

임의분포 사하중에 의한 정적변위를 갖는 변단면 보의 자유진동

Free Vibrations of Arbitrary Tapered Beams with Static Deflections due to Arbitrary Distributed Dead Loads

이 병 구* · 이 용**
Lee, Byoung Koo · Lee, Yong

Summary

A numerical method is presented to obtain the natural frequencies and mode shapes of the arbitrary tapered beams with static deflection due to arbitrary distributed dead loads. The differential equation governing free vibration of such beams is derived and solved numerically. The double integration method using the trapezoidal rule is used to solve the static behaviour of beams loaded arbitrary distributed dead load. Also, the Improved Euler method and the determinant search method are used to integrate the differential equation subjected to the boundary conditions and to determine the natural frequencies of the beams, respectively.

In the numerical examples, the various geometries of the beams are considered : (1) linearly tapered beams as the arbitrary variable cross-section, (2) the triangular, sinusoidal and uniform loads as the arbitrary distributed dead loads and (3) the hinged-hinged, clamped-clamped and hinged-clamped ends as the end constraints. All numerical results are shown as the non-dimensional forms of the system parameters. The lowest three natural frequencies versus load parameter, slenderness ratio and section ratio are reported in figures. And for the comparison purpose, the typical mode shapes with and without the effects of static deflection are presented in the figure.

According to the numerical results obtained in this analysis, the following conclusions may be drawn : (1) the natural frequencies increase when the effects of static deflections are included, (2) the effects are larger at the lower modes than the higher ones and (3) it should be better to include the effect of static deflection for calculating the frequencies when the beams are supported by both hinged ends or one hinged end.

* 원광대학교 공과대학
** 원광대학교 대학원

키워드 : 변단면 보, 임의분포 사하중, 자유진동, 진동형, 정적변위, 개량 오일러방법

I. 서 론

보는 구조공학 분야에서 가장 기본이 되는 구조단위이므로 이에 대한 동적해석 특히 자유진동에 관한 많은 연구^{2~7,9,10}들이 이루어졌다. 이제까지 이러한 연구들은 사하중으로 인한 정적변위의 영향을 무시한 논문들이다. 그러나 최근 재료공학의 발달로 세장비가 비교적 큰 구조물의 시공이 가능하여 정적변위가 다소 큰 구조물에서도 정적 안정성을 확보할 수 있게 되었다. 이러한 경우에 정적변위는 구조물의 동적거동에 영향을 줄 것으로 생각된다.

사하중에 의한 정적변위를 갖는 보의 자유진동을 해석한 연구는 Takabatake⁸)와 이 등¹)의 논문을 들 수 있다. Takabatake는 분포사하중에 의한 정적변위를 고려한 보의 자유진동을 지배하는 편미분방정식을 유도하고 이를 Galerkin method를 이용하여 고유진동수를 산출하였다. 이 논문에서는 자유진동의 진동형은 계산하지 않았으며 수치해석 예제는 회전-회전보 및 고정-고정보에 국한하였다. 이 등은 정적변위를 갖는 보의 자유진동을 지배하는 상미분 방정식을 유도하고 이를 개량 오일러방식과 시산법 고유치 문제를 이용하여 고유진동수와 진동형을 동시에 산출하였다. 수치해석예에서는 회전-회전보, 고정-고정보 및 회전-고정보를 취급하였다. 이상의 두 논문은 모두 등분포 사하중과 등단면보에 대한 자유진동을 연구의 대상으로 하고 있으며, 지금까지 임의 분포사하중과 임의 변단면 보에 대한 정적변위를 고려한 자유진동을 해석한 연구는 찾아볼 수 없었다.

이러한 관점에서 본 논문은 임의분포 사하중에 의한 정적변위를 갖는 임의 변단면보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수 및 진동형을 산출하는데 연구 목적이 있다. 실제 수치해석

에서는 직선형 변단면보에 삼각형분포, 정현분포 및 등분포 사하중이 재하되는 경우의 고유진동수 및 진동형을 산출하였다. 보의 단부조건으로는 회전-회전, 고정-고정 및 회전-고정의 단부조건을 고려하였다.

