

## Double Cantilever Beam 방법을 이용한 다결정 알루미나의 Bridging 응력효과 해석

### II. Bridging 효과를 고려한 Double Cantilever Beam 분석방법의 정립

손기선 · 이성학 · 백성기

포항공과대학교 항공재료연구소

(1995년 11월 23일 접수)

## Analysis of Bridging Stress Effect of Polycrystalline Aluminas Using Double Cantilever Beam Method

### II. Development of Double Cantilever Beam Method Considering Bridging Effect

Kee-Sun Sohn, Sunghak Lee and Sunggi Baik

Center for Advanced Aerospace Mater., Pohang Univ. of Sci. and Tech., Pohang 790-784

(Received November 23, 1995)

#### 요 약

본 연구에서는 정확한 bridging 응력분포를 구하기 위해 새로운 double cantilever beam(DCB) 분석법을 개발하였다. 기존의 DCB 분석에서는 DCB 시편의 극단에 가해지는 하중에 의한 균열열림만을 고려하여, 이에 따른 응력확대계수만을 산출하는 것이 대부분이었다. 그러나 이러한 DCB 분석에서 계산된 균열열림식의 결과를 결정립크기가 조대한 알루미나 재료에 적용할 경우에는 실측치와 상당한 차이를 보인다. 이는 균열의 양 측면에서 작용하는 bridging 현상에 의한 균열닫힘이 주원인인므로, 본 연구에서는 이러한 bridging에 의한 영향을 DCB 분석 자체에 가미함으로써 보다 정확한 DCB 분석법을 정립하였다. 이러한 균열닫힘을 계산하는 과정에 Part I에서 언급된 결정립크기분포를 포함하는 이론 모델과 Power law 함수를 따로 적용하여 각각의 결과를 비교 검토하였다. 또한 시편규격, 탄성계수를 포함한 상수, 적용하중 등의 영향을 자세히 고찰함으로써 새로운 DCB 분석의 신뢰도를 입증하였다.

#### ABSTRACT

This study aims at developing the double cantilever beam (DCB) method in order to calculate the bridging stress distribution in polycrystalline aluminas with different grain sizes. In the already existing DCB methods, the measured crack opening displacement (COD) in coarse-grained aluminas deviates generally from the calculated one because of the grain-interface bridging in the crack wake. In the current DCB method developed in the present study, the effect of the bridging stress was considered in the DCB analysis, whereas the only effect of applied point-loading at the end of DCB specimen was taken into account in the existing DCB analysis. The crack closure due to bridging stress was calculated using the power-law relation and the theoretical model developed in Part I of the present paper as bridging stress functions, and then compared analytically. The limitations of the current DCB methods such as specimen dimensions, applied loads, and elastic modulus were discussed in detail to provide a reliability of the newly developed DCB analysis for the bridging stress distribution in polycrystalline aluminas.

**Key words:** Double cantilever beam (DCB), Polycrystalline alumina, Grain-interface bridging, Bridging stress, Crack opening displacement (COD), Crack closure

1. 서 론

세라믹 재료의 파괴시험에는 double cantilever beam (DCB)법<sup>12)</sup>, single edged notched bar (SENB)법<sup>3-8)</sup>, double torsion(DT)법<sup>9-13)</sup>, compact tension(CT)법<sup>11-20)</sup>, 그리고 indentation-flexural strength(I-S)법<sup>21-41)</sup>등이 이용되고 있다. 일반적으로 전자의 네 방법은 하중-균열 열림범위 곡선을 얻음으로써 파괴인성 또는 파괴에너지를 계산하게 되므로 하중조건을 조정함으로써 급작스런 파괴가 일어나기 전에 어느 정도의 안정한 균열전파를 야기시킬 수 있다는 장점을 가지고 있다. 이러한 방법들을 이용할 경우 수 mm 이상의 범위를 가지는 long range R-curve를 얻을 수 있으며, 이 R-curve에 의한 파괴인성의 최대값(saturated toughness)은 알루미늄에서 거의 6~7 MPam<sup>1/2</sup>에까지 이르는 것으로 알려져 있다<sup>1)</sup>. 특히 double cantilever beam(DCB)법이나 double torsion(DT)법은 균열전파에 대한 임의 조절이 더욱 수월하여 정적하중 하에서의 정적파괴시험(static fatigue test)에 많이 이용되어 왔다<sup>9-11)</sup>. 마지막으로 언급한 indentation-flexural strength(I-S)법은 다른 방법들과는 달리 파괴인성, 즉 R-curve를 구하는 것으로서 비교적 최근에 개발되었다. 앞의 방법들을 이용할 경우 수 mm 이상의 범위를 가지는 long range R-curve를 얻는 것애 비해 indentation-flexural strength(I-S)법은 매우 작은 범위에서의 short range R-curve를 산출하며, R-curve 상의 최대파괴인성도 long range R-curve에서 보다 낮은 값을 보인다(Fig. 1). 이러한 원인에 대해서는 아직 자세히 밝혀진 바는 없지만, 재료의 특성에 의한 것이라기보다는 방법 자체가 갖는 구조적인 문제에 기인하는 것으로 보고되고 있다. 이러한 구조적인 문제의 구체적인 내용은 주로 I-S법의 실행시 도입되는 두 종류의 응력 확대계수식(stress intensity factor equation)에 포함되는 상수값에 대한 논란에 있다. 실제 재료의 종류에 관계 없이 일정한 값을 가져야 하는 상수<sup>21,32)</sup>들은 실측한 연구자들마다 다른데<sup>21-31)</sup>, 이러한 난점을 해결하기 위해 Strause Jr.<sup>32)</sup>는 균열진전에 따른 상수값의 변화를 고려한 개선안을 제시하기는 하였지만, 이 또한 완벽하게 문제를 해결하지는 못하였다. 더우기 최근 Steinbrech 등<sup>34)</sup>의 연구에 의하면, I-S법에 의해 산출된 R-curve는 실제 재료의 미세구조에 의해 발생하는 것이라기보다 앞서 언급한 상수값들의 잘못된 사용으로 인한 결과라는 특이한 주장을 하기에 이르렀다.

따라서 본 연구에서는 특별한 논란이 없는 double cantilever beam(DCB)법을 채택하였다. DCB법은 고전적

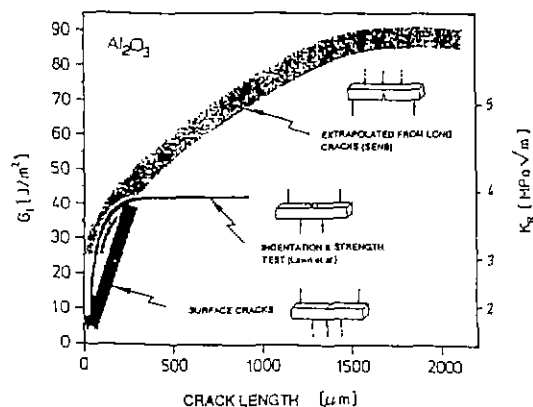


Fig. 1. Schematic diagram showing R-curve behavior of specimens with short or long crack<sup>2)</sup>.

인 cantilever beam 이론을 개선하여 세라믹 재료의 파괴특성 연구에 적용한 것으로서 Gilman<sup>35)</sup>이 최초로 도입하였다. Gilman의 연구에서는 단순한 굽힘에 의해 cantilever beam에 축적되는 탄성에너지를 계산함으로써 파괴인성을 구하였다. 그 후 Gillis와 Gilman<sup>36)</sup>은 이전의 Gilman 이론에 전단(shearing)에 의한 기여를 첨가하여 더욱 발전된 형태의 결과를 얻었다. Gross와 Srawley<sup>37)</sup>은 cantilever beam에 축적되는 탄성에너지를 계산하는 Gilman의 방법과는 달리 DCB 시편의 탄성해(elastic solution)를 구하여 이로부터 K<sub>II</sub>값을 구하는 방법을 사용하였다. Wiederhorn<sup>38)</sup>은 Gillis와 Gilman의 방법과 Gross와 Srawley의 방법을 실제 여러 세라믹 재료에 적용하여 미지수로 남아 있던 상수들을 결정지었다. 이러한 과정에서 결정된 각각의 상수들은 시험재료에 관계 없이 일정한 값을 가짐으로써 DCB법은 불확실한 상수들을 가지는 I-S법과는 달리 매우 일관된 방법임을 알 수 있다.

