

B - 스플라인 곡선의 기하 특성을 이용한 형상 오프셋(1)

- B - 스플라인 제어 다각형 오프셋 기법의 연구 -

정 재 현* · 김 회 중**

Shape offsetting using the geometric properties of B - spline curve(1)

- A Study on offsetting of B - spline control polygon -

J. H. Jeong · H. J. Kim

Key words : B - Spline curve(B - 스플라인 곡선), Offset(오프셋), subdivision(세분화), control point(제어점), knot vector(노트벡터), control polygon offset(제어 다각형 오프셋)

Abstract

In manufacturing of exact products, the offsetting is required to transfer the design data of shape to manufacturing data. In offsetting the degeneracies are occurred, and these problems are more difficult in freeform shape manufacturing. This paper is using the geometric properties of B - spline curves to solve the degeneracy of offsetting and to generating of enhanced offsetting. The offsetting of B - spline control polygon spans generates exact control polygon of original shapes. This method is faster in generating offset curve than the normal offsetting, and the resulted offset curves are exact. The additional property of this method is using to control offset shape as B - spline curves. We believe that this method is an effective solution for modifying of offset curves.

1. 서 론

국내의 많은 산업 현장에서 현재 CAD/CAM 시스템을 도입했거나 계획 중이다. CAD/CAM의 이용은 기존 생산 방식에 비하여 높은 생산성을 제공하고 있다. 그러나 CAD/CAM 시스템이 설치된 목

적에 비해 효율적인 활용에서는 아직 많은 문제점이 있다. 그 중의 하나가 CAD 시스템에서 생성된 형상이 CAM 시스템에 의해 정확하게 가공되기 어렵다는 것이다. 이것은 아직 CAD와 CAM간의 원활한 데이터 호환이 이루어지고 있지 않기 때문이다. IGES(Initial Graphics Exchange Specifi-

* 정희원, 한국해양대학교 기계공학과

** 정희원, 한국해양대학교 대학원

cation), DXF(Data Exchange File)등의 데이터 표준이 있고, 최근 STEP(Standard for the Exchange of Product Model Data)이 문제 해결에 도움을 줄 것으로 기대되고 있으나, 아직 만족할 만한 결과를 얻지 못하고 있다. CAD에서 생성된 형상이 CAM 시스템에 의해 직접 가공될 수 없는 상황에서는 중간 단계의 과정이 필요하다. 즉 형상에 대하여 NC에 의해 가공되기 위한 일정 간격만큼 확장된 옵션 형상이 요구된다. 이것은 일반 해석 형상에서는 큰 문제가 없으나 자유 곡선과 곡면의 가공에 어려움이 있는데, CAM 시스템에서는 보간법에 의한 모든 형상 점에 대한 정보를 필요로 하고 있다. 자유 형상은 다양한 형상 설계 기법이 존재하고, 이에 대한 형상 점을 모두 법선 옵션하기에는 많은 시간을 요구한다.

최근 CAD시스템은 B-스플라인과 NURBS(Nonuniform Rational B-Spline)를 표준으로 제공하고 있다. 그리고 이들의 기하 특성을 가공 정보 생성에 응용하고자 하는 시도가 1980년대 이후로 진행되어 왔다. Klass¹⁾는 3차 스플라인 곡선의 옵션 곡선을 생성했으며, Tiller와 Hanson²⁾은 NURBS 옵션을 계산하는 알고리즘을 소개하였다. Tiller는 형상 다각형의 각 스패(span)를 옵션하는 방법을 소개하였고, Coquillart³⁾는 제어 노드(control node)라는 개념을 만들어 옵션 곡선을 생성하였다.

본 연구에서는 B-스플라인 제어 다각형에 대한 형상 스패 옵션을 생성하고, 형상 수정에 B-스플라인 곡선의 제어점과 노트벡터를 사용하는 방법을 제시하였다. 또한 옵션 문제 해결에도 B-스플라인 기하 특성을 응용하였다. 사용되는 형상 기법은 nonuniform B-스플라인 곡선을 이용하였으며, B-스플라인의 형상 생성 특성을 고찰하여 옵션 문제 해결에 있어서 유용함을 밝혔다.

