

주기적인 Cellular 유동장내에 놓여진 비대칭형 입자의 운동에 관한 연구

김 윤 제

성균관대학교 기계공학부
(1996년 5월 30일 접수)

Motions of Asymmetric Particles in A Periodic Cellular Flowfield

Youn Jea Kim

School of Mechanical Engineering, Sung Kyun Kwan University, Suwon 440-746, Korea
(Received May 30, 1996)

요 약

2차원 비점성 Euler 방정식의 Stuart 해에 의하여 주어지는 주기적인 유동장, 소위 말하여 Stuart 와동장내에 놓여있는 아주 작은 비대칭성 입자의 다양한 부력 변수에 따른 침강운동을 고찰하였다. 본 연구에서 사용한 수치방법은 매질의 준정적인 Stokes 방정식과 입자의 평형방정식을 연계하였다. 다양한 초기 배향각, 또는 형상비에 따른 궤적이나 각변화를 예측하기 위하여 힘과 토크 관계식을 입자의 운동방정식에 적용하였으며, 4차 Runge-Kutta 방정식을 이용하여 입자의 운동을 규명하였다.

Abstract—The gravitational settling of a small asymmetric particle in a two-dimensional periodic flow given by Stuart solution of the inviscid Euler equations, the so-called Stuart vortex flow field, is investigated with various buoyancy parameters. The numerical scheme used in this study couples the quasi-static Stokes equations for the fluid with the equilibrium equations for the particles. The force and torque expressions are used in the equations of motion of the particle, to predict the trajectory and orientation histories for a variety of initial orientations and length-to-diameter ratios. The equations of these dynamical systems are solved by using the fourth-order Runge-Kutta scheme.

Keywords: Stuart vortex flowfield, asymmetric particle, buoyancy parameters, trajectories.

1. 서 론

미립자, 액적(droplets), 또는 폴리머 분자와 같은 마이크로 입자의 부유 유동(suspension)에 따른 동적특성은 많은 분야에 중요한 연구대상이 되고 있다. 특히, cellular 또는 와동장(vortex flowfield)내에 놓여진 입자가 갖는 침강운동(sedimentation)에 관해서는 지금까지 많은 연구논문들이 발표되었다[1-5]. Stommel(1)은 2차원, 비압축성, 정상상태의 cellular 유동장내에 놓여있는 작은 구형 입자가 무한히 오래 갖힌 상

태로 존재함을 규명하였으며, Tooby 등(2)은 중력방향에 수직축을 갖는 와동장내 작은 구형 입자가 일정한 궤적(trjectories)을 따라 움직임을 실험적으로 고찰하였다.

Stuart 와동장내의 무거운 구형 입자에 관한 보다 상세한 연구는 Gañán-Calvo & Lasheras(6)에 의하여 행하여졌는데, 그들은 운동방정식에 점성 항력과 중력항을 고려하여 해를 구하였다. 초기조건에 따라 입자는 중력에 의하여 침강하든지, 또는 와동위의 일정한 궤적을 따라 무한한 부유 유동을 갖게됨을 밝혔는데, 부유 유동

시 입자는 주기성(periodic), 준주기성(quasi-periodic), 또는 혼돈성(chaotic)의 궤적을 갖고 움직인다고 규명하였다.

하지만, 본 연구에서는 이러한 대칭성을 갖는 구형 입자가 아닌 비대칭성 입자의 와동장내 운동을 예측하고자 한다. 연구의 주된 관점으로는 와동장의 유동 변형율과 증력장에 의한 침강운동의 상대적인 비율로 표기할 수 있는 입자의 다양한 부력 변수(buoyancy parameter) 영향을 고찰하고자 한다. 따라서, 2장에서는 Stuart 와동장의 이론적 배경과 Stokes 방정식을 취급하며, 3장에서는 입자에 미치는 힘과 토크를 계산하기 위한 새로운 고계(higher-rank)의 저항계수를 구하는 방법과 운동 방정식을 논한다. 이러한 결과를 이용하여 부력 변수에 따른 입자의 궤적을 4장에 기술하고자 한다.