Kanninen<sup>39)</sup>과 Chow 등<sup>40)</sup>은 위의 방법들이 견고한 벽(rigid wall)에 고정된 cantilever beam의 굽힘(bending)과 전단(shear)을 고려한 것과는 달리 cantilever beam이 elastic foundation에 놓여진 것으로 간주함으로써 앞서의 방법들과는 약간 다른 결과를 얻었다. 또한 Freiman 등<sup>41)</sup>은 cantilever beam을 세 부분으로 분리한 후 각각의 부분에서의 탄성에너지축적을 계산함으로써 Gillis와 Gilman의 이론과 Kanninen의 elastic foundation 이론을 동시에 고려한 결과를 보고하였다. 이와 같은 DCB 방법에 대한 모든 연구결과들은 서로 다른 과정을 취하여 결과들을 산출하였으며, 최근에까지 여러 연구자들에게 의해 인용되고 실제 사용되고 있다. 예를 들어 White와 Kelkar<sup>42)</sup>는 Srawley와 Gross의 결과를 채택하

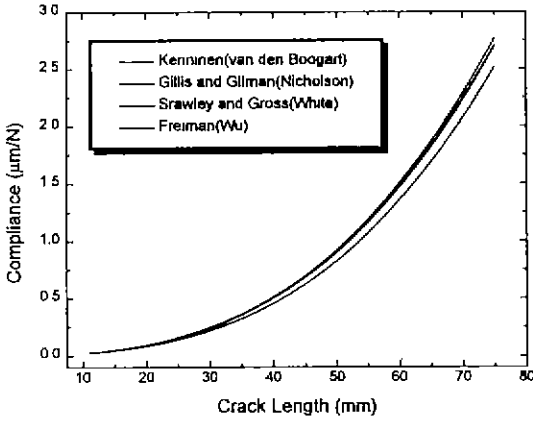


Fig. 2. Compliance curves as a function of crack length on the basis of several solutions of DCB system under the same load and geometry condition.

여  $MgAl_2O_4$  spinel의 파괴인성을 측정하였으며, Nicholson<sup>43)</sup>은 Gillis와 Gilman의 방법을 이용한 computational system을 개발하였다. 또한 With<sup>44)</sup>는 Wiederhorn과 Kanninen의 방법을 토대로 소형 접합재료의 접합부 특성을 연구하였으며, Swain<sup>1)</sup>과 Beauchamp와 Monroe<sup>45)</sup>는 Freiman 등의 방법을 이용하여 알루미늄의 R-curve 연구와 ferrite의 정적피로시험에 응용하였다.

위에서 일반적인 DCB 법의 몇가지 유형을 소개하였지만, 이들은 그 유도과정에서 다소의 차이를 보이고 있을 뿐 결과식을 비교해 보면 거의 차이가 없다. 이를 간단히 알아 볼 수 있도록 각 결과로부터 compliance을 유도하여 Fig.2에 나타내었다. Fig.2는 일정한 모양의 시편을 가정하여 일정한 하중에서 계산한 결과로서 Gillis와 Gilman의 결과, Srawley와 Gross의 결과, 그리고 Kanninen의 결과는 거의 일치하고 있으며, Freiman의 결과만 약간 다른 것을 볼 수 있다. 그러나 이러한 차이도 실제 일반적으로 많이 사용되는 시편 크기에서의 균열 길이인 20~30mm에서는 거의 무시할 수 있을 정도의 값인 것을 알 수 있다.

Wiederhorn은 Gillis와 Gilman의 결과를 알루미늄, soda lime glass, fused silica glass 등의 재료에 적용하여 균열열림변위값을 나타내는 식 (1)을 완성하였다. 즉, 식 (1)은 어떠한 bridging 효과도 없는 DCB 시편의 경우 외부하중에 의해 발생하는 균열열림변위값을 하중점으로부터의 거리에 대해 나타낸 식이다.

$$u = \frac{2F}{Ebh^3} (2L^3 - 13L^2x + x^3) + \frac{5.6F}{Gbh} (L-x) \quad (1)$$

$$+ \frac{7.9FL}{Ebh^2} (L-x)$$

- u: crack opening displacement
- E: elastic modulus
- G: shear modulus
- b: specimen thickness
- h: specimen half height
- L: total crack length
- F: load at specimen end
- x: distance from the loading point

그러나 실제 비교적 조대한 결정립 구조를 갖는 알루미늄에서 균열열림변위를 측정해 보면, 식 (1)보다 훨씬 낮은 값을 얻게 되어 식 (1)은 의미 없는 식이 되어 버린다. 이는 결정립에 의한 bridging에 의해 균열의 양측면에 닫힘장(closure field)가 형성되어 균열열림을 방해하기 때문이다.

본 연구에서는 기존의 DCB 방법들이 모두 외부에서 한 점에 가해 주는 하중에 의한 균열열림의 문제만을 고려한 것에 비해 최초로 균열선단 뒷부분에 형성되는 wake(=bridging zone)에 의한 영향을 기존의 DCB 방법에 가미하였다 즉, bridging에 의한 닫힘장만이 하중 조건으로 작용하는 새로운 DCB system을 설정하여 이에 따른 균열단힘을 계산하였다. 이렇게 계산된 균열단힘과 기존의 DCB 분석에서 인용한 균열열림값(식 (1))을 합한 결과를 이용하면 조대한 결정립 구조를 갖는 알루미늄에서의 균열열림변위도 예측할 수 있다. 균열단힘의 계산과정에는 반드시 bridging 응력함수가 도입되어야 하는데, 본 연구에서는 이를 위해 본 논문의 Part I에서 언급한 두 가지 bridging 응력함수, 즉 power law 경험식과 결정립크기분포를 포함하는 이론적 모델을 도입하였다.

## 2. Bridging에 의한 균열단힘 계산

### 2.1. Power Law 경험식을 대입한 경우

Power law 경험식을 이용하여 bridging에 의한 균열단힘을 계산하기 위해서 Fig.3에서와 같은 cantilever beam을 고려하였다. 일반적으로는 Part I의 식 (1)과 같이 균열열림에 대한 함수로 표기된 power law 경험식을 계산상의 편의를 위해 균열선단으로부터의 거리에 대한 함수로 바꾸고, 이를 다시 Fig.3에서와 같은 새로운 좌표계(coordinate)에 적용하여 다음과 같이 바꾸었다.

$$q = -bP_M \left( \frac{x-L}{C_s} + 1 \right)^n \quad (2)$$

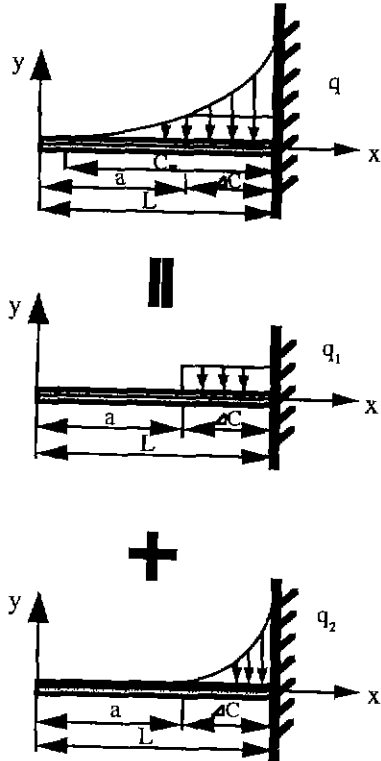


Fig. 3. Schematic diagram of DCB system loaded by a bridging stress. This system is adopted to calculate the bridging stress using the power law relation.

