : 10 \leq t \leq 20 \end{cases} \quad (34)$$

여기서,  $\omega_n$ 은 시스템의 고유진동수이다. 목표치로서 주기당 10번의 시간 스텝을 갖도록  $(\Delta t/T)^{target}=0.1$ 이 선택되었다.

시간간격의 변화가 각기 다른 초기 시간간격에 대하여 Fig.5과 Fig.6에 나타나 있다.

두 경우 모두 스텝 형태의 하중이 주어졌을 때 시간간격이 감소함을 보이고 있다. 이 후에는 정상 상태 용답의 특징상 시간간격이 다시 목표치로 증가됨을 알 수 있다. 초기의 출발조건을 제외하고는 시간간격이 거의 해의 주파수 특징을 잘 따라가고 있음을 알 수 있다. Fig.5과 Fig.6를 비교해 보면 초기 시간간격은 정상상태의 시간간격에 영향이 없음을 보인다. 이 문제에서 계산비용과 정확도에 대하여 시간간격을 제어하였을 때와

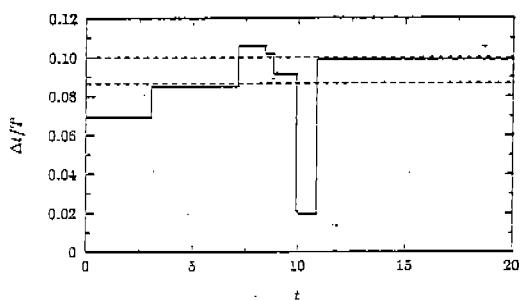


Fig.5 Time step size history using  $RL_{err}$  for SDOF undamped model under sudden load change  
( $(\Delta t/T)^{target}=0.1$ ,  $T=4$ ,  $\Delta t_0=1.0$ )

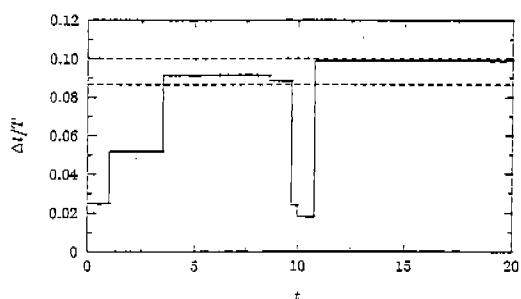


Fig.6 Time step size history using  $RL_{err}$  for SDOF undamped model under sudden load change  
( $(\Delta t/T)^{target}=0.1$ ,  $T=4$ ,  $\Delta t_0=0.1$ )

그렇지 않았을 때를 비교할 수 있다.

정확도의 비교를 위해서는 완전해(exact solution)와 계산된 해를 비교하였으며, 계산비용은 계산을 수행하는데 필요한 스텝의 수를 사용하였다.

Fig.7과 Fig.8은 시간간격제어 알고리즘( $\Delta t/T)^{target}=0.05$ )을 이용할 때와 일정한 시간간격( $\Delta t=0.2$ )를 가질 때의 계산된 변위의 오차를 나타내고 있다. 이 일정한 시간간격은  $T$ 가 자유 진동수에 대한 주기일 때 ( $(\Delta t/T)^{target}=0.05$ )와 관계되는 수치이다.

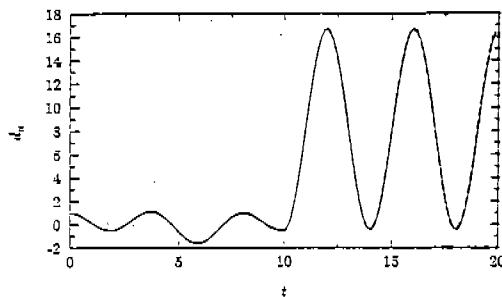


Fig.7 Displacement history using  $RL_{err}$  for SDOF undamped model under sudden load change  
 $((\Delta t/T)^{target}=0.05, T=4, \Delta t_0=0.5,$   
 No. of steps : 156, solid line : numerical, dotted line : exact)