II. 수학적 모형

Fig. 1은 길이가 l 이고, 축방향좌표 x 에서 단면적 $A(x)$ 및 단면2차모멘트 $I(x)$ 를 갖는 임의 변단면 보를 나타내고 있다. 보의 좌단에서 단면적 및 단면2차모멘트는 각각 A_a 및 I_a , 보의 우단에서는 A_b 및 I_b 이고 단부는 회전지점 또는 고정지점으로 지지되어 있다. 임의 변단면 보의 $A(x)$ 및 $I(x)$ 는 각각 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$A(x) = A_a G(x) \dots \dots \dots (1)$$

$$I(x) = I_a H(x) \dots \dots \dots (2)$$

식 (1), (2)에서 $G(x)$ 및 $H(x)$ 는 축방향좌표 x 에서 변단면의 단면적 $A(x)$ 및 단면2차모멘트 $I(x)$ 를 정의해주는 단면형상함수로서 x 만의 함수이다.

Fig. 2는 Fig. 1의 보에 임의분포 사하중 $Q(x)$ 가 작용하고 있는 보의 정적변위와 동적변위를 나타내고 있다. 이 그림에서 점선으로 표시된 $u(x)$ 는 분포사하중 $Q(x)$ 에 의한 정적변위를 나타내고 실선으로 표시된 $v(x,t)$ 는 정적변위 $u(x)$ 로부터 측정된 자유진동에 의한 동적변위를 나타낸다. 여기서 t 는 시간이다.

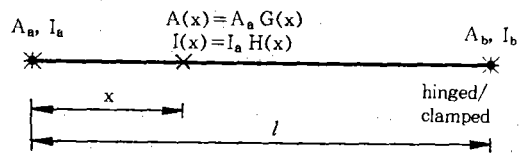


Fig. 1. Arbitrary tapered beam

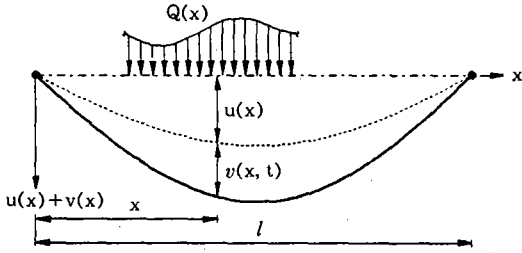


Fig. 2. Mode shape of beam with static deflection

분포사하중 $Q(x)$ 로 인한 정적변위 $u(x)$ 를 갖는 보의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 다음 식과 같다^{1,8)}.

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ EA(x) \left[\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right]^2 \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right\} = 0$$

..... (3)

위의 식에서 ρ 는 보 재료의 밀도, E 는 탄성계수이다.

보의 자유진동은 조화진동을 한다고 가정하면, 동적변위 $v(x, t)$ 는 다음과 같이 조화진동식으로 표시된다.

$$v(x, t) = v_i(x) \sin(\omega_i t), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

..... (4)

위의 식에서 $v_i(x)$ 는 조화진동의 진폭인 진동형으로 x 만의 함수이고 ω_i 는 고유각진동수 (rad/sec)이고 i 는 모드번호이다. 표기의 간편화를 위하여 $A(x)$, $I(x)$, $G(x)$, $H(x)$, $Q(x)$, $u(x)$ 및 $v_i(x)$ 의 변수는 이 후에 각각 A , I , G , H , Q , u 및 v_i 로 표시한다.