따라서 식(2)의 x는 하중점으로부터의 거리를 나타내는 변수가 된다. 여기서 q는 load-intensity function<sup>(6)</sup>이라 하며, 간단하게는 단위길이당의 하중으로 생각할 수 있다. 따라서 실제 응력의 단위로 표현되는 Part I에서의 식 (1)에 시편의 두께(b)만큼 곱한 형태를 갖게 된다. 그러나 Fig. 3에서 나타낸 바와 같이 본 연구에서 채택한 시스템은 다이아몬드 휠에 의한 노치의 도입으로 인해 원점에서 a 만큼 떨어진 지점에서 특이성(singularity)을 갖는다. 따라서 식 (2)는 다음과 같은 두 특이함수(singularity function)를 이용하여 변형해야 한다.

$$q = q_1 + q_2 = -bP_M \left( \frac{a-L}{C_\infty} + 1 \right)^n \langle x-a \rangle_n - bP_M \left[ 1 - \left( \frac{a-L}{C_\infty} + 1 \right)^n \right] \left\langle \frac{x-a}{L-a} \right\rangle^n \quad (3)$$

이와 같이 식 (2)가 직접 하나의 특이함수로서 작용하지 못하고 두가지 특이함수로 변형되는 이유는 특이

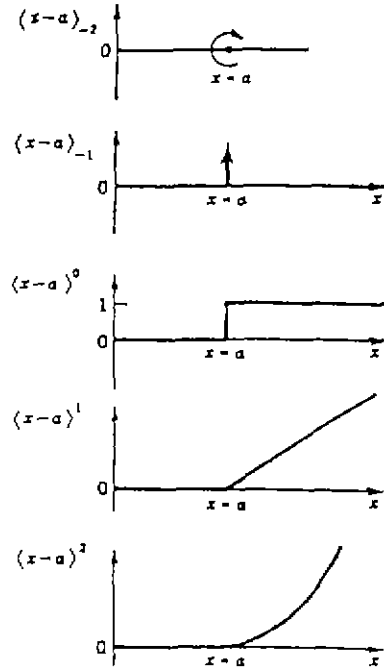


Fig. 4. Group of singularity functions.

함수는 수학적 정의에 의해 특별히 정의된 몇가지 특이함수군(singularity function family)외에는 사용할 수 없기 때문이다<sup>(6)</sup>. Fig. 4에 일반적으로 공인된 특이함수군의 각각에 대한 수식과 도식적인 그림을 나타내었다. 특이함수는  $\langle \rangle$ 의 기호로 나타내며  $\langle \rangle$ 의 내부가 양이 되면 그 값을 취하게 되며, 음이 될 경우에는 항상 0이 된다. 특히  $\langle \rangle_0$  꼴의 특이함수는 unit step이라 하며, 적분하면  $\langle \rangle$ 의 unit ramp 형태로 되고,  $\langle \rangle^n$  형태의 특이함수의 적분은 일반적인 함수의 적분방식을 그대로 따른다.

Load-intensity function으로부터 다음과 같은 관계에 의해 적분하여 전단력(shear force)을 구한다.

$$\frac{dV}{dx} + q = 0 \quad (4)$$

$$V = bP_M \left( \frac{a-L}{C_\infty} + 1 \right)^n \langle x-a \rangle + \frac{bP_M(L-a)}{n+1} \left[ 1 - 10 \left( \frac{a-L}{C_\infty} + 1 \right)^n \right] \left\langle \frac{x-a}{L-a} \right\rangle^{n+1} + C_1 \quad (5)$$

적분상수  $C_1$ 을 구하기 위한 경계조건으로는 원점 즉

$x=0$ 에서 전단력이 작용하지 않는 것을 이용하였다. 식 (5)의  $x$ 에 0을 대입하면 식 (5)의 우변의 모든 항은 특이함수형태로 되어 있기 때문에 특이함수의 정의에 의해  $x=0$ 에서는 함수자체가 0이 되어 버리므로  $C_1$ 은 결국 0이 된다.

다시 전단력을 식 (6)을 통해 적분하면 굽힘 모멘트를 구할 수 있다.

$$\frac{dV}{dx} - M = 0 \quad (6)$$

$$M = \frac{bP_M}{2} \left( \frac{a-L}{C_\infty} + 1 \right)^n \langle x-a \rangle^2 + \frac{bP_M(L-a)^2}{(n+1)(n+2)} \left[ 1 - \left( \frac{a-L}{C_\infty} + 1 \right)^n \right] \left\langle \frac{x-a}{L-a} \right\rangle^{n+2} + C_2 \quad (7)$$

전단력의 상수  $C_1$ 을 구할 때와 비슷한 방법으로 적분상수  $C_2$ 를 구하기 위해 경계조건으로  $x=0$ 에서 굽힘 모멘트가 작용하지 않는 것을 이용하였다. 식 (7)의  $x$ 에 0을 대입하면, 식 (5)에서와 같은 원리에 의해 우변의 모든 특이함수항들은 0이 되고, 따라서  $C_2$ 도 0이 된다.

한편 전단력과 모멘트로부터 균열단힘변위를 구하기 위해서는 다음과 같은 미분방정식을 도입해야 한다.

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{M}{EI} + \frac{k}{AG} \frac{dV}{dx} \quad (8)$$

여기서  $I$ 는 DCB 시편의 관성모멘트(moment of inertia)로서  $bh^3/12$ 로 나타낼 수 있다.  $A$ 는 DCB 시편의 한쪽 단면으로  $bh$ 로 나타낼 수 있다. 상수  $k$ 는 1에 근접하는 numerical factor이다<sup>30)</sup>.

식 (5)와 식 (7)을 식 (8)에 대입하고, 이를 다시 한번 적분하고 경계조건으로  $x=L$ 에서 전단에 의한 회전(rotation)만이 존재한다는 것을 이용하면, 식 (9)와 같은 1차 미분항을 구할 수 있다. 실제 한 점에서 비교적 큰 하중이 가해지는 기존의 DCB 분석에서  $x=L$ 에서의 경계조건은 시편의 수직단면의 위치에 따른 고려와 균열선단을 넘어선 영역 즉  $x>L$ 의 영역에서의 탄성변형이 고려되어야 하지만, 본 연구에서와 같이 비교적 넓은 영역에서 비교적 약한 bridging 응력이 하중조건으로 작용할 때는 전단에 의한 고려 이외에는 모두 무시해도 무방하다.

$$\frac{du}{dx} = \frac{bP_M}{6EI} \left( \frac{a-L}{C_\infty} + 1 \right)^n [(L-a)^3 - \langle x-a \rangle^3] \quad (9)$$

$$+ \frac{bP_M(L-a)^3}{EI(n+1)(n+2)} \left[ 1 - \left( \frac{a-L}{C_\infty} + 1 \right)^n \right] \left[ 1 - \left\langle \frac{x-a}{L-a} \right\rangle^{n+3} \right] + \frac{kbP_M}{AG} \left( \frac{a-L}{C_\infty} + 1 \right)^n \langle x-a \rangle + \frac{kbP_M(L-a)}{AG(n+1)} \left[ 1 - \left( \frac{a-L}{C_\infty} + 1 \right)^n \right] \left\langle \frac{x-a}{L-a} \right\rangle^{n+1}$$

한편 식 (9)를 다시 적분하고 균열선단에서는 변위가 없다는 점을 감안하여  $x=L$ 에서  $u=0$ 인 경계조건을 사용하면, 최종적으로 식 (10)과 같은 결정립 bridging에 의한 균열단힘을 얻을 수 있다.

$$u = \frac{bP_M}{6EI} \left( \frac{a-L}{C_\infty} + 1 \right)^n \left[ (L-a)^3 x - \frac{1}{4} \langle x-a \rangle^4 - (L-a)^3 L + \frac{1}{4} (L-a)^4 \right] + \frac{bP_M(L-a)^4}{EI(n+1)(n+2)(n+3)} \left[ 1 - \left( \frac{a-L}{C_\infty} + 1 \right)^n \right] \left[ x - L + \frac{L-a}{n+4} \right] + \frac{kbP_M}{2AG} \left( \frac{a-L}{C_\infty} + 1 \right)^n \left[ 1 - \left\langle \frac{x-a}{L-a} \right\rangle^{n+1} \right] + \frac{kbP_M(L-a)^2}{AG(n+1)(n+2)} \left[ \langle x-a \rangle^2 - \langle L-a \rangle^2 \right] + \frac{kbP_M(L-a)^2}{AG(n+1)(n+2)} \left[ 1 - \left( \frac{a-L}{C_\infty} + 1 \right)^n \right] \left[ \left\langle \frac{x-a}{L-a} \right\rangle^{n+2} - 1 \right] \quad (10)$$

## 2.2. 결정립 크기 분포를 포함하는 모델을 사용한 경우

본 논문의 Part I에서 유도된 결정립크기분포모델을 DCB 분석에 포함시켜 균열단힘을 유도하였다. 모델에 의하면 bridging 응력함수는 크기에 의해 나뉘어진 각 결정립 그룹에 의한 직선적 응력함수들을 모두 더해줌으로써 얻을 수 있다. 그룹 평균크기  $i \mu m$ 를 갖는 결정립 그룹에 의한 bridging 응력함수는 Part I에서의 식 (5)와 같이 나타낼 수 있다. Part I에서의 식 (5)에 나타난 균열단힘변위에 대한 함수를 하중점으로부터의 거리에 대한 함수로 바꾼 후 이를 다시 load-intensity function으로 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다. 아래 함수의  $\langle \rangle$ 로 표기된 부분은 특이함수(singularity function)을 나타내는 것이다.

$$q_i = f_i bP_M \left\langle \frac{L(x-L)}{iC_\infty} + 1 \right\rangle \quad (11)$$

위의 같은 결정립분포를 포함하는 모델을 DCB 분석에 도입한 시스템은 Fig. 5에 도식적으로 잘 나타나 있다.

