

자기벡터포텐셜을 이용한 3차원 전자력 계산

양재진

대한전선(주)기술연구소

이복용

대우공업전문대학 전기과

이기식

단국대학교 전기공학과

(1995년 7월 13일 받음, 1996년 5월 10일 최종수정본 받음)

전동기와 같이 가동부를 갖는 전기기기는 힘이나 토크를 발생시키기 위하여 고안되었고, 힘이나 토크는 이들 기기의 해석과 설계에 중요한 요소이다. 지금까지 유한요소법을 이용한 전자력 계산 방법으로는 여러가지 방법들이 제시되어 왔고, 그 중 널리 사용되는 방법으로는 맥스웰 응력법과 가상변위법이 있다. 맥스웰 응력법은 맥스웰 스트레스텐서를 이용하여 표면 전자력 밀도를 구하고 이의 표면 적분으로 전자력을 구하는 방법이고, 가상변위법은 물체에 변위가 일어났을 때 발생하는 에너지의 변화량을 이용하여 전자력을 구하는 방법이다. 전류원이 포함된 문제에서는 정확도를 높이기 위하여 벡터포텐셜을 주로 이용하여 자장해석을 하여 왔으므로 본 논문에서는 유한요소법으로 3차원 자장 문제를 해석한 결과인 자기벡터포텐셜을 맥스웰 응력법과 가상변위법에 적용하여 전기기계의 각 요소의 전자력을 구하는 방법을 제시한다. 제시한 방법의 검증은 위하여 해석 모델을 솔레노이드로 하여 제시한 방법으로 구한 전자력을 3차원으로 해석한 결과와 비교하여 그 유용성을 증명한다.

I. 서 론

유한요소법은 비선형 재질을 포함하거나 복잡한 구조의 전기 기계에 대해서도 비교적 쉽게 자장을 해석할 수 있으며 또한 유한요소해를 이용하여 전기기계 각 부분의 전자력이나 토크도 예측할 수 있는 유용한 수치계산법이다.

전자력 계산 방법으로는 지금까지 여러 가지 방법이 제시되어 왔으며, 그 중 널리 사용되는 방법으로는 맥스웰 응력법과^[1] 가상변위법^{[2],[3],[4]}이 있다. 맥스웰응력법은 맥스웰응력(Maxwell Stress Tensor)로 정의되는 표면 전자력 밀도의 적분으로 전자력을 구하는 방법이고 가상변위법은, 물체에 변위가 일어났을 때 발생하는 에너지의 변화량을 이용하여 전자력을 구하는 방법이다. 최근에 3차원 문제에 이들 기법이 적용되어지고 있으나 주로 스칼라 포텐셜을 이용한 방법에 한하고 있다.^[5] 전류원이 포함된 문제에서는 정확도를 높이기 위하여 자기벡터포텐셜을 주로 이용하여 자장 해석을 하고 있으므로 이 경우에 전자력이나 토크의 계산은 자기벡터포텐셜을 이용하는 것이 용이하다.

따라서 본 논문에서는 맥스웰응력법과 가상변위법을 3차원 유한요소해^[6]인 자기벡터포텐셜을 이용하여 계산하는 방법을 제안한다.

제안한 방법으로 계산한 전자력의 정확성을 검증하기 위하여 다음의 단계를 수행한다. 먼저 동축상의 자기쌍극자 간에 작용하는 전자력을 축대칭 3차원 해석으로 계산하여 해석해^{[7],[8]}와 비교 검증하고, 솔레노이드의 센터폴이 받는 전자력을 제안한 방법과 축대칭 3차원의 결과를 비교하여 제안한 방법의 정확성을 검증한다.

II. 3차원 유한요소해석

변위전류를 무시한 3차원 정자장의 지배방정식은 식(1)에서 정의되는 자기벡터포텐셜 \vec{A} 를 이용하여 표현하면 식(2)와 같이 된다.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{1}$$

$$\nabla \times v(\nabla \times \vec{A}) = \vec{J} \tag{2}$$

여기서, v : 자기저항률 [m/H]

지배방정식 (2)에 대해서 형상함수를 가중함수로 하는 Galerkin법을 적용하고 경계조건을 대입하여 계행렬 $[S]$ 과 구동항 $\{F\}$ 을 대입하면 다음 식과 같다.

$$[S] \{A\} = \{F\} \tag{3}$$

III. 전자력 계산

본 장에서는 전자력 계산에 사용되어 온 맥스웰응력법과 가상변위법의 기본원리에 대하여 설명한다.

