

개수로내의 점변 및 급변 부정류에 대한
유한요소해석 : I. 이론 및 수치안정성 해석
Finite Element Analysis of Gradually and Rapidly Varied Unsteady
Flow in Open Channel : I. Theory and Stability Analysis

한 건 연* · 박 재 홍** · 이 종 태***
Han, Kun Yeun · Park Jae Hong · Lee Jong Tae

Abstract

A finite element model for simulating gradually and rapidly varied unsteady flow in open channel is developed based on dynamic wave equation using Petrov-Galerkin method. A matrix stability analysis shows the selective damping of short wave lengths and excellent phase accuracies achieved by Petrov-Galerkin method. Whereas the Preissmann scheme displays less selective damping and poor phase accuracies, and Bubnov-Galerkin method shows nondissipative characteristics which causes a divergence problem in short wave length. The analysis also shows that the Petrov-Galerkin method displays the desirable combination of selective damping of high frequency progressive waves over a wide range of Courant number and good phase accuracy at low Courant number. Therefore, the Petrov-Galerkin can be effectively applied to gradually and rapidly varied unsteady flow.

요 지

개수로내의 점변 및 급변 부정류 해석을 위해서 dynamic wave 식을 기본방정식으로 하고 이를 불연속 보간함수와 upstream weighting을 도입한 Petrov-Galerkin 기법에 의해 해석하는 유한요소모형을 개발하였다. 매트릭스 안정성 해석 결과 Petrov-Galerkin 기법은 단파장에서의 선택적 감쇠능력과 위상오차에 있어 우수한 것으로 나타났다. 반면에 Preissmann 기법은 단파장에서의 선택적 감쇠능력과 위상오차에 있어 열등한 것으로 나타났고, Bubnov-Galerkin 기법은 비감쇠특성을 나타내고 있어 단파장 영역에서 발산해를 일으키는 주요원인임을 확인할 수 있었다. Petrov-Galerkin 방법은 Courant 수의 넓은범위에서 높은 주파수를 가진 진행파에 대한 선택적인 감쇠와 작은 Courant 수의 범위에서 양호한 위상정도를 가지는 이상적인 조합을 나타내고 있어 점변 및 급변 부정류 해석에 있어 이상적인 기법으로 활용될 수 있을 것으로 판단되었다.

* 경북대학교 공과대학 토목공학과 교수
** 경북대학교 공과대학 토목공학과 연구조교
*** 경기대학교 공과대학 토목공학과 교수

1. 서 론

최근에 들어 이상기후에 따른 집중호우의 영향과 하천에 인접한 제내지에서의 토지 이용도 극대화 등으로 인하여 하천 연안 지역에서의 홍수피해로 인한 자연 재해가 날로 증가하고 있다. 특히 하도 경사와 단면의 기하학적 형상등이 크게 변화하는 자연하도에 있어 댐 파괴에 따른 홍수단파의 전파 특성이나 홍수 범람지역의 예측 등에 관한 해석은 기존의 유한차분법 등에 의한 방법으로는 계산상의 단순화 과정을 필요로 하며 수치불안정 등의 많은 장애와 어려움이 상존하고 있다.

개수로 부정류에 대한 유한요소법의 적용에 있어 수면형의 불연속성이 없는 점변 부정류의 경우에도 기존의 Galerkin 방법은 이 기법이 가지는 수치적 비감쇠(nondissipative) 특성으로 인하여 하도내의 부정류를 계산하는 방법으로 성공적이지 못하였고 최소한의 방법제시에 그쳤다. King(1976), Cooley와 Moin(1976), Keuning(1976) 등의 연구에 의하면 Saint-Venant식이 가지는 쌍곡선형 특성으로 인하여 유한요소법이 유한차분법에 비하여 우월하지 못함을 보여주었고 Dupont(1973), Gray(1980) 등은 쌍곡선형 미분방정식에 대한 Galerkin방법의 한계성을 분석하였다. 한편 Dendy(1974), Raymond와 Garder(1976), Brooks와 Hughes(1982)등은 감쇠형 유한요소기법을 적용하여 쌍곡선형 문제를 효과적으로 해석하였으며 Katopodes(1984)는 감쇠형 유한요소기법을 개수로내의 홍수단파에 대해서 적용하였다. Gray와 Lynch(1977), Baker와 Soliman(1981), Kinnmark와 Gray(1982), Malcherek와 Zielke(1994)는 이송-확산방정식등을 다양한 Galerkin 기법의 변형형태를 사용하여 오차해석을 실시하였다.

본 연구는 개수로에서의 부정류 해석을 위하여 dynamic wave 식을 기본방정식으로 하고 이를

유한요소기법에 의해 해석함으로써 점변 및 급변부정류의 다양한 흐름조건에 대하여 일관성있고 일반화한 수치모형을 개발하여 하도내에서의 정확한 흐름특성을 파악하고자 함이 주된 목적이다. 이를 위하여 유한요소기법 중에서 Petrov-Galerkin 방법을 이용한 수치모형을 개발하고 매트릭스 안정성 해석을 통하여 amplitude portrait와 phase portrait를 도시함으로써 감쇠특성과 위상오차를 검토하였다. 본 모형은 기존의 Bubnov-Galerkin 유한요소기법 및 .Preissmann 유한차분모형등과 그 수치적 특성을 비교검토하였다.

2. Dynamic Wave 식의 유한요소해석

본 연구에서 기본방정식의 구성 및 기존 해석기법의 검토에 있어서는 개수로에서의 댐 파괴파, 충격파, 홍수파 해석등에 적용할 수 있는 dynamic wave 식을 기본 방정식으로 구성하고, 이 식에 대한 기존의 해석기법을 검토하고, 유한요소해석시 지금까지 나타된 문제점들을 분석하여 이를 개선할 수 있는 해결방안을 연구하였다. Dynamic wave 식에 대한 유한요소해석에 대해서는 개수로 부정류 방정식의 유한요소해석을 위하여 Galerkin 방법 중에서 보간함수가 불연속성을 갖는 upstream weighting을 도입한 Petrov-Galerkin 방법을 이용하여 해석하였다. Upstream weighting의 가중 정도에 따른 영향을 분석하고 시간미분항은 유한차분법을 이용하였으며 그 결과로 나타나는 비선형 연립방정식은 Newton-Raphson 방법과 frontal 기법에 의해서 그 해를 구하였다.