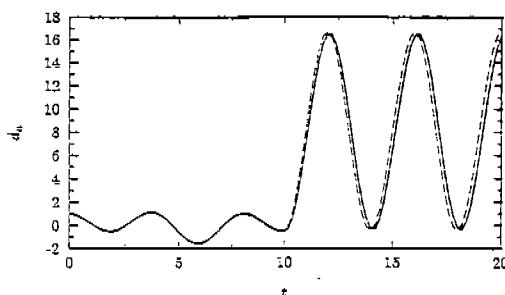


Fig.8 Displacement history using constant step size for SDOF undamped model under sudden load change  
 $(\Delta t=0.2, \text{No. of steps} : 100, \text{solid line} : \text{numerical}, \text{dotted line} : \text{exact})$

이 결과에서 시간간격을 제어할 때의 해가 더 정확함을 알 수 있다. 그러나 이 결과는 단지 계산스텝을 증가 시킴으로써 가능하다고 할 수 있다. 왜냐하면, 일정 시간간격의 경우는 100 스텝이 필요하지만 시간간격제어 알고리즘을 이용하면 156 스텝이 소요되기 때문이다. 그러면, 똑같은 156 스텝이 소요되는 일정 시간간격을 취하면 ( $\Delta t=0.128$ ) 어떤 결과가 나오는지 조사하여 보자. 똑같은 수의 계산스텝에 대한 변위가 Fig.9, 10에 나타나 있다. 여기서 우리는 시간간격 제어 알고리즘을 사용한 결과가 보다 정확함을

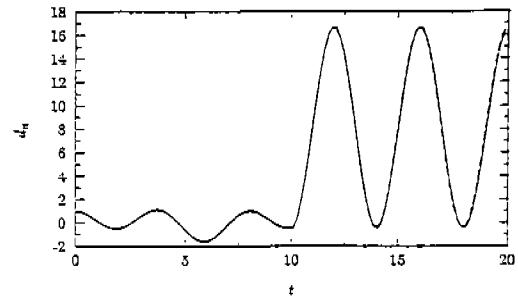


Fig.9 Displacement history using  $RL_{err}$  for SDOF undamped model under sudden load change  
 $((\Delta t/T)^{target}=0.05, T=4, \Delta t_0=0.5, \text{No. of steps} : 156, \text{solid line} : \text{numerical}, \text{dotted line} : \text{exact})$

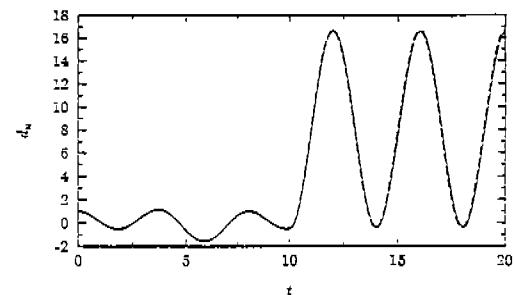


Fig.10 Displacement history using constant step size for SDOF undamped model under sudden load change  
 $(\Delta t=0.128, \text{No. of steps} : 156, \text{solid line} : \text{numerical}, \text{dotted line} : \text{exact})$

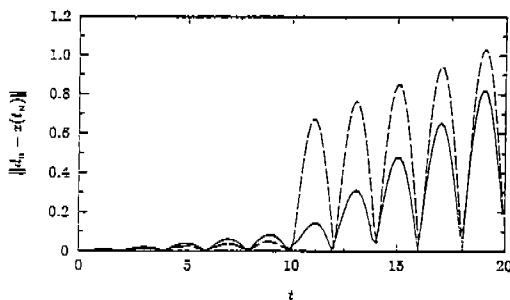


Fig.11 Displacement error using  $RL_{err}$  and constant step size for SDOF undamped model under sudden load change  
(solid line :  $RL_{err}$ ,  $(\Delta t/T)^{target}=0.05$ ,  
dotted line : constant,  $\Delta t=0.128$ )

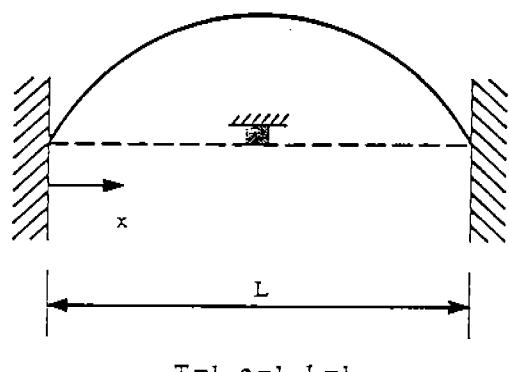


Fig.12 Model of string vibration problem(initial state)  
 $T=1, \rho=1, L=1$

알수 있다. 특히, 갑작스런 하중 변화 부분에서 Fig.11에는 전체 변위 오차가 나타나 있듯이 그 차이는 명확하다. 처음 10초간은 시간간격이 작기 때문에 일정 시간간격의 오차가 적지만, 10초에 부하가 변화되는 순간에 오차가 갑자기 증가함을 볼 수 있다.