(3)식에 (4)식을 대입하고 정리하면 임의 분포 사하중에 의한 정적변위를 갖는 임의의 변단면 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식

이 다음 식과 같이 유도된다.

$$\frac{d^4 v_i}{dx^4} = \frac{-2}{H} \frac{dH}{dx} \frac{d^3 v_i}{dx^3} + \left[\frac{G}{2r^2 H} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dx^2} \right] \frac{d^2 v_i}{dx^2} + \left[\frac{G}{r^2 H} \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{du}{dx} + \frac{1}{2r^2 H} \frac{dG}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right] \frac{dv_i}{dx} + \frac{\rho \omega_i^2 G}{Er^2 H} v_i$$

..... (5)

위의 식에서 r 은 다음 식과 같이 보의 좌측 지점($x=0$)에서 단면의 회전반경이다.

$$r = (I_a/A_a)^{1/2}$$

..... (6)

상미분방정식 (5)에서 G , H , dG/dx 및 d^2H/dx^2 은 보의 자유진동에 미치는 변단면의 영향요소이며, du/dx 및 d^2u/dx^2 는 분포사하중 Q 에 의한 정적변위의 영향요소이다.

보의 단부에서 경계조건은 다음과 같다. 회전지점에서 변위와 휨모멘트는 "0"이므로 다음과 같은 경계조건을 얻을 수 있다.

$$x = 0 \text{ 또는 } l \text{ 에서 } v_i = 0$$

..... (7)

$$x = 0 \text{ 또는 } l \text{ 에서 } d^2 v_i / dx^2 = 0$$

..... (8)

고정지점에서 변위와 회전각은 "0"이므로 다음과 같은 경계조건을 얻을 수 있다.

$$x = 0 \text{ 또는 } l \text{ 에서 } v_i = 0$$

..... (9)

$$x = 0 \text{ 또는 } l \text{ 에서 } dv_i / dx = 0$$

..... (10)

III. 수치해석 방법

보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식 (5)에는 정적변위의 영향요소인 du/dx , d^2u/dx^2

dx^2 의 항이 포함되어 있으므로 이 항들을 먼저 산정하여야 한다. Fig. 2에서 Q에 의한 정적변위 u 의 산정은 중적분법에 의하여 산출하였다. 즉 임의분포하중 Q 및 임의 단면2차모멘트 I가 정의되면 2차이론(second order theory)에 의한 탄성곡선의 미분방정식 $EId^2u/dx^2 = -M$ (M은 휨모멘트)을 세울 수 있고 이를 적분하여 du/dx 및 u 를 산출할 수 있다. 이 때 탄성곡선의 미분방정식의 적분은 수치적분법인 사다리꼴법칙(trapezoidal rule)을 이용하여 실행하였다. 이에 대한 해석방법은 부정정 구조해석에 관한 문체이므로 본 연구에서 상세한 설명은 생략한다.

보의 정적변위가 매우 큰 경우에는 2차이론에 의한 탄성곡선의 미분방정식이 적용될 수 없으므로 본 논문에서는 정적변위의 최대치가 시간길이의 5% 이내가 되는 하중조건에 대해서만 수치해석을 실시하였다. 이 경우에 정적변위의 이론값과 실험값이 매우 잘 일치함을 실험을 통하여 확인하였으며, 이에 대한 자세한 언급은 정적해석에 관한 부분이므로 본 논문에서는 생략한다.

식 (5)의 상미분방정식에 포함되어 있는 정적변위의 영향요소인 du/dx 및 d^2u/dx^2 이 산출되었으므로 이제 이 미분방정식은 자유진동의 고유치인 고유각진동수 ω_n 와 그에 대응되는 진동형인 v_n 를 구하는 문제로 형성된다.

본 연구에서 고유각진동수 ω_n 값을 찾기 위하여 시산법 고유치 문제를 이용하였고 진동형 v_n 를 구하기 위하여 미분방정식 (5)의 수치적분은 개량 오일러방법을 이용하였다. 본 연구의 수치해석방법을 간단히 설명하면 다음과 같다.

주어진 보의 단부조건, 변단면 보의 제원인 I, A_a, I_a, G, H , 보재료의 기계적 성질인 E, ρ 및 분포사하중 Q에 의하여 정적변위의 영향요소를 포함하는 미분방정식 (5)식의 계수들을 산정한다.