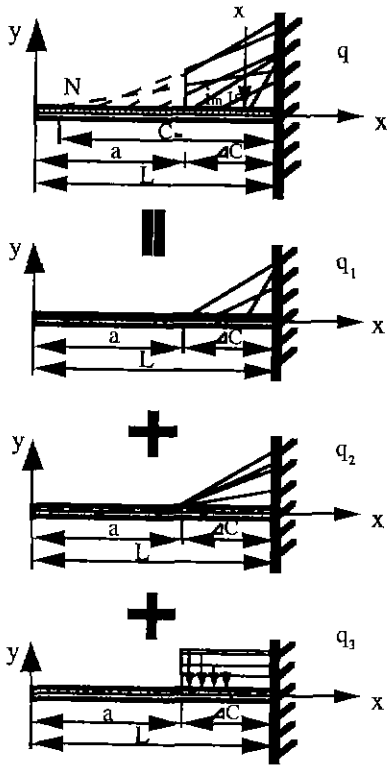


Fig. 5. Schematic diagram of DCB system loaded by a bridging stress. This system is adopted to calculate the bridging stress using the current model.

이러한 시스템에서도 power law 경험식을 도입했을 때와 마찬가지로 길이 a의 노치의 도입으로 인한 특이함수(singularity function)의 도입이 필수적이다.

모든 그룹의 bridging 기여를 모두 합한 형태의 load-intensity function은 다음과 같은 세 종류의 특이함수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 q &= q_1 + q_2 + q_3 \quad (12) \\
 &= - \sum_{i=i_f}^{i_m} bP_M f_i \left\langle \frac{N(x-L)}{iC_x} + 1 \right\rangle \\
 &\quad - \sum_{i=i_m+1}^N bP_M f_i \left( \frac{N(L-a)}{iC_x} \right) \left\langle \frac{x-a}{L-a} \right\rangle \\
 &\quad - \sum_{i=i_m+1}^N bP_M f_i \left( \frac{N(a-L)}{iC_x} + 1 \right) \langle x-a \rangle_0
 \end{aligned}$$

$q_1$ 은 각 그룹의 bridging 영역의 크기가 균열길이보다 작은 그룹들의 load-intensity 함수만을 합한 것이며,  $q_2$ 와  $q_3$ 는 그룹의 bridging 영역의 크기가 균열길이보다 큰

load-intensity 함수들의 합을 정의된 특이함수 형태에 맞추어 두 가지로 분리한 것이다. 이는 2.1절에서도 밝혔듯이 특이함수는 반드시 정의된 특이함수군(singularity function family) 이외의 형태로는 사용할 수 없기 때문에 도입된 것이다. Fig. 5의 상단 그림에 표기되어 있는  $i_f$ 와  $i_m$ 은 각 결정립 그룹의 차례를 나타내는 번호로서  $i_f$ 는 균열열린면위가 측정되는 위치(x)에 따라 결정되는 정수이고,  $i_m$ 은 노치의 위치에 의해 결정되는 정수이다. 즉 노치를 지나 첫번째로 나오는 그룹의 번호를  $i_m$ 으로 정하고, x를 지나 첫번째로 나오는 그룹의 번호를  $i_f$ 로 정한다

보다 쉽게 이해하기 위해 Fig. 5의 총 결정립 그룹수가 7( $N=7$ )인 가상의 예를 들어 설명하면 다음과 같다. 우선 상단 그림에 표시된 x를 기준으로 볼 때 균열선단으로부터 첫번째 그룹의 bridging 응력을 나타내는 직선은 x값을 지나서 존재하기 때문에 x 위치에서의 전체 bridging 응력에서는 제외된다. 따라서  $i_f$ 는 두번째 그룹의 bridging 응력의 번호, 즉 2가 된다. 원점으로부터 a 지점에 노치선단이 위치하므로 다시 Fig. 5의 상단 그림에서 균열선단으로부터 세번째 그룹의 bridging 응력을 나타내는 직선까지가 a 위치를 지나서 존재하게 된다. 따라서  $i_m$ 은 3이 된다.

식 (12)의 load-intensity 함수를 식 (4)에 의해 적분하여 다음과 같은 전단력을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 V &= \sum_{i=i_f}^{i_m} \frac{bP_M f_i C_x}{2N} \left\langle \frac{N(x-L)}{iC_x} + 1 \right\rangle^2 \quad (13) \\
 &\quad + \sum_{i=i_m+1}^N bP_M f_i \left( \frac{N(a-L)}{iC_x} + 1 \right) \langle x-a \rangle \\
 &\quad + \sum_{i=i_m+1}^N \frac{b\sigma_m f_i N}{2iC_x} \langle x-a \rangle^2
 \end{aligned}$$

이 때 경계조건으로는 2.1절에서의 마찬가지로  $x=0$ 에서 전단력이 0이 된다는 것을 이용하면 적분상수도 0이 된다.

식 (13)의 전단력은 식 (6)에 의해 다시 한번 적분되면, 다음과 같은 굽힘 모멘트로 된다.

$$\begin{aligned}
 M &= \sum_{i=i_f}^{i_m} \frac{bP_M f_i^2 C_x^2}{6N^2} \left\langle \frac{N(x-L)}{iC_x} + 1 \right\rangle^3 \quad (14) \\
 &\quad + \sum_{i=i_m+1}^N \frac{bP_M f_i}{2} \left( \frac{N(a-L)}{iC_x} + 1 \right) \langle x-a \rangle^2 \\
 &\quad + \sum_{i=i_m+1}^N \frac{bP_M f_i N}{6iC_x} \langle x-a \rangle^3
 \end{aligned}$$

전단력의 경우와 마찬가지로 경계조건으로는  $x=0$ 에

서 굽힘 모멘트가 0이 된다는 것을 이용함으로써 여기에서도 적분상수는 0이 된다. 2.1.절에서와 마찬가지로 전단력과 모멘트로부터 균열단립변위를 구하기 위해서 식 (8)을 도입하여 다음과 같은 2차 미분항을 구하였다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} = & -\frac{1}{EI} \left[ \sum_{i=1_f}^m \frac{bP_M f_i i^2 C_\infty^2}{6N^2} \left\langle \frac{N(x-L)}{iC_\infty} + 1 \right\rangle^3 \right. \\ & + \sum_{i=1_m+1}^N \frac{bP_M f_i}{2} \left( \frac{N(a-L)}{iC_\infty} + 1 \right) \langle x-a \rangle^2 \\ & + \sum_{i=1_m+1}^N \frac{bP_M f_i N}{6iC_\infty} \langle x-a \rangle^3 \left. \right] \\ & + \frac{k}{AG} \left[ \sum_{i=1_f}^m bP_M f_i \left\langle \frac{N(x-L)}{iC_\infty} + 1 \right\rangle \right. \\ & + \sum_{i=1_m+1}^N bP_M f_i \left( \frac{N(a-L)}{iC_\infty} + 1 \right) \langle x-a \rangle_0 \\ & + \sum_{i=1_m+1}^N \frac{bP_M f_i N}{iC_\infty} \langle x-a \rangle \left. \right] \end{aligned} \quad (15)$$