2. 이론적 배경

2.1 Stuart 와동장

본 연구에서 고려한 유동장은 2차원, 정상상태, 비점성 유동이라 가정하였으며, Stuart(4)에 의하여 정의된 Euler 방정식 해의 유동함수(stream function)는 다음과 같다.

$$\Psi = \frac{\lambda U_\infty}{2\pi} \ln \left[\cosh \left(\frac{2\pi s_2^*}{\lambda} \right) - k \cos \left(\frac{2\pi s_1^*}{\lambda} \right) \right] \quad (1)$$

위 식에서 U_∞ 는 자유유동 속도, λ 는 두개의 접촉하는 와동간의 거리, k 는 와동의 공간 분포를 결정하는 변수를 나타내는데, $k=0$ 은 \tanh 함수의 속도 파형을 갖는 균일한 와동 분포를 갖는 유동함수를 나타내며, $k=1$ 은 거리 λ 만큼 떨어진 점와동(point vortex) 배열로 주어지는 유동장을 갖게 된다. 또한, 식(1)은 다음과 같은 와도(vorticity: ζ)로 주어지는 비점성 와도 방정식 $\nabla^2 \Psi = \zeta(\Psi)$ 을 만족한다.

$$\zeta(\Psi) = \frac{2\pi U_\infty}{\lambda} (1-k^2) e^{-4\pi\Psi/\lambda U_\infty} \quad (2)$$

무차원화된 지배방정식을 구하기 위하여 본 연구에서는 다음과 같은 무차원수를 정의하였다.

$$u = \frac{u^*}{U_\infty}, v = \frac{v^*}{U_\infty}, s_i = \frac{s_i^*}{\lambda/2\pi}, \tau = \frac{t^*}{\lambda/2\pi} U_\infty \quad (3)$$

공간좌표계(s_1, s_2, s_3)에서 갖는 각 방향의 단위벡터를 $\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3$ 라 하면, 유체가 갖는 속도장($\mathbf{u} = u \hat{s}_1 + v \hat{s}_2$)은 식(1)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial s_2} = -\frac{\sinh s_2}{\cosh s_2 - k \cos s_1} \quad (4)$$

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial s_1} = \frac{k \sin s_1}{\cosh s_2 - k \cos s_1} \quad (5)$$

그리고, 교란되지 않은 유동의 변형율(shear strain dyadics)은 다음과 같다.

$$S = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t) = \mathbf{A}(\hat{s}_1 \hat{s}_2 - \hat{s}_2 \hat{s}_1) + \mathbf{B}(\hat{s}_1 \hat{s}_2 + \hat{s}_2 \hat{s}_1) \quad (6)$$

위 식에서

$$\mathbf{A} = \frac{k \sin s_1 \sinh s_2}{H^2}$$

$$\mathbf{B} = \frac{2k \cos s_1 \cosh s_2 - k^2 - 1}{2H^2}$$

$$H = \cosh s_2 - k \cos s_1$$

또한, 식(2)의 와도 함수(vorticity function)는 다음과 같이 무차원화하였다.

$$\omega_f = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} = \frac{1-k^2}{H^2} \hat{s}_2 \quad (7)$$

Fig. 1은 $k=0.25$ 일때의 Stuart 와동장을 나타내며, 증력은 음의 s_2 -방향으로 작용한다고 하였다.

2.2 Stokes 방정식

관성의 영향이 별로 중요하지 않는 Stokes 유동 영역은 다음과 같은 지배방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{V}; \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (8)$$

또한, 입자 표면(S_f)과 입자로 부터 멀리 떨어진 점의 경계조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \text{on } S_f \quad (9)$$

$$\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}_o + \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \quad (10)$$

위 식에서 \mathbf{U}_o 와 $\boldsymbol{\omega}$ 는 각각 입자의 병진과 회전 속도를

나타내며, u_0 은 자유유동 속도이다. 그리고, r 은 다음식으로 표기되는 원점으로 부터 입자 단면 중심선까지의 거리 벡터이다.

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \quad (11)$$

입자 단면의 중심선을 다음식으로 나타낼 수 있는 나선형 사상체를 본 연구의 비대칭성 입자 모델로 택하고자 한다.

$$x = a \cos u, \quad y = a \sin u, \quad z = bu; \quad 0 \leq u \leq 2n\pi \quad (12)$$

위 식에서 $a(=D/2)$ 는 코일 반경, $2\pi b$ 는 코일의 피치(pitch), 그리고 n 은 임의의 실수값으로 표현할 수 있는 코일의 회전수를 각각 나타낸다. 따라서 코일의 전체 높이는 $L(=2\pi nb)$ 이며, u 는 임의의 작용점(field point)에서 입자가 xy -평면과 만드는 형상각을 나타낸다(참고 문헌[7]의 Fig. 1, 2 참조). 한편, 입자의 전체 길이는 $2l$, 입자 단면의 직경은 d 로 하여, 사상체 이론(slender body theory)에 적합한 세장비(slenderness ratio: $\varepsilon = d/2l \ll 1$)를 정의하였다[8].