2.1 유한요소방정식

하천에서 흐름해석을 위한 dynamic wave 식은 다음과 같은 매트릭스 형태로 기술될 수 있다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(Q) + D = 0 \quad (1)$$

여기서

$$Q = \left\{ \begin{array}{c} h \\ p \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$F = \left\{ \begin{array}{c} p \\ \frac{p^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ \begin{array}{c} i \\ gh \frac{\partial z_0}{\partial x} + g \frac{n^2 p^2}{h^{7/3}} - \frac{pi}{2} \end{array} \right\} \quad (4)$$

$$p = uh$$

여기서 h 는 수심, u 는 유속, z_0 는 하상고, n 은 Manning의 조도계수, i 는 측방 유출입량을 나타낸다. 이제 매트릭스 A 를 선형시스템의 상수로 고려한다면 비보존형 천수방정식은 식 (6)과 같이 기술된다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + A \frac{\partial Q}{\partial x} + D = 0 \quad (6)$$

여기서

$$A = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ gh - \frac{p^2}{h^2} & \frac{2p}{h} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{array} \right\} \quad (7)$$

Petrov-Galerkin 기법은 시행함수로서 기저함수를 선택하지 않고 식 (8)과 같은 형태를 취하였다 (Raymond와 Garder, 1976). 이 시행함수는 기저함수가 C^0 연속성을 만족하는데 비해 C^{-1} 연속조건을 가지고 상류부에서 가중된 효과를 나타낸다 (Katopodes, 1984; Malcherek와 Zielke, 1994).

$$v_i = f_i + g_i = f_i + \omega \left[A^T \frac{df_i}{dx} \right] \quad (8)$$

여기서

$$\omega = \frac{\Delta x}{|u+c| \sqrt{15}} \quad (9)$$

식 (8)에서 f_i 는 선형 기저함수이고 g_i 는 감쇠항을 처리하기 위한 함수이며, ω 는 감쇠계수, c 는 파속, Δx 는 계산격자간격이다.

지배방정식을 유한요소법으로 해석하기 위해서 식 (8)의 시행함수를 이용하여 식 (6)을 정리하면 식 (10)을 얻게된다.

$$\sum_{n=1}^{NE} \left[\left\langle \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + A \frac{\partial Q}{\partial x} + D \right), f \right\rangle + \left\langle \left(A \frac{\partial Q}{\partial t} + A^2 \frac{\partial Q}{\partial x} + AD \right), \omega \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle \right] = 0 \quad (10)$$

여기서 \langle, \rangle 는 內積을 나타내고 있으며 NE는 요소의 수이다.

이 식은 Bubnov-Galerkin 기법과 비교하면 식 (11)과 같이 나타낼 수 있으며 $\omega > 0$ 인 경우는 Petrov-Galerkin의 해가 되어 요소의 크기와 파속에 따라 선택적인 감쇠조건을 가지게 된다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + A \frac{\partial Q}{\partial x} + D - \omega \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} + A^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + AD \right) = 0 \quad (11)$$

이제 식 (10)은 요소의 길이가 L 인 하나의 요소에 대해서 식 (12a), (12b)와 같은 두 개의 스칼라 방정식의 형태로 기술된다.

$$E_1 = \int_0^L \left[f^T C + \omega \frac{\partial f^T}{\partial x} M \right] dx \quad (12a)$$

$$E_2 = \int_0^L \left[f^T M + \omega \frac{\partial f^T}{\partial x} \left\{ \left(gh - \frac{p^2}{h^2} \right) C + \frac{2p}{h} M \right\} \right] dx \quad (12b)$$

여기서

$$C = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + i \quad (13a)$$

$$M = \frac{\partial p}{\partial t} + \left(gh - \frac{p^2}{h^2} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{2p}{h} \frac{\partial p}{\partial x} + gh \frac{\partial z_0}{\partial x} + g \frac{n^2 p^2}{h^{1/3}} - \frac{pi}{2} \quad (13b)$$

시간 미분항에 대한 처리는 시간 가중치 θ 를 도입하여 음해형으로 기술하면 식 (14)와 같다.

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)^{n+1} = \alpha Q^{n+1} - \beta \quad (14)$$

여기서

$$\alpha = \frac{1}{\theta \Delta t} \quad (15)$$

$$\beta = \alpha Q^n + \frac{1-\theta}{\theta} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)^n \quad (16)$$

식 (15), (16)에서 θ 는 시간 가중치로서 $\theta=0$ 일 때 양해법, $\theta=0.5$ 일때 Crank-Nicholson 기법, $\theta=1.0$ 일때 완전음해기법이 되며, Galerkin 기법의 시간항에 대한 직접적인 적용은 $\theta=2/3$ 의 결과로 나타난다.

식 (12a), (12b)는 수심 및 유량에 대한 비선형 연립방정식을 구성하고 있기 때문에 Newton - Raphson 방법에 의해 그 해를 구할 수 있는데 C, M에 대한 Jacobian은 식 (17)과 같이 기술된다.

$$\frac{\partial C}{\partial h} = \alpha f \quad (17a)$$

$$\frac{\partial C}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (17b)$$

$$\frac{\partial M}{\partial h} = -\frac{2pf}{h^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2p^2 f}{h^3} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{p^2}{h^2} \frac{\partial f}{\partial x} + gf \frac{\partial h}{\partial x} + gh \frac{\partial f}{\partial x} + gf \frac{\partial z_0}{\partial x} - \frac{7}{3} gf \frac{n^2 p^2}{h^{1/3}} + \frac{pi}{2h^2} f \quad (17c)$$

$$\frac{\partial M}{\partial p} = \alpha f + \frac{2f}{h} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2p}{h} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{2pf}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x} + gn^2 f \frac{2p}{h^{1/3}} - \frac{if}{2h} \quad (17d)$$

또한 식 (12)에서의 적분치는 2점 Gaussian 적분에 의해 산정될 수 있고 각 요소에 대한 방정식이 전체 메트릭스 형태로 구성되면 이 식은 Frontal 기법에 의해 효율적으로 그 해를 구할 수 있었다.