이를 다시 한번 적분하고 경계조건으로 2.1.절에서와 같이  $x=L$ 에서 전단에 의한 회전(rotation)만이 존재한다는 것을 이용하면, 다음과 같은 균열열림변위의 일차 미분식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} = & \frac{-1}{EI} \left[ \sum_{i=1_f}^m \frac{bP_M f_i i^3 C_\infty^3}{24N^3} \left\langle \frac{N(x-L)}{iC_\infty} + 1 \right\rangle^4 \right. \\ & + \sum_{i=1_m+1}^N \frac{bP_M f_i}{6} \left( \frac{N(a-L)}{iC_\infty} + 1 \right) \langle x-a \rangle^3 \\ & + \sum_{i=1_m+1}^N \frac{bP_M f_i N}{24iC_\infty} \langle x-a \rangle - \sum_{i=1_f}^m \frac{bP_M f_i i^3 C_\infty^3}{24N^3} \\ & - \sum_{i=1_m+1}^N \frac{bP_M f_i}{6} \left( \frac{N(a-L)}{iC_\infty} + 1 \right) (L-a)^3 \\ & - \sum_{i=1_m+1}^N \frac{bP_M f_i N (L-a)^4}{24iC_\infty} \left. \right] \\ & + \frac{k}{AG} \left[ \sum_{i=1_f}^m \frac{bP_M f_i i C_\infty}{2N} \left\langle \frac{N(x-L)}{iC_\infty} + 1 \right\rangle^2 \right. \\ & + \sum_{i=1_m+1}^N bP_M f_i \left( \frac{N(a-L)}{iC_\infty} + 1 \right) \langle x-a \rangle \\ & + \sum_{i=1_m+1}^N \frac{bP_M f_i N}{2iC_\infty} \langle x-a \rangle^2 \left. \right] \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)을 한번 더 적분하고 균열선단에서는 변위가 없다는 점을 감안하여  $x=L$ 에서  $u=0$ 인 경계조건을 사용하면 본 연구의 최종적인 목표인 bridging에 의한 균열단립변위를 구할 수 있다.

$$u = \frac{1}{EI} \sum_{i=1_f}^m \frac{bP_M f_i i^4 C_\infty^4}{120N^4} \left[ 1 - \left\langle \frac{N(x-L)}{iC_\infty} + 1 \right\rangle^5 \right] \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{EI} \sum_{i=1_m+1}^N \frac{bP_M f_i}{24} \left( \frac{N(a-L)}{iC_\infty} + 1 \right) \\ & [(L-a)^4 - \langle x-a \rangle^4] + \frac{1}{EI} \sum_{i=1_m+1}^N \frac{bP_M f_i N}{120iC_\infty} \\ & [(L-a)^5 - \langle x-a \rangle^5] - \frac{1}{EI} \sum_{i=1_f}^m \frac{bP_M f_i i^3 C_\infty^3}{24N^3} (L-x) \\ & - \frac{1}{EI} \sum_{i=1_m+1}^N \frac{bP_M f_i}{6} \left( \frac{N(a-L)}{iC_\infty} + 1 \right) \\ & (L-a)^3 (L-x) - \frac{1}{EI} \sum_{i=1_m+1}^N \frac{bP_M f_i N (L-a)^4}{24iC_\infty} (L-x) \\ & - \frac{k}{AG} \sum_{i=1_f}^m \frac{bP_M f_i i^2 C_\infty^2}{6N^2} + \left[ 1 - \left\langle \frac{N(x-L)}{iC_\infty} + 1 \right\rangle^3 \right] \\ & - \frac{k}{AG} \sum_{i=1_m+1}^N \frac{bP_M f_i}{2} \left( \frac{N(a-L)}{iC_\infty} + 1 \right) \\ & [(L-a)^2 - \langle x-a \rangle^2] - \frac{k}{AG} \sum_{i=1_m+1}^N \frac{bP_M f_i N}{6iC_\infty} \\ & [(L-a)^3 - \langle x-a \rangle^3] \end{aligned}$$

이 결과는 2.1.절의 식 (10)의 결과식에 비해 상당히 복잡한 수식이지만, 그 계산치는 식 (10)과 거의 일치한다.

### 3. 결과 및 고찰

식 (10)와 식 (17)의 결과식은 결정립 bridging에 의한 균열단립을 나타내는 것이며, 이는 식 (1)로 나타낸 기존의 결정립 bridging의 효과를 포함하지 않는 경우의 균열열림변위식과 합해져서 실제의 균열열림변위값을 나타내게 된다. 즉, 결정립크기가 매우 작은 재료에 있어서는 실제 균열열림변위의 측정치가 거의 정확하게 식 (1)에 접근하고 있으나, 최근들어 R-curve 현상의 중요성을 인식하게 되고 수십 nm 이상의 결정립크기를 가지는 재료가 도입되면서 이러한 재료의 연구에는 식 (1)이 적합하지 않게 되었다. 실제로 결정립크기가 큰 재료에서는 균열열림변위의 측정치가 식 (1)로 예측한 값보다 상당히 낮은 값을 보이게 된다. 결과적으로 식 (10)와 식 (17)으로 나타낸 균열단립값은 식 (1)을 이용한 예측치와 실제 측정치와의 차이를 나타낼 수 있으며, 이를 이용하여 식 (10)와 식 (17)의 미지의 상수들(unknown parameters)을 구하게 된다. 즉, 일정한 크기의 균열을 가진 DCB 시편에 일정한 하중을 가한 상태에서 균열선단으로부터의 거리에 대한 균열열림변위값을 측정할 후 이러한 측정치와 식 (1)을 이용한 예측치와의 차이를 식 (10)와 식 (17)에 fitting시켜 bridging 응력함수를 이루고 있는 세가지 상수인 최대 bridging 응력,

bridging zone의 크기, 지수의 정확한 값을 구할 수 있다.

균열선단으로부터의 거리에 대해 균열열림변위를 측정하여 bridging 응력을 구하는 방법은 Tsai 등<sup>20)</sup>과 Rodel 등<sup>16,17)</sup>에 의해 개발되었으나, 활용면에서는 많은 제약이 있다<sup>47,48)</sup>. 우선 Tsai 등이 사용한 방법은 CT 시편에서 균열열림을 측정한 것을 Mall 등<sup>49)</sup>의 수식을 이용하여 bridging 응력을 구한 것이다. 그러나 이들의 방법은 bridging 응력을 전체 wake 영역에서 일정한 것으로 가정하여, 실제로는 균열선단으로부터 점차로 감소하는 형상을 갖는 bridging 응력분포에 대한 고려가 전혀 없었기 때문에 신뢰성 있는 분석방법으로 보기 어렵다. Rodel 등의 방법은 균열선단으로부터 점차로 감소하는 형상을 갖는 bridging 응력분포를 감안한 분석 방법으로 본 연구에서의 방법과 상당히 유사한 점이 많다. Rödel 등의 방법의 기본적인 개념은 완전한 탄성체에서의 Irwin<sup>47)</sup>의 K-field식에 기초를 두고 Barenblatt<sup>48)</sup>의 식을 도입함으로써 bridging 응력을 구할 수 있다는 것이다. 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$u(x) = (8x/\pi)^{1/2} K_A/E' - (2/\pi E') \int_0^{\Delta C} P(y) \ln \left| \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} \right| dy \quad (18)$$

$P(y)$ 는 균열선단으로부터 거리  $y$ 만큼 떨어진 곳에서의 bridging 응력을 나타내며,  $x$ 는 COD가 측정된 위치를 나타내고,  $\Delta C$ 는 균열의 길이이다. 식 (18)의 우변의 첫째항은 어떠한 wake 효과도 포함하지 않는 완전탄성체의 균열열림변위값을 나타내는 Irwin의 식이며, 두번째 항은 결정립 bridging에 의한 균열단함을 나타내는 Barenblatt 식이다. 즉 식 (18)을 본 연구의 DCB 분석결과와 비교해 보면, 첫째항의 Irwin식은 식 (1)에 나타난 Wiethehorn의 식에 해당하며, 두번째 항인 Barenblatt식은 식 (10)와 식 (17)에 상응하는 것으로 볼 수 있다.