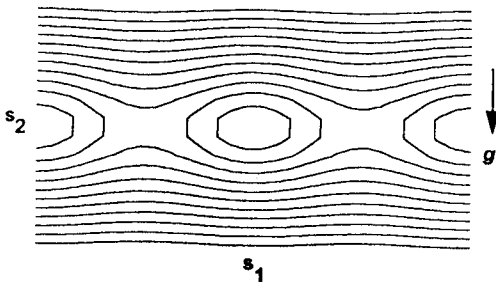


Fig. 1. Stuart vortex flowfield for $k=0.25$.

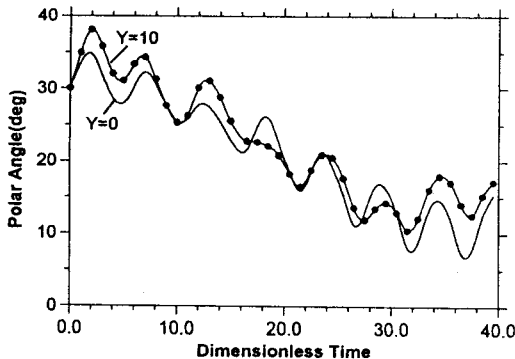


Fig. 2. Polar angle histories for $L/D=1, n=2, d/D=0.01$ with $\phi_0/\delta_i/\psi_r=30^\circ/30^\circ/0^\circ$.

3. 해석 방법

김윤제 등[7]은 사상체 이론을 이용하여 전단흐름이 없는 무한한 매질에 놓여진 입자의 수동력학적 저항 및 이동계수를 계산하였다. 하지만, 전단흐름장에 놓여진 입자의 운동을 해석하기 위해서는 보다 더 복잡한 새로운 고계의 저항계수를 필요로 한다. 즉, 무한 유체속의 입자가 받는 힘과 토크를 구하기 위하여 필요한 3가지 2계 텐서(dyadics), 즉, 병진(translational: \mathbf{K}), 회전(rotational: $\mathbf{\Omega}$), 연결텐서(coupling: \mathbf{C})와 더불어 3계 텐서(triadics)인 전단-힘 텐서(shear-force triadics: $\mathbf{\Phi}_c$)와 전단-토크 텐서(shear-torque triadics: $\mathbf{\Psi}_c$)의 규명이 필요하다[9]. 이러한 다중텐서(polyadics)와 선형 및 각속도 벡터를 이용하여 Stuart 와동장에 놓여진 입자의 질량 중심점(본 고에서는 하첨자 c 로 표기함)에서 받게 되는 힘과 토크는 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \{\mathbf{F}\} \\ \{\mathbf{T}_c\} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} [\mathbf{K}] & [\mathbf{C}_c] \\ [\mathbf{C}_c] & [\mathbf{\Omega}_c] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{\Phi}_c] \\ [\mathbf{\Psi}_c] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbf{U}_c - \mathbf{u}_c\} \\ \{\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_c\} \\ \{\mathbf{S}\} \end{bmatrix} \quad (13)$$

위 식에서 상첨자 \dagger 는 전치행렬(transpose matrix)을 나타내며, 텐서 \mathbf{K} 는 l , $\mathbf{C}_c, \mathbf{\Phi}_c$ 는 l^2 , $\mathbf{\Omega}_c, \mathbf{\Psi}_c$ 는 l^3 , 그리고 \mathbf{F}, \mathbf{T}_c 는 각각 $\mu G l^2, \mu G l^3$ 로 무차원화하였는데, G 는 유동장의 속도 구배 크기(velocity gradient magnitude)이다. 또한, 3계 텐서와 2계 텐서의 이중 내적(double dot product)은 다음과 같이 정의하였다[9].

$$\begin{aligned} A : \mathbf{S} &= \sum A_{ijk} \mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k} : S_{lm} \mathbf{l} \mathbf{m} \\ &= \sum A_{ijk} S_{lm} \mathbf{i}(\delta_{kl})(\delta_{jm}) \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 δ_{kl}, δ_{jm} 는 Kronecker delta 함수이다.

이러한 3계 텐서를 찾아내기 위해서는 2계 텐서에서와는 다른 단위 운동을 고려해야 한다. 2계 텐서를 규명할 때에는 입자가 갖는 병진운동(translation)과 회전운동(rotation)의 6자유도(six-degree of freedom)를 갖는 단위 운동으로부터 구할 수 있었지만(좀더 자세한 설명을 원하는 독자는 참고문헌[7]을 참조하기 바란다), 3계텐서의 저항계수를 구하기 위해서는 또다른 6자유도를 갖는 운동을 이용해야 한다. 즉, 식(6)에 표기된 2계텐서의 유동 변형율을 이용하여 다음과 같은 6개의 단위 운동으로부터 구할 수 있게 된다.