1. 맥스웰응력법

자기력 밀도 \vec{f} 는 전류밀도 \vec{J} 와 자속밀도 \vec{B} 에 의해서 다음과 같이 표시된다.

$$\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B} \quad [N/m^3] \quad (4)$$

일반적으로 전자력 계산은 식 (4)의 로렌츠 식을 이용하지만 자장 속에서 전류가 흐르지 않는 영역의 전자력은 계산할 수 없다. 따라서 식 (5)와 같이 정의되는 맥스웰 응력 \vec{P} 를 이용하면 맥스웰응력법은 전류향을 자속밀도의 향으로 처리하므로 이러한 단점을 극복할 수 있다.

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} (\hat{n} \cdot \vec{B}) \vec{B} - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \hat{n} \quad [N/m^2] \quad (5)$$

윗 식을 이용하여 전 전자력을 표현하면 다음 식 (6)과 같이 표현된다. 그리고 식 (4)를 이용할 경우의 체적 적분에 비하여 면적분으로 전 전자력을 계산하므로 계산량을 줄일 수 있다.

$$\vec{F} = \int_v \vec{f} dv = \oint_s \vec{P} ds \quad (6)$$

위 식에 3차원 유한요소법의 결과에 적용한다. 3차원 문제에서 사면체 요소와 1차 형상함수를 사용하였으므로 자속밀도는 각각의 요소에서 일정한 값을 갖게 된다. 자속밀도와 수직외향단위벡터를 각각 직각좌표계의 성분으로 나누어 표현하면

$$\vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z} \quad (7)$$

$$\vec{n} = n_x \hat{x} + n_y \hat{y} + n_z \hat{z} \quad (8)$$

여기서, $\sqrt{(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)} = 1$

과 같고 n_x, n_y, n_z 는 \hat{n} 의 x, y, z 성분을 표시한다. 이를 식 (5)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{P} = & \frac{1}{\mu_0} [(B_x n_x + B_y n_y + B_z n_z)(B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z})] \\ & - \frac{1}{2\mu_0} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)(n_x \hat{x} + n_y \hat{y} + n_z \hat{z}) \end{aligned} \quad (9)$$

한 요소에 대한 힘 $\Delta \vec{F}$ 는 한 사면체 요소에서의 적분 경로의 면적 ΔS 와 맥스웰응력의 곱으로 표현된다.

$$\Delta \vec{F} = \vec{P} \Delta S \quad (10)$$

물체가 받는 총 힘은

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^e \Delta F_i \quad (11)$$

와 같이 전 적분 경로에 대한 힘의 합으로 표현된다. 여기서 i 는 적분 경로의 요소번호이고 e 는 적분 경로의 요소수이다.

여기서 자속밀도는 식 (1)의 자기벡터포텐셜의 정의로부터 구할 수 있다. 직각 좌표계에서 자속밀도는

$$\begin{aligned} \vec{B} = & \hat{x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \\ & + \hat{y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ & + \hat{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

와 같이 표현된다.

2. 가상변위법

가상변위법은 에너지를 기본으로 하여 전자력을 계산하는 방법이다. 가상 변위 p 를 고려하였을 때 p 방향으로의 전자력 F_p 는 시스템 자장 에너지 W 의 변화량을 계산함으로써 구할 수 있다.

$$F_p = - \frac{\partial W}{\partial p} \quad (13)$$

기존의 가상변위법을 이용한 전자력 계산법으로는 유한 차분에 의하여 다음식

$$F_p = \frac{W_2 - W_1}{\Delta p} \quad (14)$$

와 같이 계산하였다. 그러나 이 계산법은 요소 분할을 두 번하여 에너지를 구해야 하는 것과 Δp 를 설정하는 방법에 따라 결과의 차이가 많이나는 단점이 있다. 식 (13)을 직접 이용하면 유한요소 계행렬로 표현되는 전체 에너지를 직접 미분함으로 이러한 단점들을 극복할 수 있다.

전자장의 전체 자장 에너지 W 는 다음과 같다.

$$W = \int_v \int_0^H \vec{B} \cdot d\vec{H} dv \quad (15)$$

여기서 B 는 자속 밀도이고 H 는 자계의 세기이고 선형시스템에서 아래의 식과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} W &= \int \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} dv \\ &= \frac{1}{2} \sum_e \frac{V^e}{\mu^e} [(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)] \quad (16) \end{aligned}$$

다시 이 식을 3차원 유한요소법의 계행렬을 이용하면 다음과 같이

$$W = \frac{1}{2} \sum_e \{A\}^T [K] \{A\} \quad (17)$$

표현되며, 위 식에 식 (13)을 적용하면

$$F_p = - \frac{1}{2} \sum_e \frac{\partial}{\partial p} \{A\}^T [K] \{A\} \quad (18)$$