다음에 ω_n 값을 시행착오적으로 가정하여 식 (5)의 미분방정식에 대입한 후에 해석 대상 보의 단부조건에 따라서 $x=0$ 에서의 경계조건식 (7), (8)(회전지점인 경우) 또는 (9), (10)(고정지점인 경우)을 초기치로 하여 개량 오일러방법으로 $x=0$ 에서 $x=l$ 까지 수치적분하여 진동형 v_n 를 계산한다.

이 때 시행착오적으로 가정한 ω_n 값이 자유진동의 고유치인지는 $x=l$ 에서의 단부조건인 실제의 경계조건식인 (7), (8)(회전지점인 경우) 또는 (9), (10)(고정지점인 경우)을 만족하는지의 여부로 판단한다. 즉 ω_n 값의 산정에는 시행착오적 고유치문제를 이용하였다.

이상의 수치해석방법을 단부조건, $I, A_a, I_a, A=A_aG, I=I_aH, E, \rho$ 를 입력하면 정적변위 u , 고유각진동수 ω_n 및 진동형 v_n 가 출력되도록 알고리즘을 완전 개발하고 이를 FORTRAN 77어로 프로그램을 작성하였다. 모든 수치해석결과는 노트북컴퓨터에서 실행하였으며 고유진동수는 제3모드까지 계산하였다.

IV. 수치해석 예 및 고찰

본 연구의 수치해석 예에서 임의 변단면은 다음 식들과 같이 A, I가 1차식으로 변화하는 직선형 변단면으로 택하였다.

$$A = A_aG = A_a[(m-1)x/l+1] \dots\dots (11)$$

$$I = I_aH = I_a[(m-1)x/l+1] \dots\dots\dots (12)$$

위의 식들에서 m 은 단면비로 정의되며 보의 좌측지점에 대한 우측지점의 단면적 및 단면2차모멘트 비로 다음 식 (13)과 같다. 또한 위의 식들과 같은 변단면으로는 단면높이가 일정하고 단면폭이 직선으로 변화하는 구형단면을 예로 들 수 있다³⁾.

$$m = A_b/A_a = I_b/I_a \dots\dots\dots (13)$$

보에 재하되는 임의 분포사하중으로는 다음 식들과 같이 표시되는 삼각형분포, 정현분포 및 등분포사하중의 3가지로 택하였다.

$$Q = Wx/l \dots\dots\dots (14)$$

$$Q = W \sin(\pi x/l) \dots\dots\dots (15)$$

$$Q = W \dots\dots\dots (16)$$

식 (14)는 좌측지점의 분포하중의 크기는 "0"이고 우측지점에서는 W인 삼각형 분포하중을 나타내고, 식 (15)에서 W는 정현분포하중의 경우 보의 중앙에서 분포하중의 크기이다.

수치해석 예의 결과를 무차원양으로 나타내기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$w = W l^3/EI_a \dots\dots\dots (17)$$

$$s = l/r \dots\dots\dots (18)$$

$$\alpha_i = \omega_i/\omega_{oi}, i=1, 2, 3, \dots\dots\dots (19)$$

위의 식들에서 w는 무차원 하중변수, s는 보의 세장비이다. 식 (19)에서 ω_{oi} 는 사하중의 영향을 고려하지 않은 w=0인 경우 보의 고유진동수이다. 따라서 α_i 는 사하중이 고유각진동수 ω_i 에 미치는 영향력이며 α_i 값이 클수록 사하중이 고유각진동수에 미치는 영향은 더 크다.

Fig. 3, 4, 5는 각각 회전-회전보, 고정-고정보, 회전-고정보에서 m=2, s=346인 삼각형분포 사하중인 경우에 α_i -w의 관계를 그림에 나타낸 것이다. 이들 그림에서 w=0인 경우에 α_i 값은 당연히 "1"을 나타내고 있다.