CASE	S ₁₁	S ₂₂	S ₃₃	S ₁₂	S ₁₃	S ₂₃
1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	0	1
4	-1	1	0	0	0	0
5	0	-1	1	0	0	0
6	1	0	-1	0	0	0

처음 3가지 경우는 균일한 전단유동(homogeneous shear flow)을 나타내며, 나머지 3가지 단위운동은 2차원, 직방 쌍곡선형 전단유동(rectangular hyperbolic shear flow)을 내포한다. 예를 들어, 두 번째 경우의 단위운동으로 부터는 다음과 같은 속도장과 유동 변형율을 각각 갖게 된다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= s_3 \hat{s}_1 \\
 \mathbf{S} &= \frac{1}{2} (\hat{s}_1 \hat{s}_3 + \hat{s}_3 \hat{s}_1)
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

이와 같은 결과를 바탕으로, 두 번째 경우로 부터는 다음과 같은 3계 텐서 요소를 구할 수 있게 된다.

$$2A_{ijk} = -B_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{16}$$

여기서, B_i 는 입자가 s_i -방향으로 받게 되는 힘 또는 토

오크를 나타낸다.

3계 텐서를 구하는 위의 계산 방법을 검증하기 위하여 널리 알려진 Jeffery의 침상체가 갖는 다음의 엄밀해와 비교하였는데(9), 전단-힘텐서는 침상체가 갖는 기하학적 대칭성 때문에 제로값을 갖게 된다.

$$\begin{aligned}
 \Phi_c &= 0 \\
 \Psi_c &= \frac{8\pi}{3} \left[\frac{a_2^2 - a_3^2}{a_2^2 \chi_3 + a_3^2 \chi_2} (\hat{c}_1 \hat{s}_2 \hat{s}_3 + \hat{c}_1 \hat{s}_3 \hat{s}_2) \right. \\
 &\quad + \frac{a_1^2 - a_3^2}{a_1^2 \chi_1 + a_3^2 \chi_3} (\hat{c}_2 \hat{s}_3 \hat{s}_1 + \hat{c}_2 \hat{s}_1 \hat{s}_3) \\
 &\quad \left. + \frac{a_2^2 - a_1^2}{a_2^2 \chi_2 + a_1^2 \chi_1} (\hat{c}_3 \hat{s}_1 \hat{s}_2 + \hat{c}_3 \hat{s}_2 \hat{s}_1) \right] \\
 \chi_{i(i=1,2,3)} &= \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_i^2 + \lambda) \sqrt{(a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda)}} \tag{17}
 \end{aligned}$$

위 식에서 $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3$ 는 질량 중심 좌표계 각 방향의 단위 벡터를 의미하며, $a_{i(i=1,2,3)}$ 는 입자의 장·단축($a_1 = a_2 = d/2, a_3 = l$)을, 그리고 λ 는 임의의 변수를 나타낸다. 위 식을 이용한 형상비(aspect ratio) $\epsilon = 0.01$ 의 침상체가 갖는 3계텐서 값과 본 연구에서 개발한 수치 해석 결과를 Table 1에 비교하였는데, 일치된 결과를 보여주고 있음을 알 수 있다.

Table 1. Third-rank tensors for a slender needle with $\epsilon = 0.01$

		equation(17)	Present Study		
Φ_c	Φ_{ijk}	0	-9.537E -07	-6.408E -05	-2.384E -07
	Φ_{3jk}		-6.408E -05	4.768E -07	-8.958E -11
	Φ_{3jk}		-2.384E -07	-8.958E -11	-9.537E -07
Ψ_c	Ψ_{ijk}	0 0 0	5.821E -11	-7.153E -07	-5.821E -11
		0 0 0.872	-7.153E -07	5.487E -04	8.733E -01
		0 0.872 0	-5.821E -11	8.733E -01	-5.487E -04
	Ψ_{3jk}	0 0 -0.872	5.960E -07	-2.744E -04	-8.733E -01
		0 0 0	-2.744E -04	-8.345E -07	8.731E -11
		-0.872 0 0	-8.733E -01	8.731E -11	-5.960E -07
Ψ_{3jk}	0	-4.075E -10	4.768E -07	2.744E -04	
		4.768E -07	5.239E -10	7.153E -07	
		2.744E -04	7.153E -07	5.821E -11	

본 고에서 고려한 나선형 사상체는 대칭성을 내포하고 있지 않기 때문에, 일반적으로 저항 텐서의 모든 요소들은 영이 아닌 값을 갖는다. 저항계수는 입자의 기하학적 형상에 따라 크게 영향을 받게 되는데, 와동장에 놓여 있는 나선형 사상체는 21개의 2계 텐서 요소와 30개의 3계 텐서 요소값을 갖게 된다.

