

〈論 文〉

# GIM을 사용한 Holonomic과 Nonholonomic 시스템의 동적 거동 및 제어

Dynamics and Control of Holonomic & Nonholonomic Systems Using GIM

은 희 창\* · 정 진 형\*\*

Eun, Hee-Chang and Chung, Jin-Hyung

(1996년 6월 27일 접수 ; 1996년 9월 5일 심사완료)

**Key Words** : Constraint(제어식), Control(제어), Dynamics(동역학)

## ABSTRACT

There have been many studies to control holonomic and/or nonholonomic systems, and nonlinear control problems. However, their approaches require complicated intermediate procedures. Using the Generalized Inverse Method derived by Udwadia and Kalaba in 1992, this study provides two applications to the control of holonomically and/or nonholonomically constrained systems. These applications illustrate the ease with which the equation by the Generalized Inverse Method can be utilized for the purpose of (a) control of highly nonlinear systems without depending on any linearization, (b) maintaining precision tracking motions with the presence of known disturbances, and (c) explicit determination of control forces under the circumstances (a) and (b).

## 1. 서 론

제어시스템의 운동방정식 및 제어력을 결정하기 위한 시도가 1797년 Lagrange 이후로 많이 있었다. 이들중에 오늘날까지 가장 널리 사용되는 방법은 Lagrange Multiplier 방법을 들 수 있다. 이는 Multiplier를 수치적으로 더욱 정확하게 계산해야 하는 어려움이 있으며, 오늘날까지도 많은 수학자들에 의해 연구되어지고 있다. 약 100년후, Gibbs(1879)<sup>(1)</sup>와 Appell(1899)<sup>(2)</sup>은 독자적으로 Gibbs-Appell이라고 알려진 방법을 제안하였으며, 이 방법은 준좌표(quasi-coordinates)의 선택과 Gibbs함수를 응용해야하는 어려움이 있다. 따라서 D. O. F. (Degree of Freedom)이 증가하면 그 적용에 큰 어려움이 있다.

1961년 Kane<sup>(3)</sup>은 D'Alembert 원리로 부터 Lagrange식의 연장선상에서 Nonholonomic 시스템의 해석방법을 제시하였다. 이 방법은 Lagrange Multiplier를 사용하지않는 장점이 있으나 가속도를 계산하기위하여 벡터해석을 요하는 어려움이 있다.

1973년 Passerello와 Huston<sup>(4)</sup>은 이러한 가속도의 벡터계산을 요하지않는 새로운 방법을 제시하였다. 그러나 좌표를 줄이기위하여 임의의 좌표선택과 추가적인 식을 도입해야하는 어려움이 있다.

1992년 Udwadia와 Kalaba<sup>(5)</sup>는 Generalized Inverse Method(이하 GIM이라 표현)를 사용하여 제어시스템의 운동방정식을 명확하게 유도 하였다.<sup>(6-7)</sup> 이 방법은 기존의 해석방법들과 달리 매우 명확하고 간단히 제어시스템의 운동방정식을 결정할 수 있다. 이는 역학분야의 중요한 발견이라 여겨진다.

본 연구에서는 GIM을 사용하여 시스템들을 명확하게 제어하고 그 제어력을 결정함으로써, 이 방법의 사용성 및 타당성을 입증하는데 그 목적이 있다.

\*LG건설 기술연구소

\*\*정회원, LG건설 기술연구소

이는 Nonholonomic과 Holonomic 시스템의 제어 및 비선형시스템을 선형화 과정없이 명확한 제어가 가능하다. 다음에서 GIM을 간단히 소개한다.

## 2. Generalized Inverse Method

1992년 Udwadia와 Kalaba는 2차미분방정식인 제어시스템의 운동방정식을 유도하였다. 이는 Gauss의 원리와 기본적인 대수학을 근거로하였다. 또한 참고 문헌 (6)에서는 대수학을 이용하여 Udwadia와 Kalaba와 일치하는 결과를 얻었다. 이외에도 여러 방법에 의하여 그 결과의 타당성을 증명하고 있다. 이 방법은 기존의 방법들과는 달리 제어식을 시간에 관해 미분을 하는 것외에는 어떠한 중간과정을 요하지 않는 장점이 있다. 또한 이는 Holonomic과 Nonholonomic 시스템을 포함하여 광범위하게 적용될 수 있다.