3. 선형안정도 해석

부정류 문제에는, 홍수류와 같이 마찰력이 지배하는 흐름이나 댐에서의 급격한 방류와 같이 관성력의 항이 중요하게 나타나는 동역학적 흐름의 경우가 포함된다. 포괄적인 실측자료는 광범위하게 얻기가 어려운 경우가 많은데 특별히 비용과 안전도 면에서 문제가 되는 극한 홍수의 경우에는 더욱 그렇다.

해석적인 해는 모형의 비교를 위한 첫 번째 단계에서 이용될 수 있다. 많은 이용가능한 수치 해석 기법중에서 단순화된 방정식에 대해서 안정되고 정확한 해를 제공할 수 없는 기법들은 실제하도에 대한 적용과정에 있어서는 당연히 제외되어야 할 것이다. 이것은 계산 방법을 평가하는데 있어서 사용되어진 가장 일반적인 척도로서 안정성, 수렴성, 일관성 등을 포함한다. 안정성은 해로서 제시된 작은 교란, 예를 들어 절단오차 등에 대한 수치 기법의 반응에 대한 척도로서, 최악의 경우 이러한 작은 오차들이 지수함수적으로 축적이 되어서 신속하게 그 해를 발산시킬 수 있다. 일관성은 이산해가 $\Delta x, \Delta t$ 가 0으로 접근해 가면서 즉 시간과 공간에 대해서 이산화가 세분됨에 따라 미분 방정식의 해로 수렴하는 것을 의미한다. 수렴성은 수치계산해가 이산방정식의 해에 접근할 것을 필요로 한다. Lax의 대등이론에 의하여 안정성은 일관성있는 기법의 수렴성을 위한 필요충분조건이다 (Abbott와 Basco, 1989).

선형안정도 해석의 결과가 선형화된 dynamic wave 식에 대해서 수치 기법의 진폭과 위상특성치

를 조사하기 위하여 사용되었다. 해석의 유형은 Fourier type (또는 von Neumann) 으로서 설명될 수 있다. 이것은 선형 해석이기 때문에 비선형에 관련된 불안정성을 예측할 수 없고, 미분형 경계조건도 고려할 수 없으나 이러한 해석은 다양한 수치기법의 비교를 위한 기초로 뿐만 아니라 특별한 방법에 대한 어떤 문제의 적절한 이산화 과정을 결정하기 위해서도 아주 중요한 수단이 될 수 있다.

하천에서의 부정류에 관한 dynamic wave 식은 자연하천의 광폭구형단면에 대한 무차원 파동방정식은 식 (18)과 같이 기술된다 (한건연 등, 1994).

$$\frac{\partial \{\Phi\}}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-Fr^2 & 2Fr \end{bmatrix} \frac{\partial \{\Phi\}}{\partial x} + \zeta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -Fr^2(1+\lambda) & 2Fr \end{bmatrix} \{\Phi\} = \{0\} \quad (18)$$

여기서

$$\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} h' \\ p' \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$Fr = \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}} \quad (20)$$

$$\lambda = \frac{2}{2h'+1} \quad (21)$$

$$\zeta = \frac{L}{C_x^2 h_0} \quad (22)$$

여기서 h_0 와 u_0 는 등류수심과 유속, Δh 와 Δq 는 변동수심과 변동유속, L 은 흐름의 이동거리, $h' = \Delta h/h_0$, $p' = \Delta p/\sqrt{gh_0}$, h_0 , C_x 는 Chezy의 계수를 나타낸다.

해의 각 Fourier 성분은 다음형태로 가정될 수 있다.

$$\{\Phi\}^{n+1}(x) = \{\Phi\}^{n+1} \exp(i\sigma x) \quad (23)$$

여기서

$$\{\Phi\}^{n+1} \equiv \begin{Bmatrix} h'^{n+1} \\ p'^{n+1} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$\sigma = 2\pi/L$ 로서 성분파수이고 $L = N\Delta x$ 로서 파장을 나타내며 N 은 파장당 이산화수이다.

이제 증폭(amplification) 매트릭스 $[G]$ 를 식 (25)와 같이 정의한다.

$$\{\Phi\}^{n+1} = [G]\{\Phi\}^n \quad (25)$$

여기서 $[G]$ 는 수치기법의 증폭 및 위상특성을 나타내고 있으며 식 (23)을 식 (18)에 치환함으로써 얻게되며 이 식의 계수를 각 항별로 정리하면 식 (26)와 같이 기술된다.

$$b_{i,1}\{h'\}^{n+1} + b_{i,2}\{p'\}^{n+1} = b_{i,3}\{h'\}^n + b_{i,4}\{p'\}^n \quad (26)$$

여기서

$$b_{i,1} = \alpha_{i,1} \exp(-i\sigma \Delta x) + \alpha_{i,2} + \alpha_{i,3} \exp(i\sigma \Delta x)$$

$$b_{i,2} = \alpha_{i,4} \exp(-i\sigma \Delta x) + \alpha_{i,5} + \alpha_{i,6} \exp(i\sigma \Delta x)$$

$$b_{i,3} = \alpha_{i,7} \exp(-i\sigma \Delta x) + \alpha_{i,8} + \alpha_{i,9} \exp(i\sigma \Delta x)$$

$$b_{i,4} = \alpha_{i,10} \exp(-i\sigma \Delta x) + \alpha_{i,11} + \alpha_{i,12} \exp(i\sigma \Delta x) \quad (27)$$

윗 식에서 $\alpha_{i,j}$ 는 식 (18)을 h' 및 p' 에 대한 각 시간대 및 거리에 대해서 정리하여 유도된 계수이다. 따라서 증폭 매트릭스는 식 (28)과 같이 얻게 된다.

$$[G] = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_{1,3} & b_{1,4} \\ b_{2,3} & b_{2,4} \end{bmatrix} \quad (28)$$

진폭 매트릭스 $[G]$ 에 대한 두개의 고유치들은 두개의 특성 전파속도에 상응하는 것이다.

이론적 감쇠비 D_i 와 파속비 R_i 는 각각 식 (29),

(30)과 같다.

$$D_i = [Re(\gamma_i)^2 + Im(\gamma_i)^2]^{1/2} \quad (29)$$

$$Ri = -\frac{1}{\alpha Cr(Fr \pm 1)} \tan^{-1} \left[\frac{Im(\gamma_i)}{Re(\gamma_i)} \right] \quad (30)$$

여기서 γ_i 는 진폭메트릭스의 고유치로서, α 는 $\sigma \Delta x$, $Re(\cdot)$ 는 실수부, $Im(\cdot)$ 는 허수부를 나타내고 있다. 여기서 음의 부호는 역행파에 대응하며 양의 부호는 진행파에 대응한다. 그러나, Courant 수는 모든 경우에 있어 진행파의 속도에 기초로 한 것이다. 따라서, 진행파에 대한 결과는 모든 기법에 대하여 Froude 수와는 독립적인 것으로 나타나게 된다.