Newton의 운동법칙으로부터, 입자에 작용하는 모든 외력은 준 정적인 수동력(quasi-static hydrodynamic force), 부력(buoyant force), 중력 등의 합으로 구성된다고 할 수 있다. 또한, 임의의 점에서 갖게 되는 전체 토오크는 수동력과 부력에 의하여 야기되는 토오크의 합으로 나타낼 수 있다. 본 연구에서 선택한 입자는 균일 밀도를 갖는다고 가정하였기 때문에 부력에 의하여 생성되는 토오크는 무시하였다. 따라서, 입자의 질량 중심점을 기준으로 병진운동과 회전운동 관계식은 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$\frac{d\mathbf{U}_c}{d\tau} = \mathbf{F} + Y\hat{\mathbf{s}}_2 \tag{18}$$

$$\mathbf{M}_c \frac{d\boldsymbol{\omega}_c}{d\tau} + \boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{M}_c \cdot \boldsymbol{\omega}_c = \mathbf{T}_c \tag{19}$$

여기서 \mathbf{M}_c 는 입자의 질량 중심점에서 갖게 되는 2계 텐서의 관성 모멘트(moment-of-inertia)이며, Y 는 부력변수(buoyancy parameter)로서 다음과 같이 정의된다.

$$Y \sim \frac{(m_p - m_f)g}{\mu G l^2} \tag{20}$$

위 식에서 m_p 와 m_f 는 각각 입자의 질량과 입자에 의하여 배제된 유체 질량을 말한다.

관성의 영향이 중요하지 않는 Stokes 유동에서, 식(18), (19)의 좌변 가속도항은 무시할 수 있기 때문에 선형과 각운동량 방정식은 병진과 각속도 방정식으로 나타낼 수 있다. 따라서 이러한 결과식으로 부터 입자의 각속도와 선형속도 관계식은 식(13)을 이용하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\boldsymbol{\omega}_c = \boldsymbol{\omega}_c + \mathbf{B}_c \cdot Y\hat{\mathbf{s}}_2 + \mathbf{P}_c \cdot \mathbf{S} \tag{21}$$

$$\mathbf{U}_c = \mathbf{u}_c + \mathbf{R}_c \cdot Y\hat{\mathbf{s}}_2 + \mathbf{Q}_c \cdot \mathbf{S} \tag{22}$$

위 식에서 2계 텐서 \mathbf{B}_c 와 \mathbf{R}_c 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{B}_c = [\mathbf{K} \cdot \mathbf{C}_c^{-1} \cdot \boldsymbol{\Omega}_c - \mathbf{C}_c^{-1}]^{-1}$$

$$\mathbf{R}_c = -\mathbf{C}_c^{-1} \cdot \boldsymbol{\Omega}_c \cdot \mathbf{B}_c$$

또한, 3계 텐서 \mathbf{P}_c 와 \mathbf{Q}_c 는 2계 텐서의 함수임을 알 수 있으며, 전단-힘/토오크 텐서에 영향을 받는다.

$$\mathbf{P}_c = \mathbf{B}_c \cdot (\boldsymbol{\Phi}_c - \mathbf{K} \cdot \mathbf{C}_c^{-1} \cdot \boldsymbol{\Psi}_c)$$

$$\mathbf{Q}_c = [\mathbf{C}_c \cdot \boldsymbol{\Omega}_c^{-1} \cdot \mathbf{C}_c - \mathbf{K}]^{-1} \cdot (\boldsymbol{\Phi}_c - \mathbf{C}_c^{-1} \cdot \boldsymbol{\Omega}_c^{-1} \cdot \boldsymbol{\Psi}_c)$$

입자의 배향성을 고찰하기 위해서는 두좌표계의 상관관계식을 필요로 한다. 즉, 입자의 질량 중심을 원점으로 하는 입자 고정(body-fixed) 좌표계와 공간 고정(space-fixed) 좌표계 사이의 변환인데, Euler각(Euler angle)인 방위각(azimuthal), 극각(polar), 회전각(roll)을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다[10].

$$\begin{Bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{c}_3 \end{Bmatrix} = [m_{ij}] \begin{Bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \end{Bmatrix} \tag{23}$$

위 식에서 $[m_{ij}]$ 의 역행렬은 전치행렬과 같으며, 행렬요소는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m_{11} &= \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi \\ m_{12} &= \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \cos \theta \sin \psi \\ m_{13} &= \sin \theta \sin \psi \\ m_{21} &= -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi \\ m_{22} &= -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi \\ m_{23} &= \sin \theta \cos \psi \\ m_{31} &= \sin \phi \sin \theta \\ m_{32} &= -\cos \phi \sin \theta \\ m_{33} &= \cos \theta \end{aligned}$$