2. 형상 옵션의 문제점

일반적으로 평면이나 공간의 점에 대한 옵션은 그 점의 접선에 수직하는 방향으로 옵션 거리만큼 이동된 점이다. 임의의 점(x, y)를 법선 N을 따라 거리 d만큼 이동시켜 옵션 점을 구한다.

$$N = \frac{1}{f'(x)} \quad (1)$$

α 가 법선과 수평면 사이의 각이라 할 때 다음과 같다.

$$\alpha = \tan^{-1} N \quad (2)$$

그러므로 옵션 점은

$$\begin{aligned} \Delta x &= x \pm d \cos \alpha \\ \Delta y &= y \pm d \sin \alpha \end{aligned} \quad (3)$$

이다. 모든 점에 대한 옵션 점을 연결하면 형상의 완전한 옵션을 얻을 수 있다. 그러나, 일반적인 형상의 옵션은 다음과 같은 문제점을 가지고 있어, 모든 제어점에 대한 법선 옵션을 사용하기는 곤란하다.

- 형상의 한 점에서 하나 이상의 법선이 존재할 수 있다.
- 각 점에 대해서는 정확한 옵션이 생성되나, 전체 형상은 옵션 형상과 항상 일치하지는 않는다.
- 이웃하는 형상 사이의 공간이 옵션 거리에 비하여 작으면 옵션이 교차하거나 소멸되며, 곡률 반경이 옵션 거리보다 작은 경우는 루프(loop)나 단이 발생하게 된다.
- 가공을 위한 옵션 표현은 사용되는 공작 기계의 형상 처리 능력에 따라 제한되게 된다.

3. B-스플라인 곡선 생성과 제어

B-스플라인 곡선은 제어점으로 연결된 제어 다각형에 의해 형상이 생성된다. B-스플라인 곡선은 $n+1$ 개의 제어점 $P(t)$ 와 B-스플라인 원리 함수 $N_{i,k}$ 로 구성된 $C(t)$ 로 나타내어진다.

$$C(t) = \sum_{i=1}^{n+1} P_i N_{i,k}(t) \quad (4)$$

$$t_{\min} \leq t < t_{\max}, 2 \leq k \leq n+1$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t-x_i) N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t) N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}} \quad (5)$$

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & x_i \leq t \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{그 외 범위} \end{cases}$$

x_i 는 $x_i \leq x_{i+1}$ 인 노트벡터(knot vector)이며, $N_{i,k}(t)$ 는 (x_i, x_{i+k}) 구간에서 제어된다. 이 식은 de Boor - Cox에 의해 증명되었으며, 다음과 같은 특징이 있다⁴⁾.

- 곡선 계수에 대한 제어점 수의 제한이 없다.
- 생성된 곡선은 평면 및 공간에서 회전, 이동, 크기 변화에도 형상이 보존된다.
- 제어점에서 정확한 옵션의 생성이 가능하다.
- 곡선의 추가 및 분할에 있어 곡선 세그먼트 연속성이 유지되며, 각 구간 계수 수정이 가능하다.

B-스플라인 곡선은 제어점, 노트벡터 그리고 웨이트에 의해 형상 제어가 주로 이루어진다. 본 연구에서는 nonuniform B-스플라인 곡선으로 형상을 생성하고, 제어 수단으로 제어점과 노트벡터만을 고려했다.

3.1 제어점에 의한 형상 제어

B-스플라인 곡선은 제어 다각형의 내부에서만 존재하게 된다. 때문에 사용자는 컨벡스 헐(convex hull)이라는 제어 다각형 영역에서 형상의 변형 정도를 예측하고 작업을 할 수 있다⁵⁾.

B-스플라인 원리함수 특성처럼 제어 다각형도 이동, 회전 그리고 스케일링에 대하여 형상이 유지된다. 동일 제어점 수에 대하여 계수가 증가하면 굴곡의 차이가 줄어들게 되며, 곡선 계수만큼 제어점을 동일 위치에 반복하면 단이 발생한다. 또한 B-스플라인 곡선의 제어점의 이동은 주위의 근접 스패에만 영향을 미친다. Fig. 1의 B-스플라인 곡선 상의 점 4가 4'와 4''로 이동함에 따른 형상의 변화에서 그 영향의 정도를 확인할 수 있다.