일정한 시간간격 ( $\Delta t=0.128$ )을 사용하는 경우에는 부하의 변화가 시간값  $t_n$ 에 정확하게 발생하지 않았기 때문에 오차가 발생한다. 이러한 종류의 시간차이는 실제적인 문제에서 흔히 발생하며, 모든 가능한 시간에 부하변화가 일어나도록 일정 시간간격을 정하는 것은 거의 불가능한 일이다. 이 예제로부터 알 수 있듯이 부하가 갑자기 변화하는 시스템에 있어서는 시간간격 제어 기법을 사용함으로써 정확하고 적은 계산비용이 드는 해를 구할 수 있다.

## 5.2 현의 진동 문제

시간간격 제어기법의 다자유도계에서의 성능을 시험하기 위하여 다음과 같은 현의 진동문제를 생각해 보자. 현의 진동의 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (35)$$

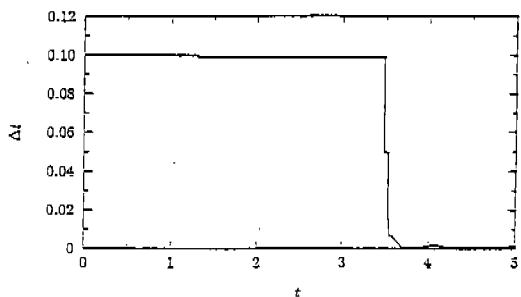


Fig.13 Time step size history using  $RL_{err}$  for string vibration problem  
( $\rho_\infty=1.0$ ,  $(\Delta t/T)^{target}=0.05$ )

여기서  $v$ 는 상하방향의 변위이고,  $T$ 는 현의 장력,  $\rho$ 는 단위 길이당의 질량이다.

물리적인 모델이 Fig.12에 나타나 있다.

100개의 유한요소를 가지며 일정한 질량 행렬을 가지는 시스템으로써 다음과 같은 초기 조건을 갖는다.

$$d_0 = \sin(\pi x_i), i=0, 1, 2, \dots n_{el} \\ v_0 = 0 \quad (36)$$

여기서  $d_0$ 는 초기 변위 벡터이며,  $v_0$ 는 초기 속도 벡터이다.  $x_i$ 는 절점  $i$ 에서의 좌표값을 나타내며,  $n_{el}$ 은 요소의 수이다. 초기 변위의 특징은 첫번째 고유모드(eigenmode)를 가질 수 있도록 완전해에서 유도하여 구하였다.

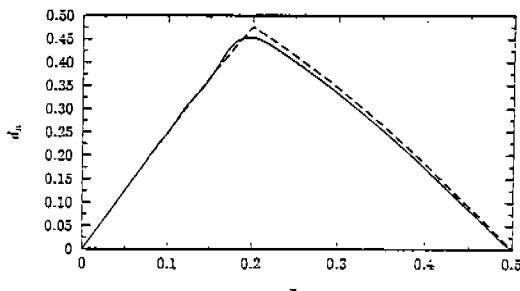


Fig.14 Exact displacement and solution with time step size control 0.3 second after impact(solid line : numerical, dotted line : exact)

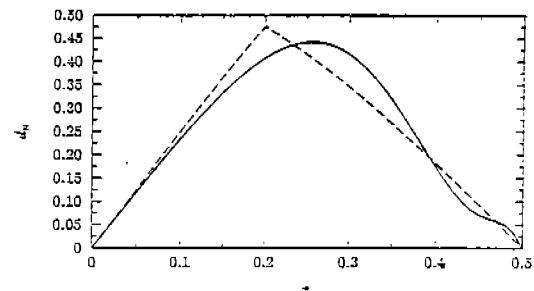


Fig.15 Exact displacement and solution with constant step size 0.3 seconds after impact( $\Delta t=0.1$ , solid line : numerical, dotted line : exact)

현이 1.75 주기만큼 진동한 후에 현의 중간 지점에 위치한 고정점이 나타나서 이 후로는 이 지점이 고정된 채로 현이 진동하도록 하였다. 이러한 경계조건의 변화는 본 문제를 단순한 진동 문제에서 과동전파(wave propagation) 형태의 문제로 바꾸는 결과를 초래한다.