이러한 좌표 변환 관계식을 이용하여, Euler각의 변화율은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{1}{\sin \theta} (\sin \psi \omega_{c1} + \cos \psi \omega_{c2}) \\ &= \omega_{s3} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\sin \phi \omega_{s1} - \cos \phi \omega_{s2}) \end{aligned} \tag{24}$$

$$\frac{d\delta}{d\tau} = \cos \psi \omega_{c1} - \sin \psi \omega_{c2}$$

$$= \cos\phi \omega_{s1} + \sin\phi \omega_{s2} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\tau} &= \omega_{c3} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(\sin\psi \omega_{c1} + \cos\psi \omega_{c2}) \\ &= \frac{1}{\sin\theta}(\sin\phi \omega_{s1} - \cos\phi \omega_{s2}) \end{aligned} \quad (26)$$

마지막으로, 공간 고정 좌표계에서 입자의 질량 중심점이 갖는 궤적은 다음식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\frac{ds_i}{d\tau} = U_{ci} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (27)$$

여기서, U_{ci} 는 무차원화된 입자 중심점에서의 병진속도이다.

4. 궤 적

주어진 입자의 초기 위치와 배향성(Euler각)의 초기조건을 갖고 입자가 갖는 운동을 예측할 수 있다. 본 연구에서는 4차 Runge-Kutta 기법을 이용하여 식 (24)~(27)의 해를 구하였다. 일정한 코일 직경 D 와, $L/D=1$, $n=2$, $d/D=0.01$ 의 기하학적 구조를 갖는 나선형 사상체가 임의의 초기 Euler각 $\phi_i/\delta_i/\psi_i=30^\circ/30^\circ/0^\circ$, 초기 위치 $s_1/s_2/s_3=1/0/1$ 일때, 다양한 부력 변수에 대한 궤적을 Fig. 2~6에 도시하였다. Fig. 2와 3은 각각 극각과 회전각의 변화를 나타내는데, 두가지의 주기성을 내포하고 있음을 보여주고 있다. 즉, 단주기성(short-term period)과 장주기성(long-term period)의 사인파(sinusoidal)진동을 말하는데, 이러한 현상을 보다 상세히 관찰하기 위하여 $Y=1$ 을 갖는 기준입자의 무차원 시간 $\tau=500$ 까지의 Euler 각 변화를 Fig. 4에 나타내었다. 또한, 본 고

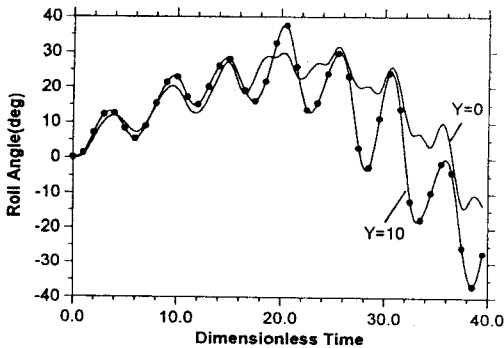


Fig. 3. Roll angle histories for $L/D=1$, $n=2$, $d/D=0.01$ with $\phi_i/\delta_i/\psi_i=30^\circ/30^\circ/0^\circ$.

에서는 도시하지 않았지만, 방위각은 지속적으로 선형적인 증가 현상을 보여주었다. 이는 향후 계산시간의 단축을 위한 근사 방정식(approximate equation)의 유효도가능함을 나타낸다고 할 수 있다.

Fig. 5는 s_1 -방향으로 갖게 되는 입자의 이력(history)을 도시하였는데, 무거운 입자일 수록 와동장을 따라 움직임을 알 수 있다. 하지만, Y 값이 작은 잘 뜨는 입자(buoyant particles)의 경우에는 초기 위치에서 크게 벗어나지 않고 부유함을 보여주고 있다.

Fig. 6으로 부터 무거운 입자일 수록 중력 방향으로 침강하는 속도가 빨라짐을 볼 수 있으며, 와동이 지배하는 유동과 중력에 의한 침강운동이 지배하는 유동간의 부력 변수 경계값 Y 는 1과 5 사이에 있음을 알 수 있다.