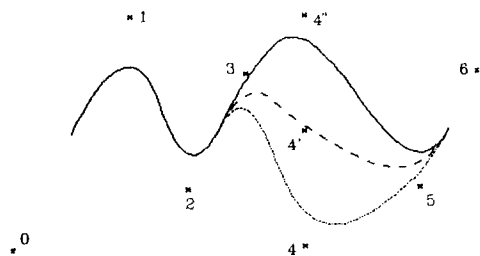


Fig.1 Local control property of a B-spline curve

3.2 노트벡터에 의한 형상 제어

노트벡터는 B-스플라인 곡선이 가지는 특징으로 노트벡터의 배열은 해당 곡선 스패에 영향을 주어 제어점의 위치 변화 없이 형상을 제어할 수 있다⁶⁾ 즉, 컨벡스 헐 영역의 변화 없이 형상 제어가 가능하다. 또한 노트벡터 추가와 삭제로 곡선 스패 분할과 삭제가 용이하다. 노트벡터는 아래와 같이 구분한다.

(a) open uniform 노트벡터 : 양끝에서 곡선 계수만큼 노트 값이 반복된다. 계수가 4인 경우 아래의 식처럼 양끝에서 0과 4가 네번 반복되어지고, 그 결과로 곡선의 양끝이 제어 다각형에 일치하는 곡선이 생성된다. 제어점 수와 계수가 일치하는 경우는 베지에(Bezier) 곡선이 된다.

$$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4]$$

(b) uniform 노트벡터 : 노트벡터의 값들이 동일한 범위 내에서 일정한 간격을 가지면서 반복되지 않게 배열된다. 가장 일반적인 B-스플라인 곡선으로 양끝이 제어 다각형과 떨어지게 된다.

$$[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10]$$

(c) nonuniform 노트벡터 : 노트벡터의 값이 일정한 규칙을 가지지 않게 배열된 것으로, 다양한 형태로의 변형이 가능하다.

$$[0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 5]$$

Fig. 2에서 각 노트벡터에 따른 동일한 제어점을 가지는 곡선의 변화를 알 수 있다.

4. 제어 다각형에 의한 형상 옵션

제어 다각형을 이용한 형상 옵션은 모든 형상 점

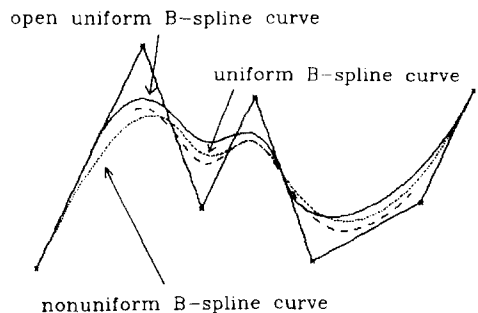


Fig.2 B-spline curves with various knot vectors

을 대상으로 하는 법선 오프셋에 비하여 전체 형상을 빠르게 오프셋할 수 있다. 간단한 선형 삼각형을 예로 형상 오프셋이 구해지는 과정을 보였다. 이러한 과정은 3차원 공간 곡선에서도 동일하다.

1. 제어 다각형 각 스패의 시작과 끝점에서 법선을 구하고, 스패 양 끝 점을 오프셋 거리만큼 수직 이동한다(Fig. 3) 이때 적용되는 형상은 B-스플라인 제어 다각형이다. 그리고 단일 제어 다각형에 대해서 외부 혹은 내부 만으로의 오프셋을 적용한다.