자유운동을 하는  $n$ 개의 입자를 고려하자. 이들 입자는 위치벡터  $q=[q_1 \ q_2 \dots \ q_n]^T$ 로 표현된다고 가정하자. 이러한 자유운동을 하는 입자들의 운동방정식은 Newton이나 Lagrange 방법에 의해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$M(q, t)\ddot{q}=F(q, \dot{q}, t) \quad (1)$$

여기서  $M$ 은  $n \times n$  대칭행렬을  $F$ 는  $n$ 외력벡터를 나타낸다. 여기서 ‘.’는 시간에 관한 미분을 나타낸다. 이 시스템이 자유운동을 하는 동안의 가속도는 다음과 같다.

$$a(q, \dot{q}, t)=M^{-1}F. \quad (2)$$

만약 이 시스템이 다음과 같은  $m$ 개의 제어식에 의해 제어하고자 한다고 가정하자.

$$\Psi_i(q, \dot{q}, t)=0, \quad i=1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

$\Psi_i$ 가 미분이 가능할 경우, 이를 시간에 관해 적절히 미분을 하면 그를 다음과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$A(q, \dot{q}, t)\ddot{q}=b(q, \dot{q}, t). \quad (4)$$

여기서  $A$ 는  $m \times n$ 행렬이며 이는 앞에서 미분을 취한  $\dot{q}$ 의 계수를 나타내며,  $b$ 는 그 나머지를 말한다.

식 (3)으로 주어진 제어를 하기위하여는 자유운동을 하는 이 시스템에 어떠한 추가적인 힘이 가해져야만한다. 이들 힘을 제어력(force of constraint, control force)이라 일컫는다. 따라서 이 시스템의 운동방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$M\ddot{q}=F(q, \dot{q}, t)+F^c(q, \dot{q}, t) \quad (5)$$

여기서  $F^c$ 은  $n$  제어력벡터를 나타낸다. 일반적으로 제어시스템의 운동방정식을 결정한다함은 이들 제어력을 어떻게 결정하느냐 하는 문제에 있다. GIM에 의하면 이들 제어력은 다음과 같이 정의된다.

$$F^c(q, \dot{q}, t)=M^{\frac{1}{2}}(AM^{-\frac{1}{2}})^+(b-Aa) \quad (6)$$

여기서 ‘+’는 Pseudo Inverse (Moore-Penrose Inverse, Generalized Inverse)를 나타낸다. 그리하여 제어시스템의 운동방정식을 2차 미분방정식 (5)에 의해 명확히 표현하였다. 이는 Gauss의 원리(자연에 의해 주어지는 실제가속도 혹은 제어력은 Gauss함수를 최소로 취할 때의 값이다.)에 의한 실제가속도 (5)와 제어력 (6)을 각각 나타낸다. 다음에서 1911년 Appell이 예제로 든 Nonholonomic 시스템의 운동을 고려한다.

## 3. Appell의 예제<sup>(8)</sup>

다음과 같은 자유운동을 하는 시스템을 고려하자.

$$m\ddot{x}=F_x, \quad m\ddot{y}=F_y, \quad m\ddot{z}=F_z. \quad (7)$$

여기서  $F_x, F_y, F_z$ 는 주어진 외력을 나타낸다. 이 시스템이 다음의 제어식에 의해 제어된다고 가정하자.

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=a'f(x, y, z, t). \quad (8)$$

여기서  $a'$ 은 상수를 나타낸다. Appell은 이 상수에 0을 사용하였으나 본 예제에서는 상수로 가정하였다.

제어식 (8)을 시간에 관해 한번 미분을 취하면 식 (4)와 같은 형태로 표현될 수 있다.

$$A(t)=[\dot{x} \ \dot{y} \ -\dot{z}], \quad (9)$$

$$b=\alpha\left[\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial f}{\partial t}\right]. \quad (10)$$

여기서  $\alpha=0.5a'$ 을 나타낸다.

또한

$$AM^{-\frac{1}{2}}=m^{-\frac{1}{2}}[\dot{x} \ \dot{y} \ -\dot{z}], \quad (11)$$

$$(AM^{-\frac{1}{2}})^+=\frac{1}{m^{-1}\dot{x}^2+m^{-1}\dot{y}^2+m^{-1}\dot{z}^2}\begin{Bmatrix} m^{-\frac{1}{2}}\dot{x} \\ m^{-\frac{1}{2}}\dot{y} \\ -m^{-\frac{1}{2}}\dot{z} \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

$$b-Aa=\Delta l=\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{F_x}{m}\right)\dot{x}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \alpha \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{F_y}{m} \right) \dot{y} + \left( \alpha \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{F_z}{m} \right) \dot{z} \\
 & + \alpha \frac{\partial f}{\partial t} \quad (13)
 \end{aligned}$$

위의 식들을 제어시스템의 운동방정식 (5)에 대입하면 다음과 같은 이 시스템의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} + \frac{\Delta l}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ -\dot{z} \end{Bmatrix}. \quad (14)$$

위의 예제에서 Nonholonomic 시스템의 운동을 2차미분방정식에 의해 명확히 묘사하였다. 이 예제에서 알 수 있듯이 제어식을 단지 시간에 대한 미분만을 포함 하며 Appell에 의한 준좌표(quasi-coordinates)를 결코 사용하지 않았다. 다음에는 Holonomic 제어시스템의 제어에 대한 간단한 예를 소개하고자 한다.