Fig. 7과 8은 기준 입자의 초기 배향각은 같지만, s_2 -방향의 초기 위치가 각각 다른 입자의 궤적을 s_1s_2 -평면위에 도시하였다. Fig. 5와 6의 결과로 부터 유추할 수 있듯이 Y 값이 작은 입자는 일정한 밀폐된 궤적 안에서

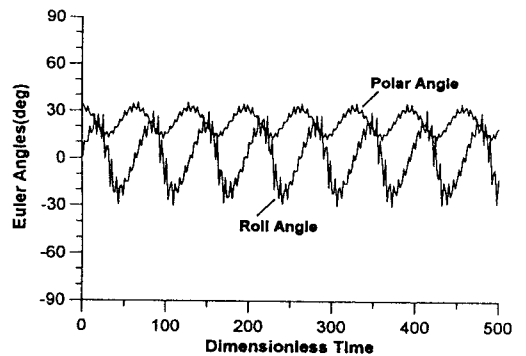


Fig. 4. Euler angles histories for $L/D=1$, $n=2$, $d/D=0.01$, $Y=1$ with $\phi_i/\delta_i/\psi_i=30^\circ/30^\circ/0^\circ$.

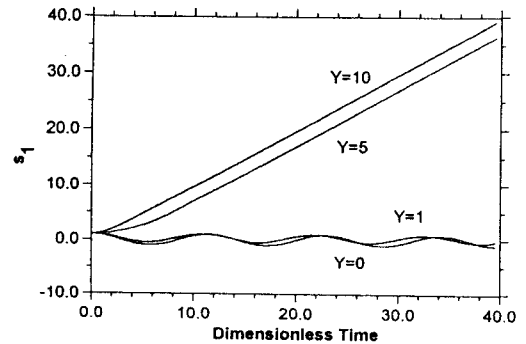


Fig. 5. Center of mass histories along the s_1 -direction with initial condition $\phi_i/\delta_i/\psi_i=30^\circ/30^\circ/0^\circ$.

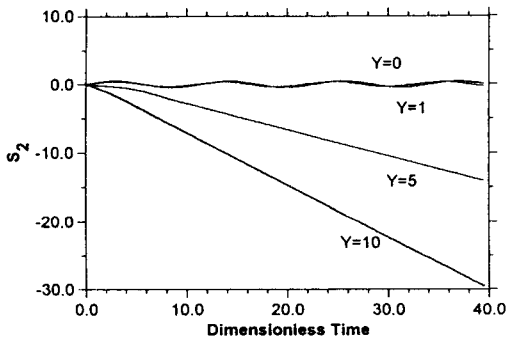


Fig. 6. Center of mass histories along the s_2 -direction with initial condition $\phi_i/\delta_i/\psi_i=30^\circ/30^\circ/0^\circ$.

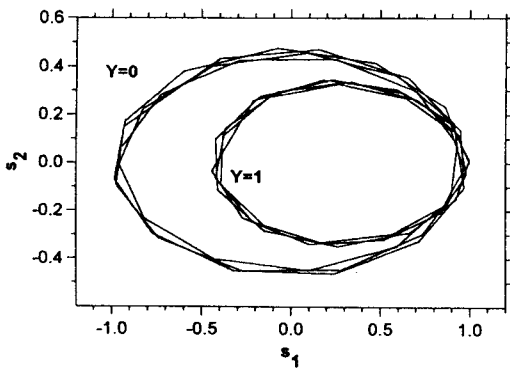


Fig. 7. Trajectories of particles for $L/D=1$, $n=2$, $d/D=0.01$ with $\phi_i/\delta_i/\psi_i/s_1/s_2/s_3=30^\circ/30^\circ/0^\circ/1/0/1$ in the s_1s_2 -plane.

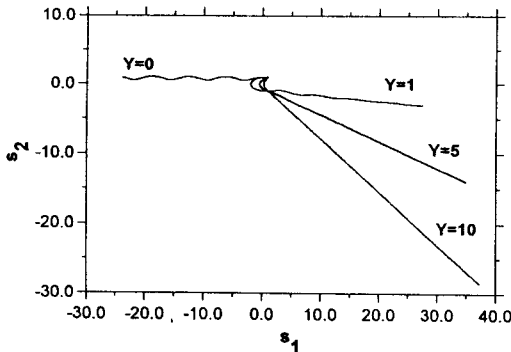


Fig. 8. Trajectories of particles for $L/D=1$, $n=2$, $d/D=0.01$ with $\phi_i/\delta_i/\psi_i/s_1/s_2/s_3=30^\circ/30^\circ/0^\circ/1/1/1$ in the s_1s_2 -plane.

유동하게 되지만, Fig. 7에서 처럼 s_2 -방향의 초기 위치를 약간만 변경시킬 경우 입자는 와동장내 하나의 유선

을 따라 거동함을 알 수 있다.