Fig.13에는  $\rho_\infty=1$ 에 대한 시간간격 변화가 나타나 있는데, 충격 전까지는 거의 일정한 시간간격을 보이며 충격 후에도 작은 값으로 거의 일정한 시간간격을 가짐을 알수 있다.

Fig.14에는 충격 0.3초 후에 완전해(exact solution)와 일반화된 일파방법과 ( $\rho_\infty=1$ ) 과 시간간격 제어 기법을 이용한 해를 나타내고 있다. 여기서  $x$ 는 현의 고정점으로부터의 거리이다. 두해가 거의 비슷함을 알 수 있다. Fig.15에는 일정한 시간간격 0.1초를 가지고 계산한 경우의 해를 완전해와 비교해 보았다. 이 시간간격은 초기 진동문제에 있어서 주기당 20 스텝을 갖도록 하는 크기이다. 해의 결과에서 알 수 있듯이 이 시간간격은 너무 커서 충격의 특징을 잡아 낼 수 없었다.

## 6. 결 론

최근에 개발된 시간적분법의 일종인 일반화된 일파방법에 대한 단순오차 추정치를 유도하고 시간간격 제어 기법을 정규화된 국부오차 추정치

를 이용하여 개발하였다. 일반화된 일파방법에 대하여 최초로 유도된 국부오차 추정치는 실제의 오차를 비교적 잘 나타냄을 보였다. 오차를 이용한 시간간격 제어 알고리즘의 난점으로 알려진 오차한계의 범위를 사용자가 직접 정하지 않고, 널리 알려진 공학적인 규약 ( $\Delta t/T$ )을 지정함으로써 알고리즘 내에서 자동으로 계산하게 하였다. 각 스텝에서 계산된 수치해를 이용하여 구한 정규화된 국부오차가 오차한계 내에 들도록 시간간격을 조정하면서, 가능한 시간간격의 변화 횟수를 적게하는 방법을 모색하였다. 또한, 사용자가 정의해야 할 파라미터의 갯수를 최소화 하였다. 알고리즘의 효용성을 검증하기 위하여 수치계산의 예를 이용하였다. 일차원 진동에서 가해지는 외력의 형태가 갑자기 변할 때, 개발된 알고리즘을 이용하면 시스템의 변화를 잘 감지하여 일정한 시간간격으로 수행한 수치해의 결과보다 정확하고 빠른 해를 얻을 수 있었다. 또한, 다차원 진동의 예로 현의 과동전파 문제를 고려하였는데, 시간간격 제어 알고리즘을 사용한 경우의 수치해가 보다 정확한 결과를 나타내었다.

## 참 고 문 헌

1. T. J. R. Hughes, The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Englewood

- Cliffs, New Jersey, 1987.
2. P. G. Bergan and E. Mollestad, "An automatic time stepping algorithm for dynamic problem," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 49, pp. 299~318, 1985.
  3. G. M. Hullbert, "An automatic time step control algorithm for structural dynamics," ASME Paper No. 91-WA/CIE-6, ASME, New York, 1991.
  4. G. M. Hulbert and I. Jang, "Adaptive time intergration algorithms for structural dynamics," Adaptive Multilevel and Hierarchical Computational Strategies, Vol. 157, ASME, New York, pp. 223~233, 1992.
  5. O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 337~357, 1987.
  6. O. C. Zienkiewicz and Y. M. Xie, "A simple error esrimator and adaptive time stepping procedure for dynamic analysis," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 20, pp. 871~887, 1991.
  7. L. F. Zeng, N. E. Wieberg, X. D. Li and Y. M. Xie, "A posteriori local error estimation and adaptive time-stepping for Newmark integration in dynamic analysis," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 21, pp. 555~571, 1992.
  8. S. J. Lee and S. S. Hsieh, "Application of a self-adaptive algorithm to nonlinear finite element analysis," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 32, pp. 1057~1077, 1991.
  9. G. M. Hulbert and I. Jang, "Automatic time step control algorithms for structural dynamics," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 26, pp. 155~178, 1995.