### 4. 3절점의 로봇제어

Fig. 1은 3개의 절점을 갖는 X-Y평면위를  $q(t) = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$ 에 의해 묘사되는 로봇의 운동을 보여 준다. 각 마디(bar)는 강체(rigid)라고 가정한다. Fig. 1에서 보듯이 각 절점은 회전스프링( $K_1, K_2, K_3$ ), 감쇠장치( $C_1, C_2, C_3$ ) 및 외력이 각각 작용하고 있다고 가정하자. 또한 마디 1은  $l_1, m_1, I_1$ , 마디 2는  $l_2, m_2, I_2$ , 마디 3은  $l_3, m_3, I_3$ 에 의해 각각 길이, 질량, 단면 2차 모멘트를 나타낸다.

이 시스템은 비선형운동을 한다. 이 예제에서는

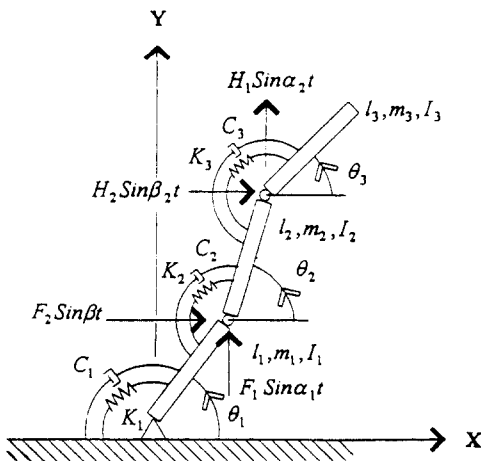


Fig. 1 A three-joint link robot

비선형 시스템의 운동을 어떠한 선형화의 과정없이 명확히 제어가 가능한지, 외력의 작용하에서도 명확히 주어진 제어케도를 따르는지, 또한 이러한 조건들하에서도 명확하게 제어력을 산출할 수 있는지를 알아보는데 그 목적이 있다.

먼저 이 시스템의 자유운동방정식은 Newton이나 Lagrange방법에 의해 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_{12} & B_2 C_{31} \\ B_1 C_{12} & A_2 & B_3 C_{23} \\ B_2 C_{31} & B_3 C_{23} & A_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} 0 & B_1 S_{12} & -B_2 S_{31} \\ -B_1 S_{12} & 0 & B_3 S_{23} \\ B_2 S_{31} & -B_3 S_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_3^2 \end{Bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & C_2 + C_3 & -C_3 \\ 0 & -C_3 & C_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \\
 & + \begin{Bmatrix} G_1 \cos \theta_1 \\ G_2 \cos \theta_2 \\ G_3 \cos \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

여기서

$$A_1 = I_1 + \left( \frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 \right) l_1^2,$$

$$A_2 = I_2 + \left( \frac{m_2}{4} + m_3 \right) l_2^2,$$

$$A_3 = I_3 + \frac{m_3}{4} l_3^2,$$

$$B_1 = \left( \frac{1}{2} m_2 + m_3 \right) l_1 l_2,$$

$$B_2 = \frac{m_3}{2} l_1 l_3,$$

$$B_3 = \frac{m_3}{2} l_2 l_3,$$

$$G_1 = \left( \frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 \right) g l_1,$$

$$G_2 = \left( \frac{m_2}{2} + m_3 \right) g l_2, \quad G_3 = \frac{m_3}{2} g l_3,$$

$$C_{ij} = \cos(\theta_i - \theta_j), \quad S_{ij} = \sin(\theta_i - \theta_j),$$

$$P_1 = F_1 l_1 \sin \alpha_1 t \cos \theta_1 - F_2 l_1 \sin \beta_1 t \sin \theta_1$$

$$+ H_1 l_1 \sin \alpha_2 t \cos \theta_1 - H_2 l_1 \sin \beta_2 t \sin \theta_1,$$

$$P_2 = H_1 l_2 \sin \alpha_2 t \cos \theta_2 - H_2 l_2 \sin \beta_2 t \sin \theta_2,$$

$$P_3 = 0. \quad (16)$$

운동방정식 (15)로부터 이 시스템은 비선형시스템임

을 알 수 있다.