Rodel 등에 의한 분석의 기본이 되는 Irwin의 K-field 개념은 무한체(infinite body)에서의 균열기동에 대한 해를 풀어 놓은 것이기 때문에 실제 시험에서는 무한체 균열 시스템에 가장 근접한 시스템인 CT 시편을 이용하는 것이 적합하다. 그러나 매우 취약한 세라믹 재료에 있어 CT 시편에  $K_I$  type의 균열을 생성시키고 전파시키는 것은 매우 어렵기 때문에 CT 시편을 이용해야 한다는 것 자체가 제약으로 작용한다. 또한 Irwin의 K-field식은 균열선단에 매우 가까운 부근에서만 정의될 수 있는 이른바 near tip solution이므로 균열열림의 측정 범위는 균열선단 부근의 작은 영역에 국한되어야 한다. 그러나 어느 정도 신뢰성 있는 결과를 얻기 위해서는

균열열림변위의 측정범위가 적어도 bridging 영역의 크기와 비슷한 수준이 되어야 한다. 예를 들어 강력한 R-curve를 가지는 수십 nm 정도의 결정립크기의 알루미늄 재료의 경우 bridging 영역의 크기가 거의 10 mm에 이르기 때문에 균열열림변위의 측정범위도 10 mm 정도 되어야 하므로 적합한 시편의 크기는 적어도 수 백 mm는 되어야 한다. 실제 Rödel 등이 사용한 시편의 경우에는 결정립 크기가 비교적 작아 균열열림변위의 측정범위가 약 2 mm 정도 이내의 매우 작은 영역이었음에도 불구하고 시편크기는 거의 100 mm에 달하고 있다. 일반적으로 결함이 없고 매우 큰 세라믹 재료를 제조하기는 상당히 어려우므로 반드시 큰 시편이 요구되는 Rodel 등의 방법은 그 응용에 큰 제약을 받는다고 할 수 있다.

본 연구에서와 같이 DCB 시편을 이용한 방법은 지나치게 큰 시편을 필요로 하지 않으며, 균열열림변위의 측정범위도 충분히 크게 할 수 있기 때문에 Rödel 등의 방법에 의한 결과보다 높은 신뢰도를 가지는 결과를 얻게됨은 물론이고, 시험 자체도 간편하다. 시험 후 모델을 이용한 계산과정에 있어서도 Rödel 등의 방법보다 훨씬 간단한 계산으로 원하는 결과를 얻을 수 있다. 식 (18)에 나타난 Rodel 등의 수식은 표기상으로는 매우 간결하지만 실제 계산을 하려면 적분을 포함한 부분이 분석적으로(analytically) 풀리지 않기 때문에 수치해석적으로(numerically) 풀어야 하는 불편함이 있으나, 본 연구에서의 DCB 방법의 결과식들은 표기상으로는 복잡해 보이지만 자세히 검토해 보면 식 (10)와 식 (17)은 단순한 power series에 지나지 않는 것을 알 수 있다.

한편 본 연구의 DCB 방법에도 문제점은 있다. 우선 시험상의 문제로서 긴 형상을 한 DCB 시편에 길이방향으로 똑바로 수 mm 이상 전파된 균열을 도입하는 문제이다. 실제 길이에 비해 폭이 좁은 DCB 시편에서 길이방향과 평행하게 균열을 전진시키는 것은 불가능하다. 많은 연구자들은 이러한 문제를 해결하기 위해 시편 중앙에 홈(groove)을 도입하는 방안을 채택하였다. 그러나 본 연구에서는 시편에 홈을 내면 외부하중에 의한 균열열림에 비해 결정립 bridging에 의한 균열단함변위가 무시할 수 있을 만큼 작아져서 bridging 응력에 의한 영향을 측정하기 어렵기 때문에 홈을 도입할 수는 없다. 따라서 시험시편의 준비가 매우 어려운 것이 본 연구의 DCB법의 단점이다. 또한 Rödel 등의 방법은 식 (18)에도 나타나 있듯이 bridging에 의한 균열단함변위가 시편규격에 관계 없이 계산되는데 비해, DCB법에서의 균열단함변위식(식 (10)과 (17))은 시편규격을 나타내는 factor



들을 포함하고 있어 시편규격에 영향을 받는다. 그러한 영향 중 가장 두드러지는 것은 DCB 시편의 폭(h)의 영향이다. 시편의 폭이 커지면 균열열림변위에 대한 bridging 응력에 의한 영향이 절대적으로 감소하므로 bridging 응력에 의한 영향을 극대화하여 시험을 손쉽게 하기 위해서는 시편의 폭을 줄이는 것이 유리하다. 그러나 시편의 폭을 줄이면 균열이 딱 바로 진전하기 전에 벗어나게 되어 beam 부분에서 파단될 가능성이 커진다. 따라서 이상과 같이 언급한 두가지 문제를 동시에 만족시키는 범위에서 시편의 폭을 정해야 하며, 이를 위한 기준을 마련해야 한다. 본 연구에서는 적당한 기준으로 시편의 폭을 bridging 영역의 크기보다 작게 하는 것을 채택하였다. 이렇게 되면 비교적 작은 결정립 크기를 가짐으로써 2~3 mm 이하의 bridging 영역을 갖는 재료에서는 본 연구의 DCB법을 이용할 수 없다.

또 다른 시험상의 문제는 DCB 시편에 가해지는 하중이 달라짐에 따라 균열단힘이 달라질 수 있다는 것이다. Ródel 등은 시편에 가해지는 하중이 커지면 균열단힘도 함께 커진다고 가정하고, 그 해결방안으로 주어진 상황에서 하중을 가능한 한 높여 평형상태(equilibrium state)를 만든 상태에서 시험하는 것을 제안하였으나, 이러한 방법은 실제 시험상으로는 거의 불가능하다. 평형상태(equilibrium state)라는 것은 실제 균열전파가 시작되려는 시점을 말하는 것으로, 주어진 균열길이에서의 R-curve 선상의 점을 말하는 것이며, 이 상태에서는 균열이 급격하게 진전할 가능성이 상당히 높다. DCB 분석방법은 정확히 정지한 균열에 대해 일정하중을 가한 상태에서 장시간의 측정을 요하기 때문에 평형상태에 도달하여 균열전파의 가능성이 커지면 시험이 불가능해진다. 또한 시편에 가해지는 하중이 커지면 균열단힘도 함께 커진다는 가정도 증명된 사실이 아니기 때문에 평형상태를 만드는 노력 자체가 불필요할 수도 있다.

본 연구에서는 이러한 문제를 구체적으로 해결하기 위하여 보완시험을 실시하였다. Fig. 6은 평균결정립크기 19.0 μm의 재료에 대한 균열단힘측정결과 및 fitting curve들을 보여 준다. 균열단힘의 측정은 각각 다른 세 하중하에서 이루어졌으며, 실선으로 된 두 곡선은 하중이 45.08N 일 때의 결과를 이용하여 식 (10)와 식 (17)에 fitting한 curve이다. 각각의 하중에서 얻어진 측정결과들은 모두 fitting curve에 잘 맞는 것을 볼 수 있다. 다른 두개의 더 낮은 하중에서 구한 결과들도 45.08N 일 때의 fitting curve에 잘 맞아 하중의 변화에 거의 영향받지 않는 것을 알 수 있다. 이는 결정립 bridging에 의한 균열측면에 작용하는 bridging 응력은 시편에 가해지는

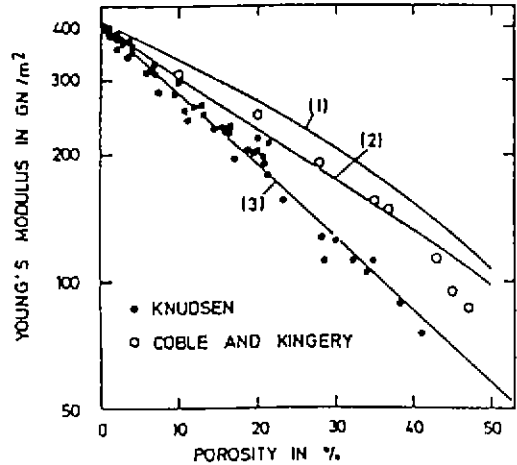


Fig. 6. Effect of porosity on Young's modulus of alumina at room temperature. Data points obtained from Knudsen<sup>51)</sup> and Coble and Kingery<sup>52)</sup> are compared with three different models predicted by Mackenzie<sup>53)</sup>, Hashin<sup>54)</sup>, and Spriggs<sup>55)</sup>.

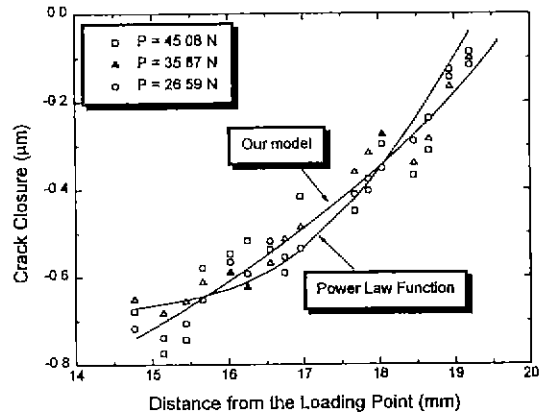


Fig. 7. Crack closure data of an alumina (average grain size; 19.0 μm) under three different loads and fitting curves computed via power law function (Eq. (10)) and the current model (Eq. (17)) at the load of 45.08N.