이고, 여기서 K 행렬을 다음과 같이 정의하면,

$$[K] = \frac{[S]}{36\mu^e V^e} \quad (19)$$

이고, 3차원에서 힘 F 의 x, y, z 성분은 다음과 같으며,

$$F_x = - \frac{1}{72} \sum_e \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\{A\}^T [S] \{A\}}{V^e} \right\} \quad (20)$$

$$F_y = - \frac{1}{72} \sum_e \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\{A\}^T [S] \{A\}}{V^e} \right\} \quad (21)$$

$$F_z = - \frac{1}{72} \sum_e \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\{A\}^T [S] \{A\}}{V^e} \right\} \quad (22)$$

같으며, 여기서 사면체요소의 체적 V 와 계행렬 S 의 편미분은

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x} \quad (23)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x} \quad (24)$$

와 같은 방법으로 수행한다. 이 때 $\frac{\partial x_i}{\partial x}$ 는 요소상의 i 번째 절점이 경계상에 있으면 1이고 그렇지 않을 경우는 0이 된다.

식(20) ~ (22)을 이용하여 전자력을 계산할 경우 힘을 받는 물체의 경계와 접하고 있는 요소를 제외한 모든 요소의 전자력이 '0'이 된다. 따라서 맥스웰응력법에서와 같이 경계상에 접한 요소의 전자력을 적분하여 물체가 받는 전 전자력을 구할 수 있다.

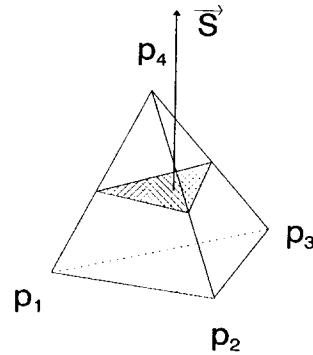


Fig 1. Integration plane of tetrahedral element

IV. 검증 및 적용례

제안한 3차원 전자력 계산방법은 축대칭 3차원의 결과와 비교하여 검증한다. 이를 위하여 축대칭 3차원 전자력 계산법의 검증이 필요하게 된다. 따라서 이 장에서는 축대칭 3차원의 검증은 해석해와 비교하여 검증하고 이로써 3차원 전자력 검증을 수행한다.

1. 축대칭 3차원 전자력 검증

축대칭 3차원의 전자력 계산법을 검증하기 위하여 Fig. 2와 같은 동축상의 두개의 자기쌍극자 간의 전자력을 해석적인 방법으로 구하고 이를 축대칭으로 계산한 결과와 비교하여 검증한다.

이 모델을 해석적으로 구하기 위하여 자기쌍극자의 단면적이 없는 것으로 가정하였으나 유한요소법에서는 각

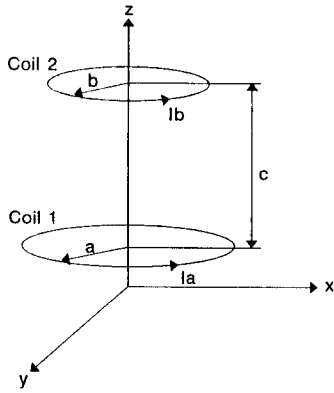


Fig 2. Coaxial dipole

각의 영역에 면적이거나 체적이 없으면 불가능하므로 2차원 문제처럼 모델링할 수 있는 3차원 축대칭 문제에서만 적용하였다.

동축상의 두개의 자기쌍극자 간의 전자력은 해석적으로 다음의 식으로 구할 수 있다.

$$F_z = \frac{\mu I_a I_b C}{\sqrt{(a+b)^2 + c^2}}$$

$$\left[\frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a-b)^2 + c^2} E(k_1) - K(k_1) \right] \quad (25)$$

여기서, $E(k_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \phi} d\phi$

$$E(k_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \phi}}$$

$$k_1^2 = \frac{4ab}{(a-b)^2 + c^2}$$

이고 $E(k_1)$ 과 $K(k_1)$ 의 계산은 Legendre 타원형 적분 (Legendre Elliptic Integral)으로 계산한다.

해석모델의 a, b, c 각각의 값을 0.1 m로 하고, I_a 와 I_b 를 594.5 A로 하여 동축상의 위에 위치한 자기 쌍극자가 받는 전자력은 Table I과 같다.

Table I. Force comparison of magnetic dipole

	Analytic Sol.	Virtual	Maxwell
F_z	-0.2539 N	-0.2544 N	-0.2544 N

위의 결과로부터 축대칭 3차원 전자력 계산의 정확성을 검증하였다.