이 시스템 선단(End-effector)의 운동( $x_e, y_e$ )은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} x_e(t) &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3, \\ y_e(t) &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3. \end{aligned} \quad (17)$$

만약 이 시스템 선단(End-effector)이 다음과 같이 XY-평면상을 타원을 따라 시계방향으로 움직이도록 제어를 하고 싶다고 가정하자.

$$\begin{aligned} x_e - (x_e(0) + a) &= a \cos(\pi - at), \\ y_e(t) - y_e(0) &= b \sin(\pi - at). \end{aligned} \quad (18)$$

여기서  $a, b$ , 그리고  $\alpha$ 는 각각 장축, 단축, 타원의 중심에 대한 선단(end-effector)의 회전속도를 나타낸다.

식 (18)을 시간에 관하여 두 번 미분을 취할 경우 식 (4)의 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} l_1 \sin \theta_1 & l_2 \sin \theta_2 & l_3 \sin \theta_3 \\ l_1 \cos \theta_1 & l_2 \cos \theta_2 & l_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix}, \\ b &= \begin{bmatrix} -l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ -l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3^2 + a \alpha^2 \cos(\pi - at) \\ + l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3^2 - b \alpha^2 \sin(\pi - at) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

수치해석을 위하여 정적평형위치와 동시에 제어식 (18)을 동시에 만족하는 값들을 초기조건으로 정하였다.

$$\begin{aligned} \theta_1(0) &= 2.2019 \text{rad}, \quad \theta_2(0) = 1.223 \text{rad}, \\ \theta_3(0) &= 0.7418 \text{rad}, \quad \dot{\theta}_1(0) = 0.5 \text{rad/sec.}, \\ \dot{\theta}_2(0) &= -1.8 \text{rad/sec.}, \\ \dot{\theta}_3(0) &= 4.776 \text{rad/sec.} \end{aligned} \quad (20)$$

또한 상수  $a, b, \alpha$ 는 각각 0.3, 0.1, 5.0을 취하였다. 기타 계수들은 Table 1에 주어졌다. 외력에 의한 값들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_1 &= 50 \text{N}, \quad F_2 = 20 \text{N}, \quad H_1 = 10 \text{N}, \quad H_2 = 100 \text{N}, \\ \alpha_1 &= 3 \text{rad/sec.}, \quad \alpha_2 = 1 \text{rad/sec.}, \end{aligned}$$

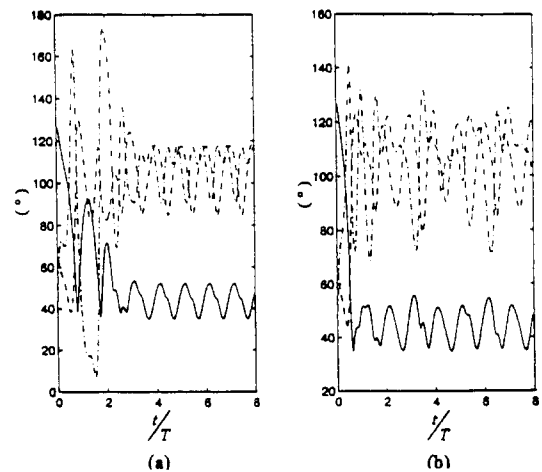
**Table 1** Properties of the three-joint link robot

Bar	$m_i$ (kg)	$l_i$ (m)	$I_i$ (kg · m <sup>2</sup> )	$K_i$ (N/rad)	$C_i$ (N · sec/rad)
1	30	1	2.5	100	6
2	30	1	2.5	100	6
3	10	0.4	0.13	30	3

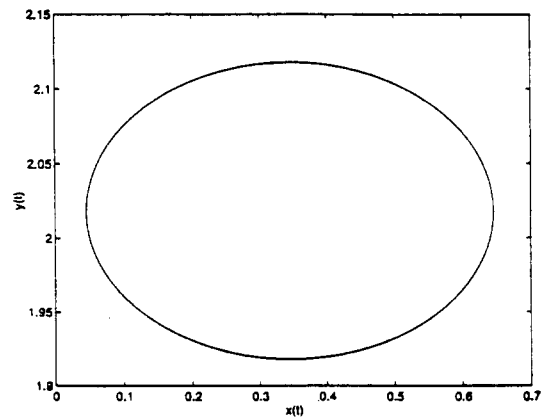
$$\beta_1 = 5 \text{rad/sec.}, \quad \beta_2 = 3 \text{rad/sec.} \quad (21)$$

이들 외력의 값들은 시스템의 거동에 영향을 줄 수 있을 만큼 커다란 값들이다.