하중에 관계 없이 일정하게 유지된다는 것을 의미한다. 시험상에 발생할 수 있는 다른 문제점으로는 실제 응용되는 DCB법의 최종결과로 볼 수 있는 식 (1), 식 (10), 식 (17)들에 포함되는 탄성계수(Young's modulus)를 들 수 있다. 탄성계수의 작은 변화가 결과에 크게 영향을 미치지 않지만, 정확한 결과를 위해서는 정확한 탄성계수값을 채택하는 것이 바람직하다. 가장 확실하게는 직접 탄성계수를 측정하는 것을 들 수 있으나, 시

힘장비의 여건상 매우 어려우므로 탄성계수값을 인용하고, 정확한 인용을 위해서는 이론적으로 잘 정리된 모델을 도입하여 재료들에 적용해야 한다. 일반적으로 탄성계수는 기공도에 따라 변하는 것으로 알려져 있으며, 결정립크기와는 무관한 것으로 알려져 있다<sup>50</sup>. Fig. 7에 여러 연구자들에 의해 실측 또는 계산된 재료의 기공도 (porosity)에 따른 탄성계수값을 나타내었으며, 대체적으로 기공도가 커질수록 탄성계수는 감소하는 것을 알 수 있다. (1), (2), (3)으로 표시된 실선들은 각각 Mackenzie<sup>53</sup>, Hashin<sup>54</sup>, Spriggs<sup>55</sup>에 의해 제안된 모델로서 기공도가 커질수록 큰 차이를 보인다. 점으로 표시된 것들은 두 연구그룹에 의해 측정된 것으로 여기서도 기공도가 커질수록 서로 큰 차이를 보이고 있다. 본 연구에서 사용된 재료들은 모두 기공도가 1% 이하의 견고한 재료들이기 때문에 어떤 모델에 대입해도 거의 비슷한 결과를 얻게 되며, 따라서 본 연구에서는 편의상 계산이 가장 간편한 Spriggs<sup>55</sup>의 모델을 이용하여 얻은 탄성계수값을 취하였다.

DCB 방법은 이상과 같은 시험상의 문제 외에도 분석 자체가 갖는 구조적인 문제도 포함하고 있다. 이러한 문제는 식 (10)와 식 (17)에 포함되어 있는 조정상수(numerical factor), k의 정확한 값을 도입하는 문제이다. 전통적인 elementary cantilever beam 이론에 따르면 k는 1에 가까운 값이나<sup>36</sup>, Wiederhorn<sup>39</sup>의 결과식에 따르면 k는 거의 1.8을 넘는 수이다. 이는 균열선단에서의 제약조건(elastic constraints)이 일반적인 single cantilever beam의 고정부와는 다르기 때문이다<sup>38</sup>. 본 연구에서의 bridging 응력에 의한 DCB 분석에서는 균열선단 앞부분에서는 어떤 영향도 받지 않는 것으로 간주하고 있으며, 이는 균열선단에서의 제약조건(elastic constraints)이 일반적인 single cantilever beam의 고정부와 같음을 의미한다. 즉, 한 점에서 상당한 하중을 가함으로써 그 영향이 균열선단 앞부분까지 미치는 보통의 DCB 분석과는 달리, bridging 응력에 의한 DCB 분석에서는 bridging 응력 자체가 외부에서 가해주는 하중에 비해 매우 작기 때문에 균열선단 앞부분에는 그 영향력을 미칠 수 없다. 따라서 bridging 응력에 의한 DCB 분석에서는 고정부(균열선단)에서 모든 경계조건이 '0'이 되는 single cantilever beam의 조건과 같아진다. 이러한 조건을 감안했을 때 본 연구에서의 DCB 분석에서 k값으로 1을 채택한 것은 타당하다고 할 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 결정립크기가 다른 알루미늄에서 brid-

ging 응력분포를 정확히 계산하기 위하여 기존의 일반적인 DCB 분석방법에 bridging 응력에 의한 영향을 고려하여 발전시킨 DCB 분석방법을 새로 개발하였다. Bridging 응력함수로는 본 논문의 Part I에서 언급한 power law 경험식과 결정립크기분포를 포함하는 이론적 모델을 도입하였으며, 각 응력함수에 대하여 bridging 응력분포를 계산하고, 그 결과를 비교, 분석하였다. 이로부터 본 연구의 Part I에서의 bridging 응력함수모델의 타당성을 조사하고 검증함으로써 정확한 bridging 응력분포를 산출하고 알루미늄의 미세과파기구를 체계적으로 해석하기 위한 발전된 형태의 DCB 분석법을 새로 정립하였다.

REFERENCES

1. M.V. Swain, "R-Curve Behavior in a Polycrystalline Alumina Material," *J Mater. Sci. Lett.*, 5(8), 1313-15 (1986)
2. A. Reichl and R.W. Steinbrech, "Determination of Crack-Bridging Forces in Alumina," *J Am. Ceram. Soc.*, 71(6), C299-C301 (1988).
3. H. Hübner and W. Jillick, "Sub-Critical Crack Extension and Crack Resistance in Polycrystalline Alumina," *J Mater Sci Eng.*, 12, 117-25 (1977).
4. R. Knehans and R. Steinbrech, "Memory Effect of Crack Resistance during Slow Crack in Notched Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> Bend Specimens," *J Mater. Sci. Lett.*, 1(8), 327-29 (1982).
5. L.X. Han and S. Suresh, "High-Temperature Failure of an Alumina-Silicon Carbide Composite under Cyclic Loads: Mechanisms of Fatigue Crack-Tip Damage," *J Am. Ceram. Soc.*, 72(7), 1233-38 (1989).
6. S. Suresh, L. Ewart, M. Maden, W.S. Slaughter, and M. Nguyen, "Fracture Toughness Measurements in Ceramics: Pre-Cracking in Cyclic Compression," *J. Mater. Sci.*, 22, 1271-76 (1987).
7. T. Fett and D. Munz, "Subcritical Crack Growth of Macrocracks in Alumina with R-Curve Behavior," *J. Am Ceram Soc.*, 75(4), 958-63 (1992).
8. T. Fett and D. Munz, "Subcritical Crack Growth of Macrocracks in Zirconia," *J Mater Sci Lett.*, 10, 1103-06 (1991).
9. A.G. Evans, L.R. Russell, and D.W. Richerson, "Slow Crack Growth in Ceramic Materials at Elevated Temperatures," *Metall. Trans. A*, 6A, 707-15 (1975).
10. M.K. Ferber and S.D. Brown, "Subcritical Crack Growth in Dense Alumina Exposed to Physiological Media," *J. Am Ceram Soc.*, 63(7), 424-29 (1990).
11. A.G. Evans, "A Method for Evaluating the Time Dependent Failure Characteristics of Brittle Materials and Its Application to Polycrystalline Alumina," *J. Ma-*