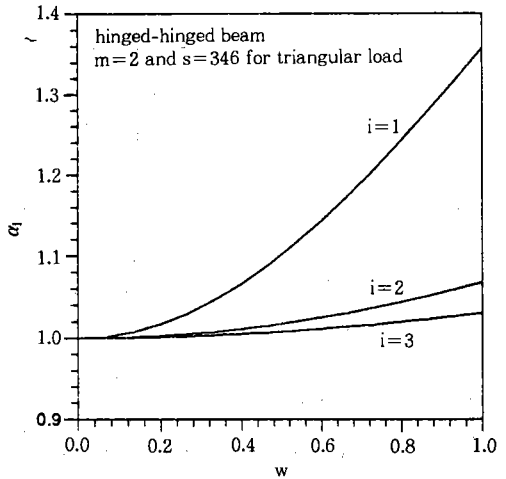


Fig. 3. α_i vs. w curves (hinged-hinged beam)

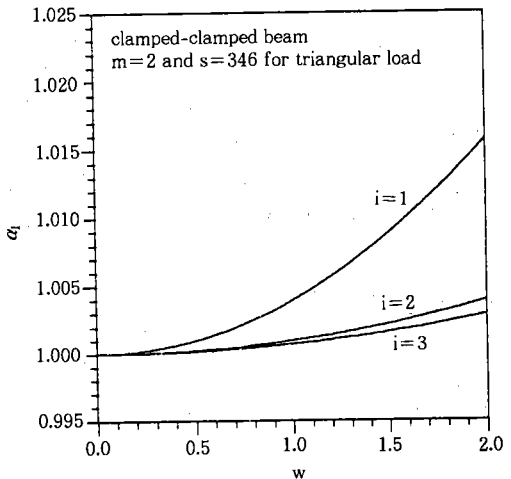


Fig. 4. α_i vs. w curves (clamped-clamped beam)

이 그림들로부터 w값이 증가하면 α_i 값도 증가하여 큰 하중에서 자유진동에 미치는 영향력은 더 크며, w값이 같을 때 $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ 의 순서를 보이고 있어서 고차모드에서 보다 저차모드에서 사하중의 영향이 더 크다.

Table-1은 Fig. 3, 4, 5에서 w=0.5와 1에 대응하는 α_i 값들을 선택하여 수록한 표이다. 이로부터 w가 α_i 에 미치는 영향은 회전-회전보 > 회전-고정보 > 고정-고정보의 순서로 영향력이 큰 것을 알 수 있으며 특히 회전지점

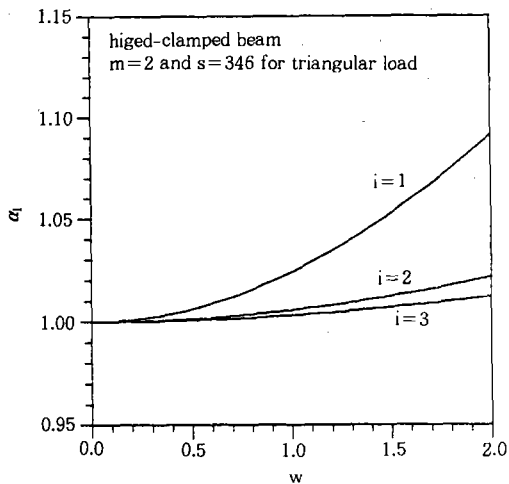


Fig. 5. α_1 vs. w curves (hinged-clamped beam.)

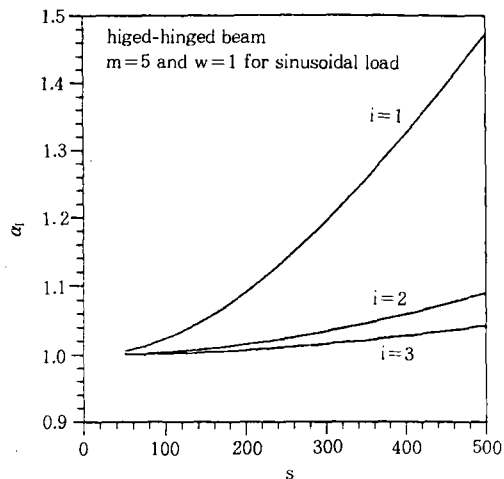


Fig. 6. α_1 vs. s curves (hinged-hinged beam)