3.1 Preissmann 기법

이 기법이 안정성을 보장받기 위해서는 θ 가 0.5 이상이 되어야하고, $\theta=0.6$ 이 최적값으로 제시된 바 있어 본 연구에서도 이 값을 적용하였다. 그림 1은 $\theta=0.6$ (진행파와 역행파, $Fr=0.0$)의 값에 대한 해석 결과를 나타낸다. 그림에서 보는 바와 같이 Courant 수의 증가와 함께 커다란 감쇠효과를 가지고 있는 것이 명백하다. 그러나 상대속도는 $Cr=1$ 에 대해서 근본적으로 1.0 으로서 위상오차가 없었다. 이 기법은 좀더 작은 Cr 값에 대해서 너무 빠르게 보다 짧은 파장을 전파시키는 반면 좀더 큰 Cr 값에 대해서는 짧은 파장을 너무 느리게 전파시키고 있었다.

그림 2는 Fr 이 0.5와 2.0일 때 역행파에 대한 결과를 보여주고 있다. 이 경우 감쇠 효과가 진행파와 비교하면 감소한 것을 나타내고 있고, Cr 이 0.5, 1 및 2일 때 좀더 짧은 파장은 아주 빠르게 전파한다는 것을 알 수 있었고 Cr 이 5일 때 반대 효과를 나타내고 있었다.

$\theta=0.6$ 일 때 그 기법은 진행파에 대한 위상오차를 최소화하기 위해서 Cr 가 1일 때 수행되어야 한다. 하지만 $(u+c)$ 가 전 영역에 걸쳐 변화하기 때문에 이것은 성취되기 어렵다. 또한 파장당 10 개 이상의 점들이 진행파와 역행파에 대한 위상오

차의 과도한 감쇠를 피하기 위해서 요구됨을 알 수 있었다.

3.2 Bubnov-Galerkin 기법

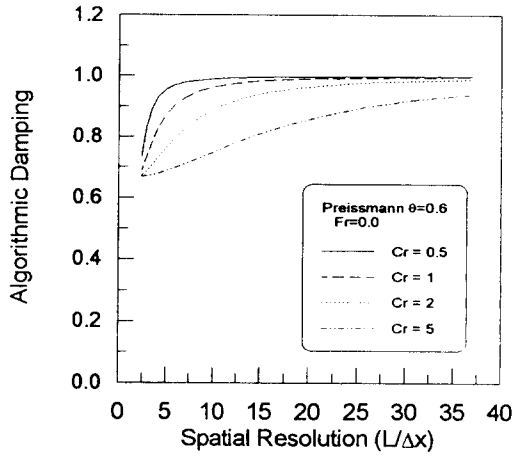
Bubnov-Galerkin 기법은 기본적으로 $\theta=0.5$ 인 반음해적인 차분형태를 취하였다. 그림 3 (진행파와 역행파, $Fr=0$)에서 보는 바와 같이 이 기법은 모든 Courant 수의 값에 대해 완전히 비감쇠적이다. 또한 이 기법은 좀더 짧은 파장을 너무 느리게 전파하는 경향이 있는데, 특히 이러한 효과는 보다 큰 Cr 에 대해서 더욱 증가되고 있다.

그림 4에서는 Fr 가 0.5와 2.0 일 때의 역행파에 대한 결과를 보여주고 있다. 진행파의 경우에서 처럼 이 경우에도 완전히 비감쇠적인 것으로 나타났고 이 기법은 비록 역행파는 진행파보다 더 작은 위상오차를 가지고 있기는 하나 역시 짧은 파장을 너무 느리게 전파시키는 경향이 있었다. Bubnov-Galerkin 기법의 이와 같은 비감쇠특성은 이 방법이 과도한 진동에 있어서 약점을 지니고 있다. 이것은 $2\Delta x$ 파에서 관찰될 수 있는 바와 같이 비선형 경우에 있어서 해의 불안정성을 일으킨다. Preissmann 기법에서와 같이 Bubnov-Galerkin 기법은 어느정도의 이론적 감쇠를 도입하기 위해 시간 가중치의 정도를 증가시킬 수 있는 특징이 있다.

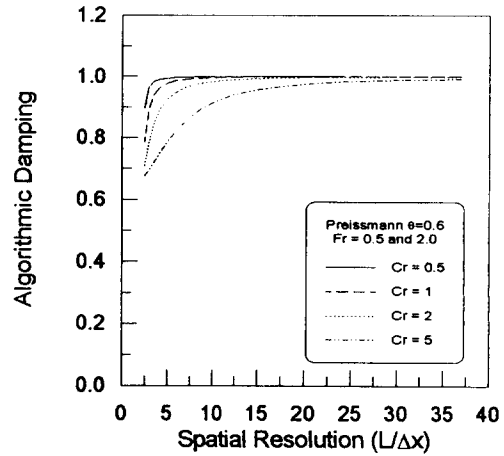
Bubnov-Galerkin 기법의 이와 같은 빈약한 실행은 많은 연구자들이 유한요소법이 개수로 흐름문제에 부적절하다는 결론을 이끌어 내게 하였다. 이 기법의 비감쇠특성은 이 기법이 $2\Delta x$ 파가 비선형 문제에서 진동해의 결과로서 누적되면서 해의 불안정성을 일으키는 원인을 설명하고 있다.