2. 오프셋된 스패의 양 끝 점을 지나는 무한 직선을 생성하고, 이웃하는 스패의 교차점을 구한다. 이 교차점으로 오프셋 형상의 제어 다각형을 구성한다(Fig. 4). 그리고 원래 스패 양 끝 오프셋 점을 새로운 제어점에 포함시키면 제어점의 수가 증가되어 보

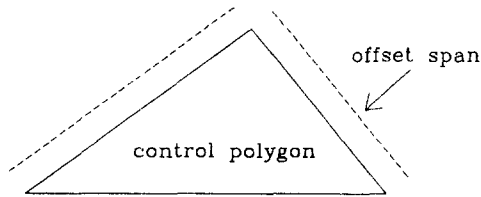


Fig. 3 Offsetting of control polygon spans

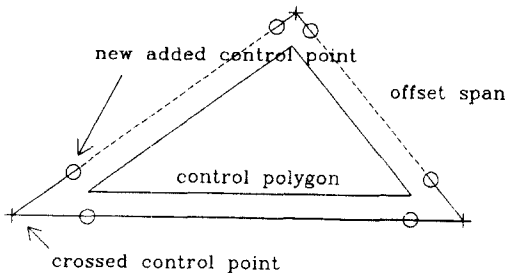


Fig. 4 The generation of new control points

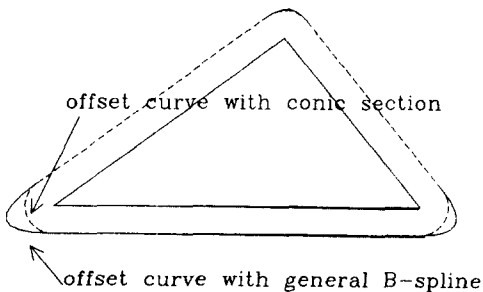


Fig. 5 The generation of a offset curve

다 유연한 형상을 제어할 수 있게 된다.

3. 새로운 제어점으로 오프셋 B-스플라인 곡선을 생성한다(Fig. 5). 이때 오프셋된 새로운 제어점에 동일점 반복이 되면 오프셋 형상은 삼각형으로 고정된다. 만일 삼각형과 같은 단순한 형상이 아닐 경우는 루프가 발생할 수 있다. 이럴 경우는 가장 바깥쪽의 교차점을 제어점으로 선택한다. 그리고 형상 스패의 오프셋 점을 새로운 제어점으로 이용하면, 세단에서 nonuniform B-스플라인 곡선 호를 생성할 수 있다.

4. 형상 점의 법선 계산에 의한 오프셋과 제어점 오프셋을 비교하여 그 신뢰성을 검증한다. 곡선 세그먼트와 일치하는 오프셋 세그먼트의 제어 노드를 설정한다. 곡선 노드에서 오프셋 노드로 오프셋 거리만큼 법선 계산을 한다. 그리고 반대로 오프셋 노드에서 곡선 노드에 대한 오프셋 거리도 계산한다. 구해진 두 벡터 값의 차이를 구하여, 그 차이가 한계 이내이면 다음 세그먼트로 진행한다. 한계를 넘게 되면 해당 노드 스패를 중점 분할하여 한 번 더 이 과정을 반복한다. 그리고 차이를 보이는 스패는 추가적인 제어를 위해 정보를 보존한다. 그러나 Fig. 6처럼 대부분의 경우 큰 차이를 보이지는 않았다.