앞의 값들을 이 시스템의 운동방정식에 사용하여 Runge-Kutta방법을 사용하여 수치적으로 적분을 행하였다. Fig. 2는 외력이 작용할 때와 작용하지 않을 경우의 이 시스템의 각 성분에 대한 운동을  $\frac{t}{T}$ 에 대해 도시하였다. ( $T \frac{2\theta}{\theta} = 1.2566/\text{sec.}$ )는 선단(end-effector)이 타원을 따라 한바퀴 돌 때의 시간, 즉 주기를 나타낸다. Fig. 3은 선단(end-effector)이 운동하는 동안의  $x$ 성분과  $y$ 성분을 나타낸다. Fig. 3에서 볼 수 있듯이 외력의 작용에 관계없이 원하는 궤도



**Fig. 2** Motion of each component of the system (a) in the absence and (b) in the presence of the disturbances; The solid line shows the  $\theta_1$ -component, the dashed line the  $\theta_2$ -component, and the dash-dot line the  $\theta_3$ -component.



**Fig. 3** Motion of the End-effector

즉 타원을 따라 정확히 운동하는 것을 볼 수 있다. Fig. 4는 절점 2의 운동을 보여준다. Fig. 5는 외력이 작용할 때와 작용하지 않을 경우의 절점 2에 작용하는 제어력을 나타낸다. 이들 결과에서 알 수 있듯이 주어진 제어식을 따라 명확한 제어 및 제어력을 산정할 수 있었다. 또한 이러한 비선형 시스템에 대하여 어떤 선형화 과정없이 제어가 가능함을 알 수 있다. 다음 예제에서는 Nonholonomic 시스템을 고려한다. 일반적으로 Nonholonomic 시스템에 대한 제어는 기존의 방법을 취할 경우 상당한 어려움이 있었다.

### 5. 구르는 동전의 거동(Rolling Coin)

이 예제는 과거의 많은 연구자들에 의해 다루어졌던 Nonholonomic 시스템이다. 이들에 의한 결과에서는 어떠한 수치적인 결과를 찾아볼 수 없었다.

미끄러짐이 없는 수평면위를 반경  $a$ , 질량  $m$ 인 동전의 거동을 고려하자. 이 동전의 거동은 3개의 Euler 각과 동전중심  $x, y$ 에 의해 즉  $q(t)=[x \ y \ \theta \ \phi]^T$ 으로 묘사할 수 있다.

이러한 동전의 거동은 비선형의 거동을 하며 또한 Nonholonomic 시스템이다. 이 예제를 통하여 선형화과정없이 안전한 운동을 위해 자연에 의해 주어지는 명확한 제어력을 산정하며, 주어진 궤도를 따라 정확히 운동을 하는지를 살펴본다.

일반적으로 Euler 각은 다음과 같이 정의된다. (Fig. 6참조).

(1) 먼저  $x_3$  축에 대하여 각  $\phi$ 만큼 반시계 방향으로 회전시킬 경우  $x_1$ 과  $x_2$ 는 각각  $x_1'$ 과  $x_2'$ 로 이동한다.

(2) 다음으로  $x_2'$ 축에 대하여 각  $\theta$ 만큼 반시계방향으로 회전시키면  $x_2'$ 과  $x_3'$ 는 각각  $x_1''$ 과  $x_3''$ 으로 이동한다.

(3) 마지막으로  $x_3''$  축에 대하여 각  $\psi$ 만큼 반시계 방향으로 회전시키면  $x_1''$ 과  $x_2''$ 는 각각  $x_1'''$ 과  $x_2'''$ 으로 이동한다.

구르는 동전의 자유운동방정식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= 0, \quad m\ddot{y} = 0, \\
 (ma^2 \cos \theta + I_A) \ddot{\theta} &= ma^2 \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta + I_A \dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta - I_c (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\phi} \sin \theta - mg a \cos \theta, \\
 I_A \sin^2 \theta \ddot{\phi} &= I_c (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\theta} \sin \theta - I_A \dot{\phi} \dot{\theta} \sin 2\theta, \\
 \ddot{\psi} &= \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta - \ddot{\phi} \cos \theta.
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

이 시스템은 다음과 같은 Nonholonomic 제어식에 의해 제어되고 있다.

$$\dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi - a \dot{\theta} \sin \theta = 0, \tag{23}$$

$$-\dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi + a \dot{\phi} + a \dot{\phi} \cos \theta = 0. \tag{24}$$

만약 추가로 동전의 중심점이 임의의 원을 따라 움직이도록 제어를 한다면 그 제어식은 다음과 같은 Holonomic 제어식이 될 것이다.