3.3 Petrov-Galerkin 기법

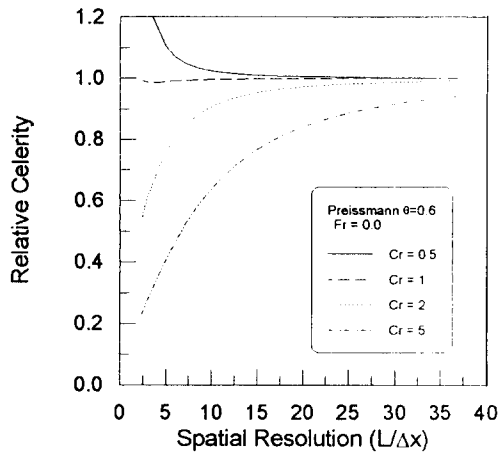
Bubnov-Galerkin 기법의 경우에서 처럼 Petrov-Galerkin 기법도 $\theta=0.5$ 의 경우에 대해서 조사되었다. 이 해석은 식 (9)에 의한 감쇠치를 사용하여 수행되었다. 이 방법은 높은 주파수를 가진 파장영역에서 크게 만족할 만한 선택적인 감쇠를 가지는 것으로 나타났다. Petrov-Galerkin 기



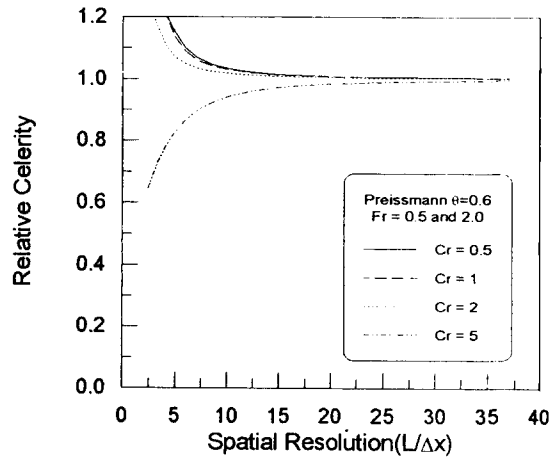
(a) 감쇠비



(a) 감쇠비



(b) 파속비



(b) 파속비

그림 1. Preissmann 기법에 대한 안정도 해석결과 (진행파와 역행파, $Fr=0.0$)

그림 2. Preissmann 기법에 대한 안정도 해석결과 (역행파, $Fr=0.5$ 와 2.0)

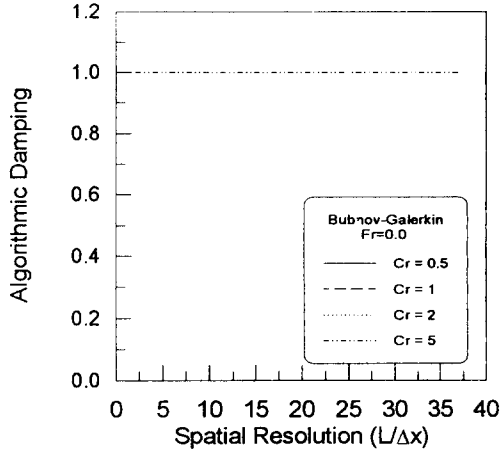
법은 $Fr=0.0$ 에서 진행파와 역행파에 대해서 그림 5에서 보여진 것처럼 모든 Courant 수에 대해서 안정하다. 하지만 위상특성의 연구에서 이 기법은 Cr의 큰 값에 대해서 위상속도가 과소평가되는 경향이 있기 때문에 Cr가 0.5일 때가 좋은 위상 정확도를 보장하기 위해서 적합하다는 것을 보여주고 있다.

그림 6은 $Fr=0.5$ 와 2.0 에서의 역행파에 대한 결과를 보여주고 있다. 진행파의 경우에 있어서와 같이 이 기법은 비록 역행파가 진행파보다 덜 감쇠

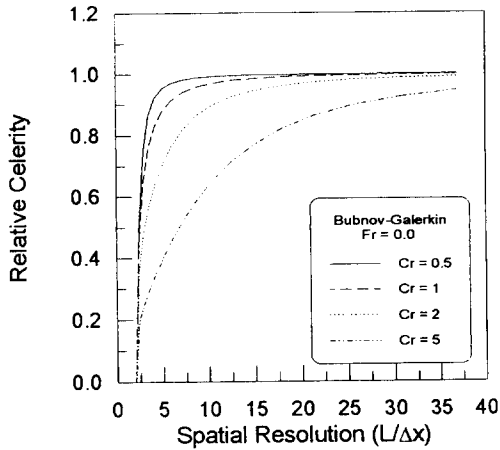
되기는 하지만 짧은 파장영역에 대해서 선택적으로 감쇠적임을 알 수 있었다. 예를 들어 $2\Delta x$ 에서 이론적 감쇠는 Cr=0.5일 때 진행파에 대한 0.13과 비교하여 역행파에 대해서는 0.78이었다.

3.4 각 방법간의 비교검토

각 기법들은 장파장에 대해서 좋은 위상과 진폭 정확도가 유지되어지고 단파장에서는 감쇠가 발생 되는 경우가 이상적인 기법이다. 따라서 $2\Delta x$ 부근



(a) 감쇠비

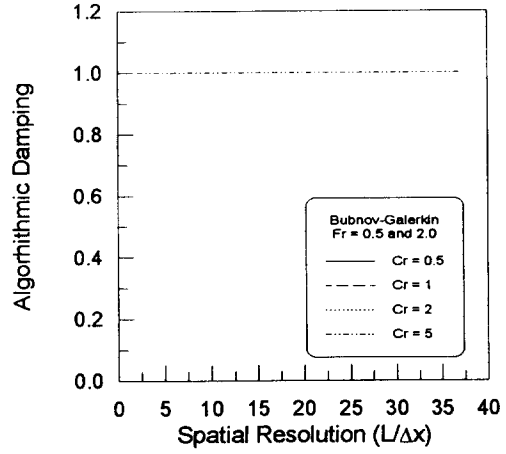


(b) 파속비

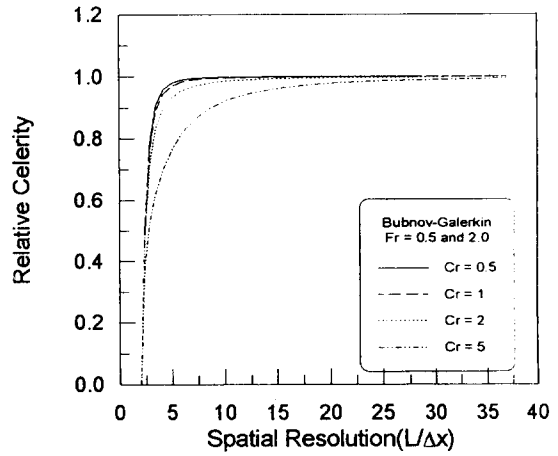
그림 3. Bubnov-Galerkin 기법에 대한 안정도 해석 결과 (진행파와 역행파, $Fr=0.0$)

에서는 감쇠가 발생해야 하고 파장이 길어질수록 어떠한 이론적 감쇠나 위상오차가 나타나지 않아야 한다. $10\Delta x$ 파에 대해서도 비감쇠도가 복원할 수 있는 파장이 충분히 정확한 진폭과 파장을 나타내는 것이 최선의 기법이라고 할 수 있다.