- ter. Sci., 7, 1137-46 (1972).
12. R.K. Govila, "Indentation-Precracking and Double-Torsion Methods for Measuring Fracture Mechanics Parameters in Hot-Pressed  $\text{Si}_3\text{N}_4$ ," *J. Am Ceram. Soc.*, **63**(5), 319-26 (1980).
  13. G. Vekinis, M.F. Ashby, and P.W.R. Beaumont, "R-Curve Behavior of  $\text{Al}_2\text{O}_3$  Ceramics," *Acta Metall. Mater.*, **38**(6), 1151-62 (1990).
  14. R.H. Dauskardt, D.B. Marshall, and R.O. Ritchie, "Cyclic Fatigue-Crack Propagation in Magnesia-Partially-Stabilized Zirconia Ceramics," *J. Am Ceram. Soc.*, **73**(4), 893-903 (1990).
  15. R.H. Dauskardt, M.R. James, J.R. Porter, and R.O. Ritchie, "Cyclic Fatigue-Crack Growth in a SiC-Whisker-Reinforced Alumina Ceramic Composite: Long- and Small-Crack Behavior." *J. Am. Ceram. Soc.*, **75**(4), 759-71 (1992).
  16. J. Rodel, J.G. Kelly, and B.R. Lawn, "In Situ Measurement of Bridged Crack Interfaces in the Scanning Electron Microscope," *J. Am. Ceram. Soc.*, **73**(11), 3313-18 (1990).
  17. J. Rodel, E.R. Fuller, Jr., and B.R. Lawn, "In Situ Observation of Toughening Processes in Alumina Reinforced with Silicon Carbide Whiskers," *J Am Ceram. Soc.*, **74**(12), 3154-57 (1991).
  18. M. Sakai, K. Urashima, and M. Inagaki, "Energy Principle of Elastic-Plastic Fracture and Its Application to the Fracture Mechanics of a Polycrystalline Graphite," *J Am. Ceram. Soc.*, **66**(12), 868-74 (1983).
  19. M. Sakai and M. Inagaki, "Dimensionless Load-Displacement Relation and Its Application to Crack Propagation Problems," *J. Am Ceram Soc.*, **72**(3), 388-94 (1989).
  20. J.-F. Tsai, J.D. Belnap, and D.K. Shetty, "Crack Shielding in Ce-TZP/ $\text{Al}_2\text{O}_3$  Composites: Comparison of Fatigue and Sustained Load Crack Growth Specimens," *J. Am Ceram Soc.*, **77**(1), 105-17 (1994).
  21. G.R. Anstis, P. Chantikul, B.R. Lawn and D.B. Mashall, "A Critical Evaluation of Indentation Techniques for Measuring Fracture Toughness: I Direct Crack Measurements," *J. Am. Ceram. Soc.*, **64**(9), 533-38 (1981).
  22. G.R. Anstis, P. Chantikul, B.R. Lawn and D.B. Mashall, "A Critical Evaluation of Indentation Techniques for Measuring Fracture Toughness: II Strength Method," *J. Am. Ceram Soc.*, **64**(9), 539-430 (1981).
  23. R.F. Cook and B.R. Lawn, "A Modified Indentation Toughness Technique," *J. Am. Ceram. Soc.*, **66**(11), C 200-C201 (1988).
  24. N. Nageswaran and D.K. Shetty, "Rising Crack-Growth-Resistance (R-Curve) Behavior Toughened Alumina and Silicon Nitride," *J. Am. Ceram. Soc.*, **74**(10), 2634-41 (1991).
  25. L.M. Braun, S.J. Bennison, and B.R. Lawn, "Objective Evaluation of Short-Crack Toughness Curves Using Indentation Flaws: Case Study on Alumina-Based Ceramics," *J. Am Ceram. Soc.*, **75**(11), 3049-57 (1992).
  26. R.F. Cook, C.J. Fairbanks, B.R. Lawn and Y.W. Mai, "Crack Resistance by Interfacial Bridging: Its Role in Determining Strength Characteristics," *J Mater. Res.*, **24**(3), 345-56 (1987).
  27. S.J. Bennison and B.R. Lawn, "Flaw Tolerance in Ceramics with Rising Crack Resistance Characteristics," *J. Mater. Sci.*, **24**, 3169-75 (1989).
  28. S. Lathabai and B.R. Lawn, "Fatigue Limits in Noncyclic Loading of Ceramics with Crack-Resistance Curves," *J. Mater. Sci.*, **24**, 4298-306 (1989).
  29. R.F. Krause, Jr., "Rising Fracture toughness from the Bending Strength of Indented Alumina Bends," *J. Am Ceram Soc* **71**(5), 338-43 (1988).
  30. R.F. Krause, Jr., E.R. Fuller, Jr. and J.F. Rhodes, "Fracture Resistance Behavior of Silicon Carbide Whisker-Reinforced Alumina Composites with Different Porosities," *Am Ceram. Soc.*, **73**(3), 559-66 (1990).
  31. C.-W. Li, D.-J. Lee, and S.-C. Liu, "R-Curve Behavior and Strength for In-Situ Reinforced Silicon Nitrides with Different Microstructures," *J. Am. Ceram. Soc.*, **75**(7), 1777-85 (1992).
  32. J.C. Newman, Jr. and I.S. Raju, "An Empirical Stress-Intensity Factor Equation for the Surface Crack," *Eng Frac. Mech.*, **15**, 185-95 (1981).
  33. R.F. Krause, Jr., "Flat and Rising R-Curves for Elliptical Surface Cracks from Indentation and Superposed Flexure," *J Am. Ceram Soc.*, **77**(1), 172-78 (1994).
  34. D. Bleise and R.W. Steinbrech, "Flat R-Curve from Stable Propagation of Indentation Cracks in Coarse-Grained Alumina," *J Am Ceram. Soc.*, **77**(2), 315-22 (1994).
  35. J.J. Gilman, "Direct Measurement of the Surface Energies of Crystals," *J App Phys.*, **31**(12), 2208-18 (1960).
  36. P.P. Gillis and J.J. Gilman, "Double-Cantilever Cleavage Mode of Crack Propagation," *J App Phys.*, **35**(3), 647-58 (1964).
  37. B. Gross and J.E. Srawley, NASA TND-2395, Feb. (1966).
  38. S.M. Wiederhorn, A.M. Shorb, and R.L. Moses, "Critical Analysis of the Double Cantilever Method of Measuring Fracture-Surface Energies," *J. App. Phys.*, **39**(3), 1569-72 (1968).
  39. M.F. Kanninen, "An Augmented Double Cantilever Beam Model for Studying Crack Propagation and Arrest." *Int J Frac.*, **9**(1), 83-92 (1973).
  40. C.L. Chow and C.W. Woo, "Fracture studies with DCB Specimen," *Int J Frac.*, **16**(2), 121-31 (1980).
  41. S.W. Freiman, D.R. Mulville, and P.W. Mast, "Crack

- Propagation Studies in Brittle Materials," *J. Mater Sci.*, **8**, 1527-33 (1973).
42. K.W. White and G.P. Kelkar, "Evaluation of the Crack Face Bridging Mechanism in a  $MgAl_2O_4$  Spinel." *J Am Ceram Soc.*, **74**(7), 1732-34 (1991).
  43. P.S. Nicholson, "Constant-KI Double-Cantilever-Beam Test for Ceramic Materials." *J. Am. Ceram. Soc.*, **73**(6), 1800-802 (1990).
  44. G.D. With, "Small-Specimen Double-Cantilever-Beam Test Applicable to Monoliths and Joints," *J Am Ceram. Soc.*, **72**(4), 710-12 (1989).
  45. E.K. Beauchamp and S.L. Monroe, "Effect of Crack-Interface Bridging on Subcritical Crack Growth in Ferrites," *J. Am. Ceram. Soc.*, **72**(7), 1179-84 (1989).
  46. S.H. Crandall, N.C. Dahl, and T.J. Lardner, "An Introduction to the Mechanics of Solids," Ch. 3, McGraw-Hill, Inc., (1978).
  47. B.R. Lawn and T.R. Wilshaw, "Fracture of Brittle Solids," Cambridge University Press, London, U.K., (1976).
  48. G.I. Barenblatt, "The Mechanical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture," *Adv. Appl. Mech.*, **7**, 55-129 (1962)
  49. S. Mall and J.C. Newman, Jr, "The Dugdale Model for Compact Specimen," pp. 113-28 in *Fracture Mechanics: Sixteenth Symposium, ASTM STP 868*, Edited by M.F. Kanninen and A.T. Hooper, ASTM, Philadelphia, PA, (1985).
  50. E. Dörre and H. Hubner, "Alumina," MRE Springer-Verlag, Berlin (19984).
  51. F.P. Knudsen, "Effect of Young's Modulus of Alumina," *J. Am. Ceram. Soc.*, **45**, 94-95 (1962).
  52. R.L. Coble and W.D. Kingery, "Effect of Porosity on Physical Properties of Sintered Alumina," *J. Am Ceram. Soc.*, **39**, 337-85 (1956).
  53. J.K. Mackenzie, "The Elastic Constants of a Solid Containing Spherical Holes," *Proc. Phys. Soc.*, **63B**, 2-11 (1950).
  54. Z. Hashin, "Elasticity of Ceramic Systems," pp. 313 in *Ceramic Microstructures*, Edited by R.M. Fulrath and J.A. Pask, John Wiley and Sons, New York, (1968).
  55. R.M. Sprigg, "Expression for Effect of Porosity on Elastic Modulus of Polycrystalline Refractory Materials, Particularly Alumina Oxide," *J. Am. Ceram. Soc.*, **44**, 628-29 (1961).