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{25}$$

여기서  $r$ 은 원의 반지름을 나타낸다. 이들 조건을

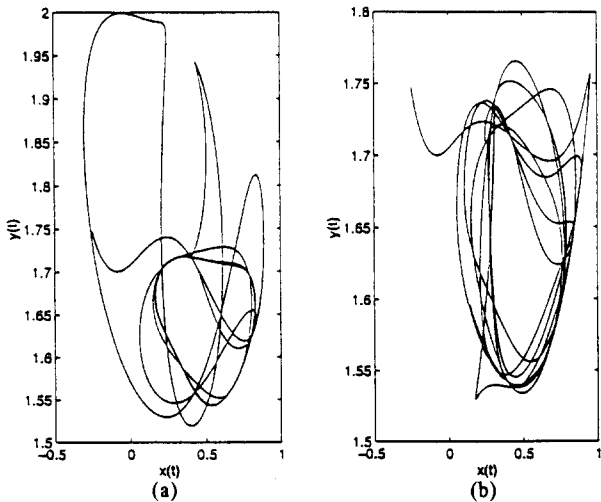


Fig. 4 Motion of the joint 3 (a) in the absence and (b) in the presence of the disturbances.

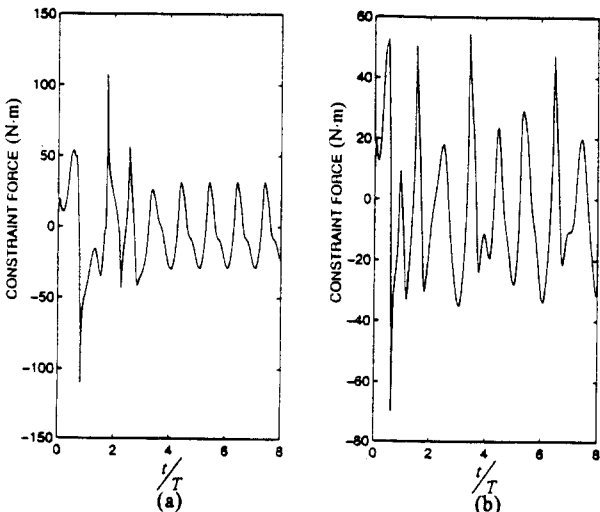


Fig. 5 Control torque at joint 3 (a) in the absence and (b) in the presence of the disturbances.

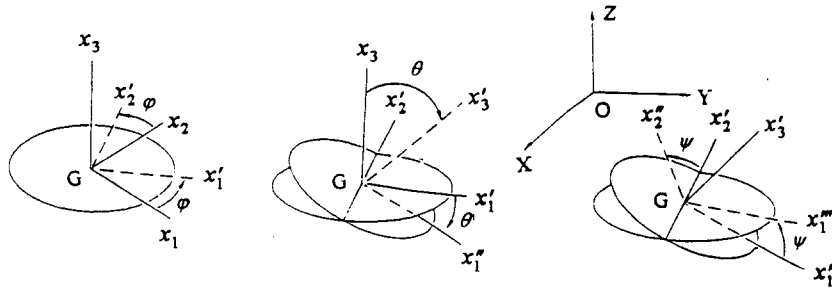


Fig. 6 The Euler angles for the rolling coin

가지고 다음과 같이 식 (4)의 형태로 표현할 수 있다.

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & -a\sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & a\sin\theta & a \\ x & y & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{Bmatrix} \dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi + a\dot{\theta}^2\cos\theta \\ \dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi + a\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta \\ -\dot{x}^2 - \dot{y}^2 \end{Bmatrix}. \quad (26)$$

수치해석을 위하여 다음의 초기조건을 사용한다.

$$\begin{aligned} x(0) &= 4\text{cm}, & y(0) &= 0, & \theta(0) &= 1.2217\text{rad}, \\ \varphi(0) &= 0.0029\text{rad}, & \psi(0) &= 0, & \dot{x}(0) &= 0, \\ \dot{y}(0) &= -12\text{cm/rad}, & \dot{\theta}(0) &= -0.0312\text{rad/sec}, \\ \dot{\varphi}(0) &= -80\text{rad/sec}, & \dot{\psi}(0) &= 37.36\text{rad/sec}. \end{aligned} \quad (27)$$

또한 동전의 질량  $m$ 은 5.5그램, 동전의 반경  $a$ 는 1.2cm, 중력가속도  $g$ 는 980kg/cm<sup>2</sup>를 각각 택하였으며 원의 반지름  $r$ 은 4cm를 취하였다.

이러한 조건들을 가지고 이 시스템의 운동을 3차

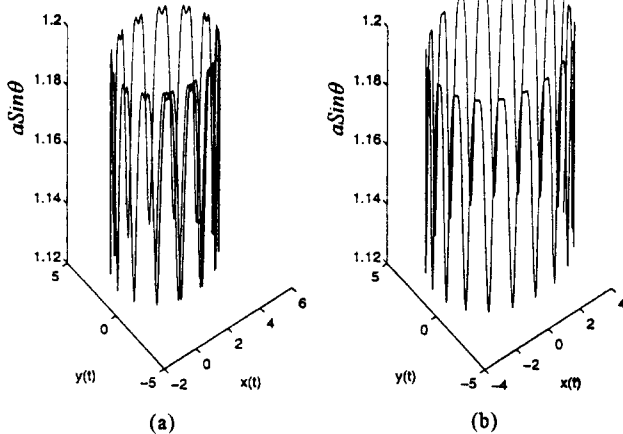


Fig. 7 Three-dimensional motion of the center of gravity of the coin with (a) two nonholonomic constraints and (b) three constraints.