그림 7은 진행파와 역행파에 대해서 Fr 가 0일 때 조사된 다양한 기법들의 비교를 보여주고 있다. 이 경우 파장당 10개 절점의 값이 Cr 의 함수로서 이론적 감쇠와 상대 파속을 비교하기 위해서 선택되었다. 그림에서 보는 것처럼 유한요소기법은 Cr



(a) 감쇠비



(b) 파속비

그림 4. Bubnov-Galerkin 기법에 대한 안정도 해석 결과 (역행파, $Fr=0.5$ 와 2.0)

가 100까지에 대해서 $10\Delta x$ 파에서의 어떤 감쇠가 없음을 알 수 있었고 Preissmann 기법은 또한 0.5의 Cr 까지 $10\Delta x$ 파에 대해서 비감쇠적이나 Cr 가 5 이상이 되면 감쇠정도가 과다하게 나타남을 알 수 있었다. 유한요소기법은 모든 Cr 에 대해서 좋은 위상 정확도를 보여주고 있는데, 이는 부정류 문제에 있어서 적합한 값으로 제시될 수 있겠다.

Preissmann 기법의 위상 정확도는 $10\Delta x$ 파가 $Cr \leq 1$ 에서는 너무 빨리 전파되고 $Cr \geq 1$ 에서는 너무 느리게 전파된다는 점에서 흥미로운 결과를 제

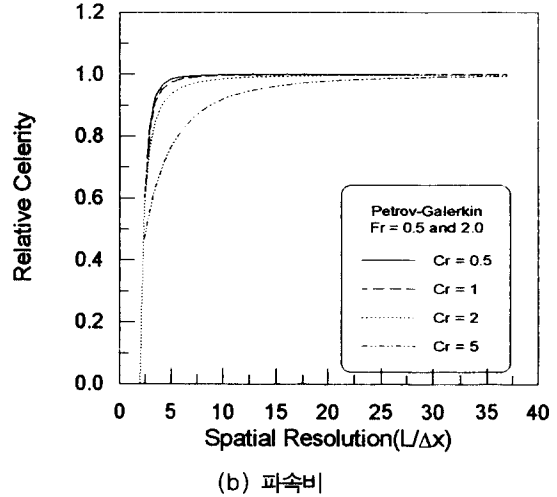
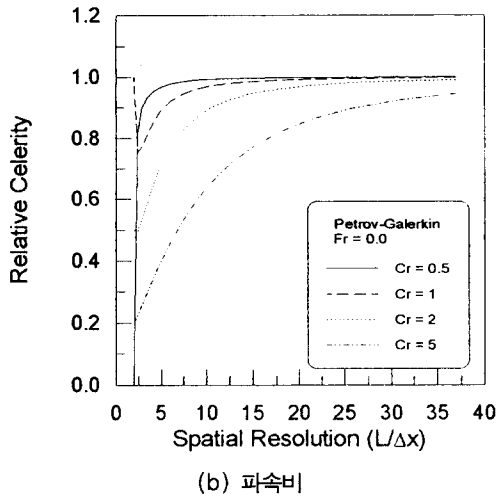
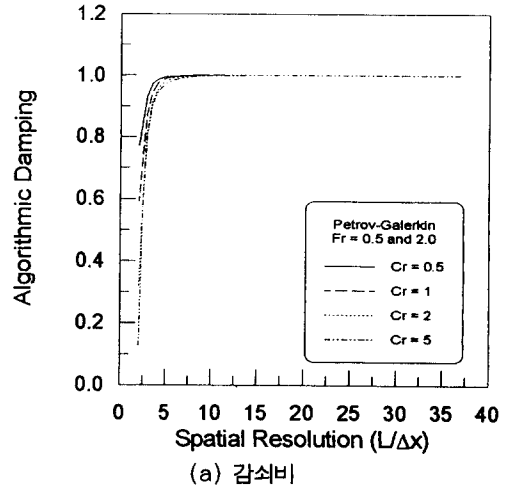
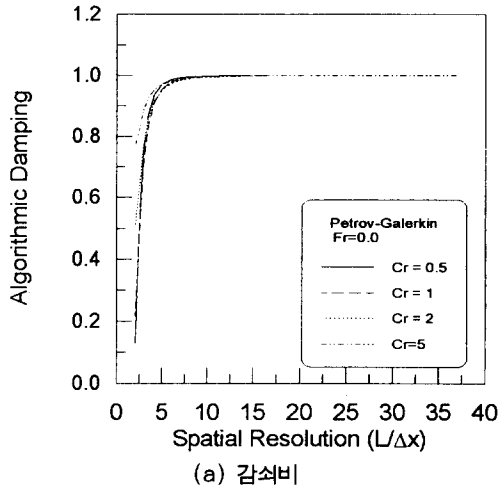


그림 5. Petrov-Galerkin 기법에 대한 안정도 해석결과 (진행파와 역행파, $Fr=0.0$)

그림 6. Petrov-Galerkin 기법에 대한 안정도 해석결과 (역행파, $Fr=0.5$ 와 2.0)

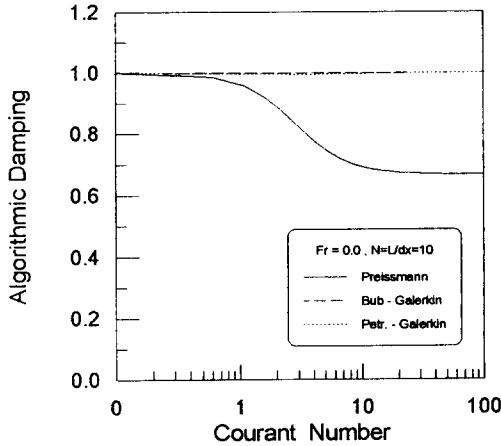
시한다. 이것은 양호한 진폭과 위상 정확도가 이 기법을 가지고 실행할 수 없다는 것을 의미한다.