2. 3차원 전자력 검증

3차원 전자력은 해석대상을 솔레노이드로 하여 축대칭 3차원으로 계산한 전자력과 비교하였다. 해석 대상은 Fig. 3과 같으며 권선의 전류는 θ 방향이며 전류밀도의 크기는 $10^7 A/m^2$ 이다. 그리고 요크와 센터폴의 비투자율은 1000이며 등방성 재질이다.

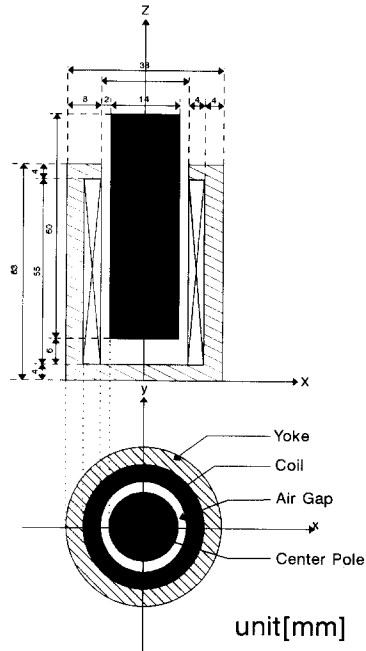


Fig 3. Solenoid

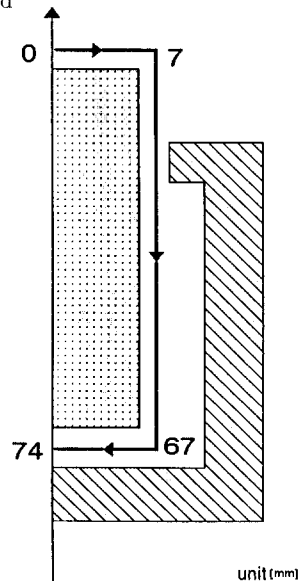
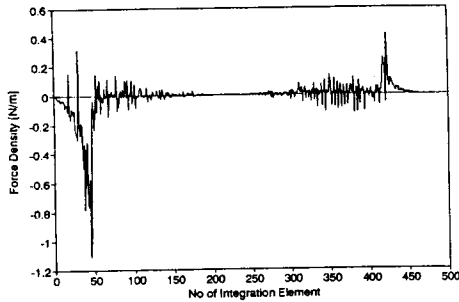


Fig 4. Integration path

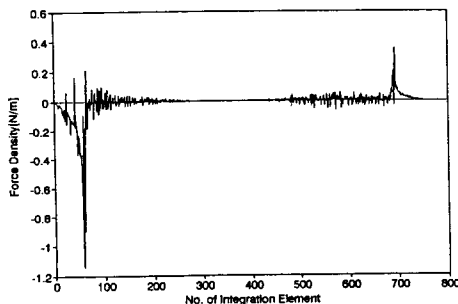
Fig. 4와 같은 적분경로를 따라서 맥스웰응력법과 가상변위법에 의한 Z방향 전자력밀도를 Fig. 5의 (a)와 (b)에 비교 도시하였다. 그리고 이들 방법을 축대칭 3차원과 3차원에 적분경로의 요소수를 달리하여 각각 적용한 결과가 Table II이다.

Table II. Force comparison of solenoid

Axisymmetric 3 dimensional			3 dimensional		
# of element	Maxwell	Virtual	# of element	Maxwell	Virtual
276	-8.979 N	-8.979 N	276 × 3 × 100	-9.0026 N	-9.0246 N
414	-9.173 N	-9.173 N	414 × 3 × 100	-9.1992 N	-9.1110 N
463	-9.526 N	-9.526 N	463 × 3 × 100	-9.7042 N	-9.5217 N
573	-9.429 N	-9.429 N	573 × 3 × 100	-9.6608 N	-9.4289 N
651	-9.527 N	-9.527 N	651 × 3 × 100	-9.7493 N	-9.5413 N
720	-9.750 N	-9.750 N	720 × 3 × 100	-9.8649 N	-9.7242 N
750	-9.843 N	-9.843 N	750 × 3 × 100	-9.9121 N	-9.7903 N



(a) In case, Number of element on integration path : 463



(b) In case, Number of element on integration path : 750

Fig 5. Comparison of force density

Table II에서 축대칭 3차원과 3차원의 결과가 적분경로상의 요소수가 증가함에 따라 전자력의 차이가 줄어드는 것을 볼 수 있다. 이는 3차원에서 요소의 모양에 의한 오차가 누적된 것으로 보면, 각각의 결과가 근사함을 확인할 수 있다. 그리고 Fig. 6으로부터 맥스웰 응력법과 가상변위법에 의하여 계산한 Z방향 전자력이 요소의 수가 충분히 많을 경우 수렴함을 확인할 수 있다.