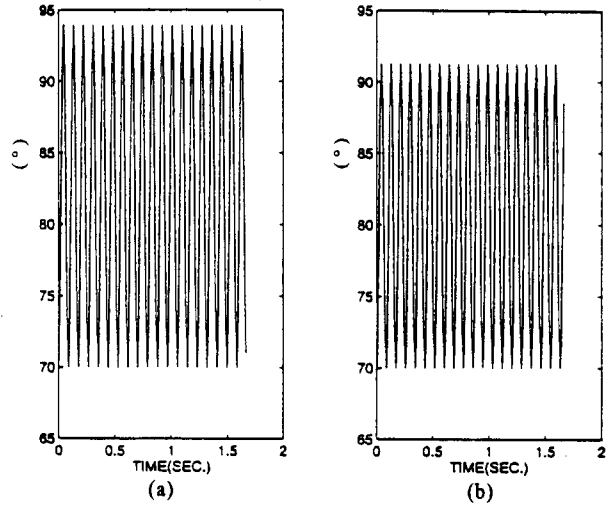


Fig. 8 Motion of the  $\theta$ -component of the coin with (a) two nonholonomic constraints and (b) three constraints.

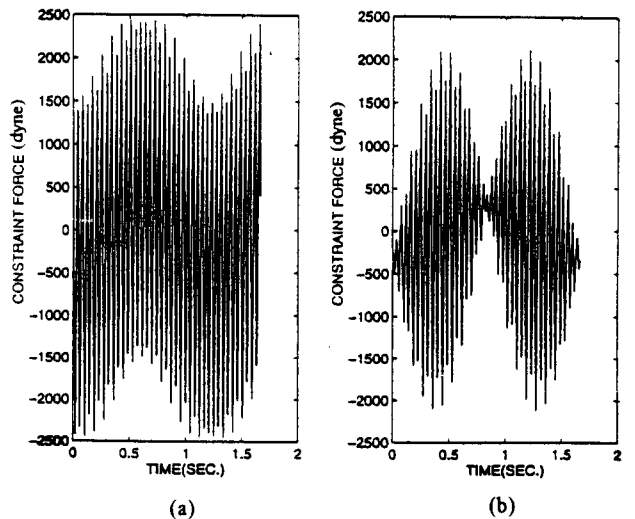


Fig. 9 Control force of the  $x$ -component of the center of gravity of the coin with (a) two nonholonomic constraints and (b) three constraints.

원적으로 Fig. 7에 나타내었다. 주어진 두 개의 제어식 (23)과 (24)에 의한 결과와 추가적인 제어식 (25)에 의한 결과를 비교하였다. Fig. 7에서 알 수 있듯이 추가적인 제어식에 의하여 동전의 중심은 원을 따라 정확히 운동하고 있음을 알 수 있다. Fig. 8은 성분  $\theta$ 의 시간에 따른 운동을 보여준다. Fig. 9는 동전의 중심인 x성분 대한 제어력을 보여준다. 이들 그림에서 알 수 있듯이 추가적인 제어식으로 인하여 그 제어식을 만족하기위한 추가적인 제어력

이 달리 작용하고 있음을 알 수 있다.

Figs. 10과 11은 동전의  $\theta$ 와  $\phi$ 성분에 작용하는 제어력을 각각 나타낸다. 만약 이 제어력을 인위적으로 가할 경우에 상당한 어려움이 있으리라 여겨진다. 이 예제를 통하여 비선형의 시스템을 어떠한 선형화의 과정없이 명확히 그 거동 및 제어력을 결정할 수 있었다.

## 6. 결 론

본 연구에서는 GIM을 사용하여 Holonomic과 Nonholonomic시스템의 제어에 대하여 살펴보았다. 기존의 방법에 의하면 비선형 시스템의 제어나 Nonholonomic시스템에 대한 제어는 상당히 어려운 문제였다. 그러나 GIM를 사용하면 보다 간단하고 쉽게 그리고 명확히 시스템을 제어할 수 있음을 알 수 있었다. 본 연구를 통하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

(1) 어떠한 선형화과정 없이 비선형의 시스템을 명확히 제어할 수 있었다. 또한 중간의 어떠한 과정 없이 단지 제어식을 시간에 관하여 미분함으로써 쉽게 결과를 얻을 수 있었다.