따라서 Preissmann 기법은 Petrov-Galerkin 기법과 같은 정확도를 가지기 위해 좀더 세분화된 계산망을 요구하는 것으로 나타났다.

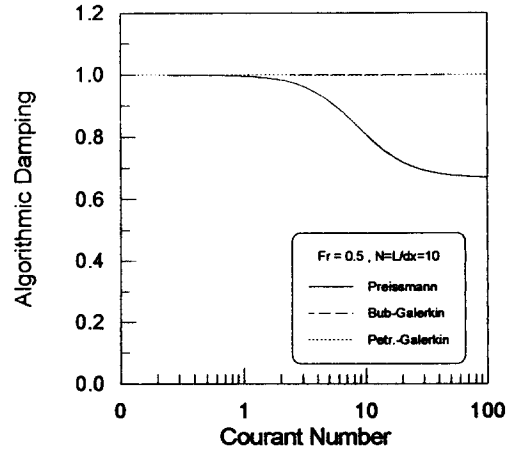
그림 8은 Fr 가 0.5, 2.0일 때의 역행파에 대한 경우에 있어서의 유사한 비교를 나타내고 있다. 이것은 비록 $Fr=0.5$ 일 때의 진행파와 $Fr=0$ 일 때의 역행파와 비교된 Preissmann 기법의 수행에서 약간의 안정성 향상은 흥미로울지라도 그 경향에

있어 $Fr=0$ 에서와 유사하다.

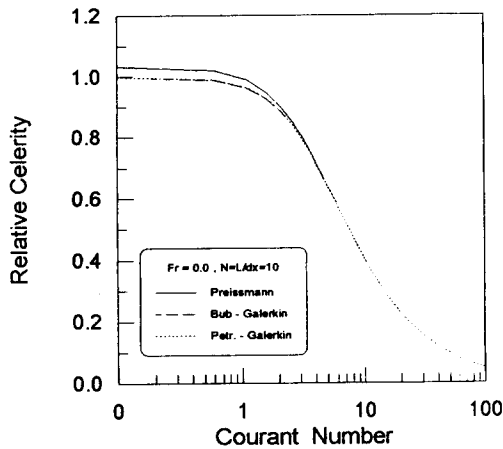
그림 9와 10은 짧은과장 $4\Delta x$ 파에서 각 기법들의 감쇠도를 Cr 에 따라 확인해 보았다. Bubnov-Galerkin 기법은 역시 Cr 에 관계없이 비감쇠도를 나타내고 있으며 Preissmann 기법은 Cr 의 증가에 따라 상대적으로 감쇠하는 경향이 있었다. 즉, Petrov-Galerkin 기법은 짧은 과장에서 감쇠도와 장과장으로 갈수록 비감쇠도의 복원력이 뛰어나 선택적인 감쇠가 매우 큰 것을 알 수 있었다. Preissmann 기법은 감쇠도는 크지만 장과장에서



(a) 감쇠비

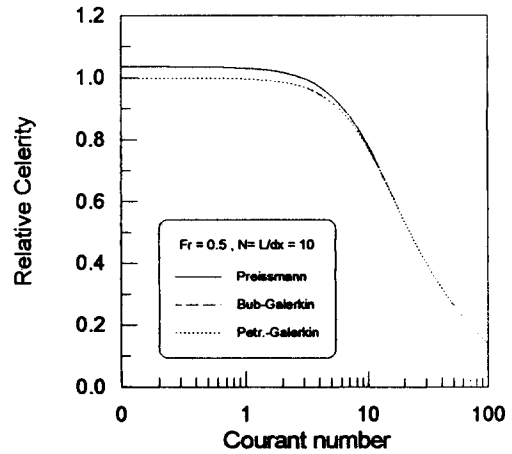


(a) 감쇠비



(b) 파속비

그림 7. 선형 안정도 해석결과와의 비교
(진행파와 역행파, $Fr=0.0$, $L/\Delta x=10$)



(b) 파속비

그림 8. 선형 안정도 해석결과와의 비교
(역행파, $Fr=0.5$ 와 2.0 , $L/\Delta x=10$)

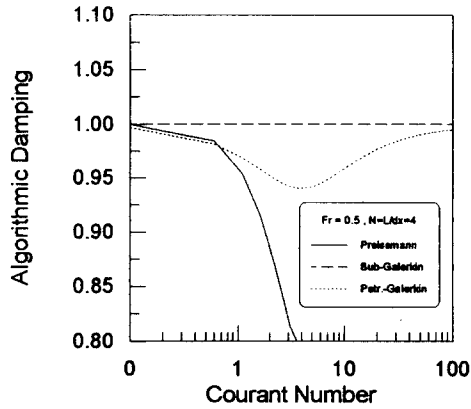
의 비감쇠도의 복원력이 Cr 가 클수록 감소하였고 Bubnov-Galerkin 기법은 전 영역에서의 비감쇠특성으로 인해 짧은 파장에서 해의 불안정성을 초래할 수 있었다.

5. 결 론

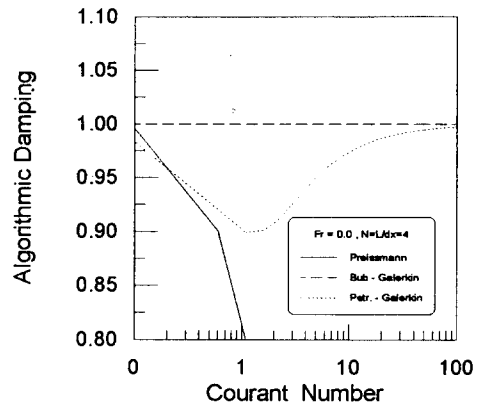
본 연구는 개수로에서의 점변 및 급변부정류에 대한 유한요소모형을 개발하고 선형안정도 해석을 실시한 것이다. Dynamic wave식을 기본방정식으

로 하고 이를 C^{-1} 연속조건을 만족하고 upstream weighting을 도입한 시행함수를 이용하여 Petrov-Galerkin 기법에 의해서 해석하였다. 비선형 유한요소의 연립방정식은 Newton-Raphson 방법과 Frontal 기법에 의해서 그 해를 구할 수 있도록 구성된 유한요소모형을 개발하였다