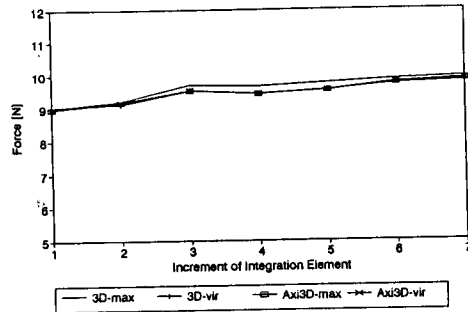


Fig 6. Comparison of electro-magnetic force

Fig 6. Comparison of electro-magnetic force

V. 결 론

본 논문에서는 3차원 유한요소해인 자기벡터포텐셜을 맥스웰 응력법과 가상변위법에 적용하여 전자력을 계산하는 방법을 제시하였다. 축대칭 3차원 해석이 가능한 솔레노이드를 해석대상으로 하여 축대칭 3차원과 3차원에서 맥스웰응력법과 가상변위법을 적분경로상의 요소수를 변화하면서 각각 적용하여 전자력을 계산하고 비교하였다. 여기서 적분경로상의 요소수가 증가됨에 따라 각각의 방법에 의한 전자력의 오차가 감소함을 확인하였다. 그리고 3차원에서 맥스웰응력법과 가상변위법에 의한 전자력 밀도를 비교하여 전자력 밀도의 분포가 같음을 확인하였다. 따라서 3차원의 복잡한 구조를 갖는 전기기계 각부분의 전자력을 계산하는 경우 제안한 방법의 유용함을 확인하였다.

앞으로 전자력 계산의 정확성을 증가시키기 위한 유한 요소의 모양과 적분경로의 선택에 관한 연구가 필요하다고 사료된다.

참 고 문 헌

[1] Durney and Johnson, "Introduction to Modern Electromagnetics", McGraw-Hill, 1969
 [2] J. L. Coulomb and G. Meunier, "Finite element

- implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation”, IEEE Transactions on Magnetics, **Vol. Mag-20**, No. 5, September 1984
- [3] J. L. Coulomb, “A methodology for the determination of global electromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic force, torques and stiffness”, IEEE Transactions on Magnetics, **Vol. Mag-19**, No. 6, November, 1983
- [4] M. Ito, F. Tajima, H. Kanajawa, “Evaluation of force calculation methods” IEEE Transactions on Magnetics, **Vol. Mag-26**, No. 2, March 1890
- [5] Basim F. Istfan, “Extension to the finite element method for nonlinear magnetic field problems”, Resselaeer Polytechnic Institute Troy, New-York August 1987
- [6] 이준호, “3차원 유한요소법에 의한 Can Stack PM 스텝모타의 자장해석” 단국대학교 1994
- [7] Milo tafl “Electrodynamics of Electrical Machines” ACADEMIA, prague, 1967
- [8] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery “Numerical Recips in C, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1992

Electromagnetic Force Calculation Using Magnetic Vector Potentials in 3-D Problems

Jae-Jin Yang

Technical Research Center Taihan Wire Co., LTD.

Bok-Yong Lee

Dept. of Electric Eng. Daeyeu Technical College

Ki-Sik Lee

Dept. of Electrical Eng. Dankook University

(Received 13 July 1995, in final form 10 May 1996)

Electric machines such as motors which have moving parts are designed for producing mechanical force or torque. The accurate calculations of electromagnetic force and torque are important in the design these machines. Electromagnetic force calculation method using the results of Finite Element Method(FEM) has been presented variously in 2-D problems. Typically the Maxwell's Stress Tensor method and the method of virtual work are used. The former calculates forces by integrating the surface force densities which can be expressed in terms of Maxwell Stress Tensor(MST), and the latter by differentiating the electromagnetic energy with respect to the virtual displacement of rigid bodies of interest. In the problems including current source, magnetic vector potentials(MVP) have mostly been used as unknown variables for field analysis by a numerical method; e. g. FEM. This paper, thus, introduces the two both methods using MVP in 3-D case. To verify the usefulness of presented methods, a solenoid model is chosen and analyzed by 3-D and axisymmetric FEM. It is found that the force calculation results are in good agreement for several mesh schemes.

Key Word : Finite Element Method(FEM, 유한요소법)
Magnetic Vector Potential(MVP, 자기벡터포텐셜)
Maxwell Stress Tensor Method(맥스웰응력법)
Virtual Displacement Method(가상변위법)