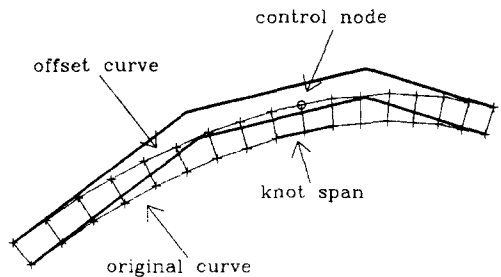


Fig. 6 The subdivision of the original curve and offset curve

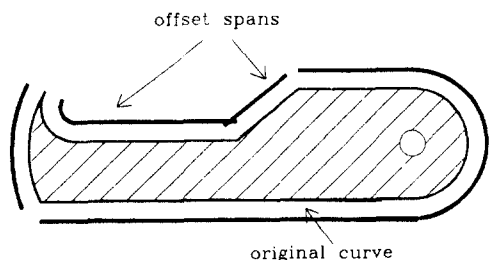


Fig. 7 Offset curve using the normal offsetting

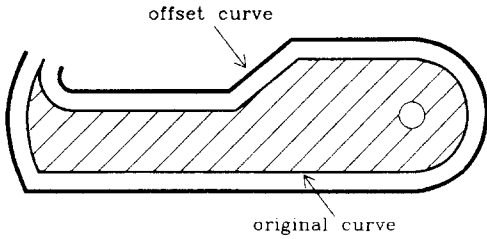


Fig. 8 Offset curve using control polygon offsetting

이상 과정으로 B-스플라인 곡선의 오프셋 형태의 만족도를 검증한다. 제어 다각형 오프셋에 의한 형상은 법선 계산에 의한 오프셋과 비교할 때 충분히 만족한 결과를 보였다. 더욱이 오프셋된 형상은 다양한 B-스플라인 곡선을 적용할 수 있는 특징을 가진다.

Fig. 7에 법선 오프셋에 의한 오프셋 형상을 보였다. 형상의 굴곡에서 꼬임과 불연속이 나타나게 되는데, 이 부분에서 형상의 수정이 요구된다. Fig. 8의 제어 다각형 오프셋과 비교하면, 제어 다각형 오프셋이 더욱 부드러운 오프셋 형상을 생성함을 알 수 있다.

Fig. 8은 한 번의 오프셋으로 연속적으로 연결된 오프셋 형상을 생성한 것을 보인 것이다. Fig. 7에 비해 불연속부가 생기지 않음을 알 수 있다.

단순한 형상 오프셋에 대한 제어 다각형 오프셋도 앞서의 오프셋 문제점을 포함할 수 있다. 때문에 B-스플라인 오프셋 곡선의 문제 발생 지역을 파악하고 그 부분에 대한 오프셋 수정을 거칠 필요가 있다. 이러한 부분에도 B-스플라인 곡선의 형상 제어 특성을 이용하여 형상 조작의 어려움을 해결할 수 있었다.

V. 결 론

가공 정보의 생성을 위한 형상 오프셋과 그 문제의 해결을 위해 B-스플라인 곡선의 형상 제어를 응용함으로써 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 법선 오프셋은 계산이 간단하나 형상 오프셋과 오프셋 문제 해결에 어려움이 있어 다양한 오프셋 생성에

적용하기 어렵다. 이를 해결하기 위해 B-스플라인 곡선으로 형상을 정의하고, 제어 다각형 오프셋을 이용하여 오프셋 형상을 구하면, 오프셋 형상에도 B-스플라인 기하 특성을 그대로 적용할 수 있다. 그러므로 오프셋 형상도 자유곡선의 다양한 형상 제어 능력을 가지게 된다.

2. 형상 생성에 적용한 기법은 제어의 효율성을 위해 nonuniform B-스플라인 곡선을 이용하였다. nonuniform 노트벡터는 uniform 및 open uniform 형태도 지원 가능하고, 제어점을 이용한 형상 수정에 있어서의 단점인 컨벡스 헐 변형도 보완하면서 오프셋 형상의 제어가 가능하다.

3. 각 제어 다각형 스펠을 법선 방향으로 오프셋하여 전체적인 형상의 오프셋을 생성하였으며, 생성된 오프셋 곡선은 법선 계산에 의한 오프셋에 비하여 양호한 결과를 가지고 있음을 확인할 수 있었다. 또한 법선 오프셋에 비하여 전체적으로 빠른 오프셋 생성이 가능하였다.

References

- 1) R Klass, 'Offset Spline Approximation for Plane Cubic Splines', CAD Vol. 15, No. 5, (1983)
- 2) W Tiller and E G Hanson, 'Offset of Two Dimensional Profiles', IEEE CG & A Vol. 4, (1984)
- 3) Coquillart, S 'Computing Offsets of B-spline Curves' CAD Vol 19 No 6 (1987)
- 4) W. J. Gordon and R. F. Risenfeld 'B-Spline Curves and Surfaces' CAGD, Academic Press (London), UK (1974)
- 5) Rogers, D F and Adams, J A 'Mathematical Elements for Computer Graphics · 2nd Ed.', McGraw Hill Books, USA(1990), p. 305 - p375
- 6) Piegl, L 'Modifying the Shape of Rational B-Splines. Part 1 : Curves' CAD Vol. 21 No. 8 (1989)