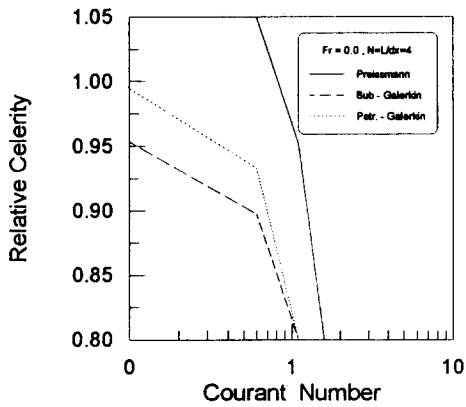
Petrov-Galerkin 기법에 의한 유한요소모형에 대해서 매트릭스 안정성 해석을 실시하였고 amplitude portrait와 phase portrait를 통하여 수치안정성을 분석하였다. Petrov-Galerkin 기법은 단파



(a) 감쇠비



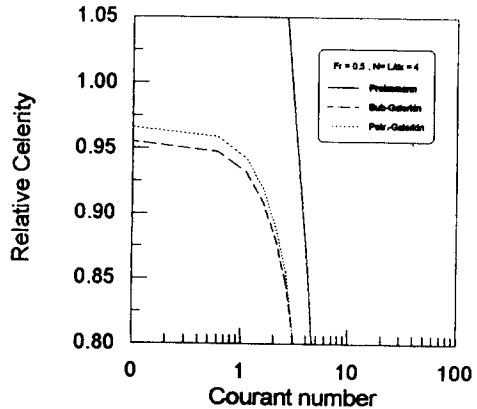
(a) 감쇠비



(b) 파속비

그림 9. 선형 안정도 해석결과의 비교

(진행파와 역행파, $Fr=0.0$, $L/\Delta x=4$)



(b) 파속비

그림 10. 선형 안정도 해석결과의 비교

(역행파, $Fr=0.5$ 와 2.0 , $L/\Delta x=4$)

장에서 감쇠도와 장파장에서의 비감쇠도의 복원력이 뛰어나 $2\Delta x$ 파에 대한 선택적인 감쇠가 매우 우수한 것을 알 수 있었다. Preissmann 기법은 감쇠도는 크지만 장파장에서의 비감쇠도의 복원력이 Courant 수가 클수록 감소하였고 Bubnov-Galerkin 기법은 전 영역에서의 비감쇠특성으로 인해 짧은 파장에서 해의 불안정성을 초래할 수 있는 특성을 나타냈다.

Petrov-Galerkin 방법은 Courant 수의 넓은 범위에서 높은 주파수를 가진 진행파에 대한 선택적

인 감쇠와 비교적 작은 Courant 수의 범위에서 양호한 위상정도를 가지는 이상적인 조합을 나타내고 있어 점변 및 급변 부정류 해석에 있어 이상적인 기법으로 활용될 수 있을 것으로 판단되었다.

감사의 글

본 연구는 1995년도 한국과학재단 연구비 지원 (과제번호 : KOSEF 951-1201-008-1)에 의한 결과로서 지원당국에 깊이 감사드립니다.

참 고 문 헌

- 한건연, 박재홍, 이종태 (1994). "개수로에서의 상류-사류 천이영역에 대한 부정류 해석." 한국수자원학회지, 제27권, 제2호, pp. 85-96.
- Abbott, M.B., and Basco, D.R. (1989). *Computational fluid dynamics*. Longman Scientific and Technical.
- Baker, A.J., and Soliman, M.O. (1981). "On the accuracy and efficiency of a finite element tensor product algorithm for fluid dynamics applications." *Comput. Methods in App. Mech. Eng.*, Vol. 27, pp. 215-237.
- Brooks, A.N., and Hughes, T.J.R. (1982). "Streamline upwind / Petrov - Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations." *Comput. Methods App. Mech. Eng.*, Vol. 32, pp. 199-259.
- Cooley, R.L., and Moin, S.A. (1976). "Finite element solution of Saint-Venant equations." *J. of Hydr. Div.*, ASCE, Vol. 102, No. HY6, pp. 759-775.
- Dendy, J.E. (1974). "Two methods of Galerkin-type achieving optimum L^2 rates of convergence for first-order hyperbolics." *SIAM J. of Num. Anal.*, Vol. 11, pp. 637-653.
- Dupont, T. (1973). "Galerkin methods for first-order hyperbolics: An example." *SIAM J. of Num. Anal.*, Vol. 10, pp. 890-899.
- Gray, W.G. (1980). "Do finite element models simulate surface flow?" *Finite elements in water resources III*, S.Y. Wang, et al., eds., Univ. of Mississippi Press, pp. 1.122-1.136.
- Gray, W.G., and Lynch, D.R. (1977). "Time stepping schemes for finite element tidal model computations." *Advances in Water Resources*, Vol. 1, No. 2, pp. 83-95.
- Katopodes, N.D. (1984). "A dissipative Galerkin scheme for open-channel flow." *J. of Hydr. Eng.*, ASCE, Vol. 110, No. 4, pp. 450-466.
- Keuning, D.H. (1976). "Application of finite element method to open channel flow." *J. of Hydr. Div.*, ASCE, Vol. 102, No. HY4, pp. 459-468.
- King, I.P. (1976). "Finite element models for unsteady flow routing through irregular channels." *Finite elements in water resources*, C.A. Brebbia, et al., eds., Pentech Press, London, pp. 4.165-4.184.
- Kinnmark, I.P., and Gray, W.G. (1982). "Time-weighting of the momentum equation in explicit wave-equation models of surface water flow." *Proc. of the 4th International Conference on Finite Elements in Water Resources*, Hannover, West Germany, pp. 5. 67-5.77.
- Malcherek, A., and Zielke, W. (1994). "Upwinding and characteristics in FD and FE methods." *Computer modeling of free-surface and pressurized flow*. M.H. Chaudhry, and L.W. Mays, eds., Kluwer Academic Publishers, pp. 173-204.
- Raymond, W.H., and Garder, A. (1976). "Selective damping in a Galerkin method for solving wave problems with variable grids." *Monthly Weather Review*, Vol. 104, No. 12, pp. 1583-1590.

〈접수: 1996년 4월 1일〉