(2) 외력의 존재에 관계없이 원하는 제어식을 명확히 충족시킬 수 있었으며 또한 그 때의 자연에 의해 제공되는 제어력을 확실하게 산정할 수 있었다. 특히 Pseudo Inverse는 소프트웨어인 Mathematica나 Matlab을 사용하여 쉽게 계산할 수 있다.

본 연구의 결과로부터 다음과 같은 연구가 앞으로 진행될 것이다.

(1) 예제들에서 계산된 제어력을 인위적으로 어떻게 가할 수가 있는지가 어려운 문제로 남아 있다.

(2) 3절점의 로봇의 문제에서 각 마디는 강체로 가정하였으나 만약 이들 마디가 유연할(Flexible) 경우 내부의 메카니즘까지 고려한 동적 거동을 고려할 필요가 있다.

## 참 고 문 헌

- (1) Gibbs, J. W., 1879, "On The Fundamental Formulae of Dynamics," American Journal of Mathematics, Vol. 2, pp. 49~64.
- (2) Appell, P., 1911, "Sur Les Liaisons Exprimees Par des Relations Non Lineaires Entre Vitesses," Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Academie des Sciences (Paris), Tome CLII(Ier

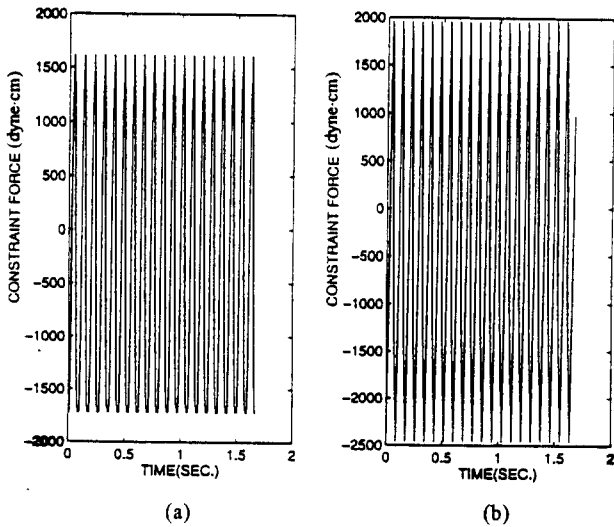


Fig. 10 Control force of the  $\theta$ -component of the coin with (a) two nonholonomic constraints and (b) three constraints.

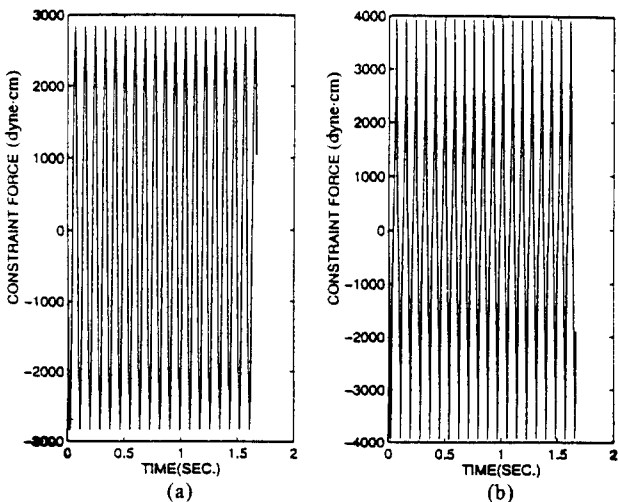


Fig. 11 Control force of the  $\phi$ -component of the coin with (a) two nonholonomic constraints and (b) three constraints

- Semestre 1911), pp. 1197~1199.
- (3) Kane, T. R., Dec. 1961, "Dynamics of Non-holonomic Systems," ASME Journal of Applied Mechanics, pp. 574~578.
- (4) Passerello, C. E. and Huston, R. L., Mar. 1973, "Another Look at Nonholonomic Systems," ASME Journal of Applied Mechanics, pp. 101~104.
- (5) Udwadia, F. E. and Kalaba, R. E., 1992, "A New Perspective on Constrained Motion," Proceedings of the Royal Society of London, Vol. 439, pp. 407~410.
- (6) Udwadia, F. E., Kalaba, R. E., and Eun, H.C., 1995, "The Extended D'Alembert's Principle and Equations of Motion for Constrained Mechanical Systems," Quarterly Applied Mathematics,
- (7) Eun, H.C., 1995, "On The Dynamics and Control of Constrained Mechanical & Structural Systems," PhD. Thesis.
- (8) Appell, P., 1911, "Exemple De Mouvement D'un Point Assujetti A Une Liaison Exprimee Par Une Relation Non Lineaire Entre Les Composantes De La Vitesse," Rend. Circ. Matem. Palermo., Vol. 32, pp. 48~50.