이러한 다양한 초기 조건에 따른 입자의 운동을 보다 더 총괄적으로 고찰하기 위해서는 2차원의 위상도 (phase-plane diagram)를 이용하는 것도 좋은 방법일 것이다. 즉, 극각-회전각 평면위에 배향각 변화의 이력을 도시한후, 안장점(saddle point), 초점(focus)등의 특이점을 고려하여 종단운동(terminal motion)을 갖게 되는 입자의 초기 배향성을 유추할 수 있는 방법을 말하는데, 현단계에서는 이 방법을 고려하지 않았다.

5. 결 론

부력 변수를 도입하여 주기적인 Stuart 와동장에 놓여진 무겁거나 잘 뜨는 입자의 운동에 관하여 고찰하였다. 무한 점성 유체장에서와는 달리 전단흐름장에서의 입자운동을 예측하기 위해서는 2계 텐서의 저항계수 뿐만 아니라 고계, 즉 3계 이상의 다중텐서가 필요하였다. 본 연구에서 고려한 비대칭형 입자의 운동을 규명하기 위해서는 21-요소의 2계 저항계수와 더불어 30-요소의 3계 전단-힘/토크 텐서를 합한 51개의 저항계수가 필요하였으며, 사상체 이론을 이용하여 구하였다.

입자의 초기 조건에 따라 밀폐된 궤적에 갇힌 입자의 거동을 확인할 수 있었는데, 장시간의 계산시간을 요하는 단점이 있었다. 따라서, 위상도를 이용한 입자의 거동 예측 프로그램 개발시 입자 거동을 제어·예측하는데 많은 도움이 될것이다. 또한, 보다 효율적인 계산시간의 단축을 위한 새로운 계산기법과 방위각을 이용한 근사 방정식의 유도가 가능하리라 사료된다.

기 호

- a : helical coil radius(= $D/2$)
- a_1, a_2, a_3 : the semi-axes of an ellipsoidal particle
- c_1, c_2, c_3 : particle center of mass coordinate system
- $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3$: unit vectors for the center of mass coordinate system
- C_c : coupling tensor referred to the center of mass
- d : filament diameter
- F : force on the particle

- G : velocity gradient magnitude
 \mathbf{K} : translation resistance tensor
 k : parameter of a spatial vorticity distribution ($k=0$: uniform vorticity, $k=1$: a row of point vortices)
 m_f : mass of the displaced fluid
 m_p : mass of the particle
 \mathbf{M}_c : moment of inertia tensor
 n : number of turns in the helix
 o : origin of a coordinate system
 p : pressure
 s_1, s_2, s_3 : space-fixed coordinate system (s_2 vertically up)
 $\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3$: unit vectors for the space-fixed coordinate system
 S_f : slender-body surface
 \mathbf{T}_c : torque on the particle about center of mass
 τ : dimensionless time
 $\mathbf{U}_o(\mathbf{U}_c)$: particle translational velocity (about center of mass)
 \mathbf{u} : approach fluid velocity
 Y : buoyancy parameter
- λ : distance between two contiguous vortices
 μ : fluid viscosity
 ϕ, δ, ψ : Euler angles of azimuthal, polar and roll directions
 Φ_c, Ψ_c : third-rank resistance tensors referred to the center of mass
 Ψ : stream function
 Ω_c : rotation resistance tensor, referred to the center of mass
 ω_c : particle dimensionless angular velocity about center of mass
 $\omega_f(\omega_{fc})$: dimensionless fluid spin vector (at center of mass)

참고문헌

1. H. Stommel, *J. Mar. Res.*, **8**, 24 (1949).
2. P. F. Tooby, G. L. Wick, and J. D. Isaacs, *J. Geophys. Res.*, **82**, 2096 (1977).
3. M. R. Maxey, *Phys. Fluids*, **30**, 1915 (1987).
4. J. T. Stuart, *J. Fluid Mech.*, **29**, 417 (1967).
5. J. B. McLaughlin, *Phys. Fluids*, **31**, 2544 (1988).
6. A. M. Gañán-Calvo and J. C. Lasheras, *Phys. Fluids*, **A3**(5), 1207 (1991).
7. 김윤제, 김선철, 배윤영, *유변학*, **7**, 101 (1995).
8. R. E. Johnson, *J. Fluid Mech.*, **99**, 411 (1980).
9. H. Brenner, *Chemical Eng. Sci.*, **19**, 631 (1964).
10. H. Goldstein, "Classical Mechanics", 2nd ed., Addison-Wesley Press, Reading, Massachusetts (1980).

그리스 문자

- δ_{kl}, δ_{jm} : Kronecker delta
 ε : slenderness parameter ($=d/2l$)
 ζ : vorticity