Table-1. Comparison of α_i values by end constraints ($m=2, s=346$)

end constraint	i	$w=0.5$	$w=1$
hinged-hinged	1	1.1021	1.3587
	2	1.0184	1.0678
	3	1.0083	1.0308
clamped-clamped	1	1.0009	1.0040
	2	1.0003	1.0010
	3	1.0002	1.0007
hinged-clamped	1	1.0060	1.0238
	2	1.0014	1.0054
	3	1.0007	1.0030

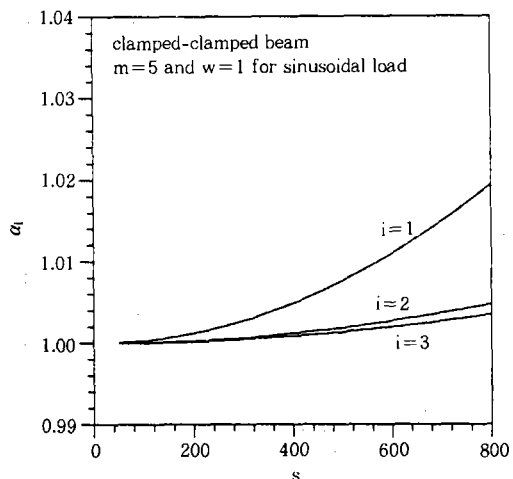


Fig. 7. α_1 vs. s curves (clamped-clamped beam)

을 갖는 보에서 w 의 영향은 상당히 커서 회전-회전보 및 회전-고정보의 자유진동해석에서 정적변위의 영향을 반드시 고려하는 것이 좋다고 사료된다.

Fig. 6, 7, 8은 각각 회전-회전보, 고정-고정보, 회전-고정보에서 $m=5, w=1$ 의 정현분포 사하중이 재하되는 경우에 세장비 s 가 α_i 에 미치는 영향을 나타낸 것이다. 이 그림들로부터 s 값이 증가하면 α_i 값도 증가하고, 세장비 s 값이 같을 때 α_i 값은 $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ 의 순서를 보이고 있어서 역시 고차모드에서 보다 저차모드에서 사하중의 영향이 더 큰 것을 알 수

있다.

Fig. 9, 10, 11은 각각 회전-회전보, 고정-고정보, 회전-고정보에서 $w=0.3, s=346$ 의 등분포 사하중이 재하되는 경우에 단면비 m 이 α_i 에 미치는 영향을 나타낸 것이다. 이 그림들로부터 m 값이 증가하면 α_i 값은 감소하고 있으며 역시 고차모드에서 보다 저차모드에서 사하중의 영향이 더 큰 것을 알 수 있다.

Fig. 12는 $m=2, s=346$ 의 회전-고정보에서 $w=0$ 및 $w=1$ 의 삼각형 분포하중이 재하되

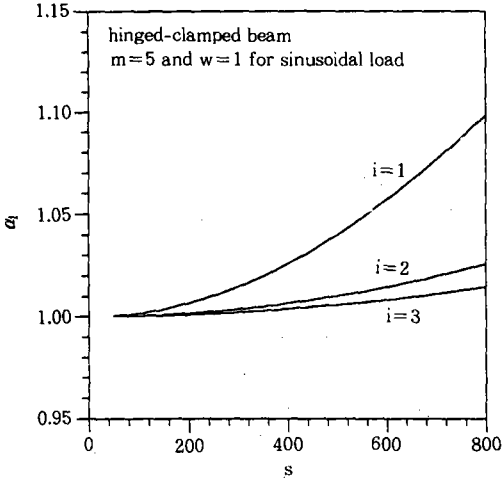


Fig. 8. α_1 vs. s curves (hinged-clamped beam)

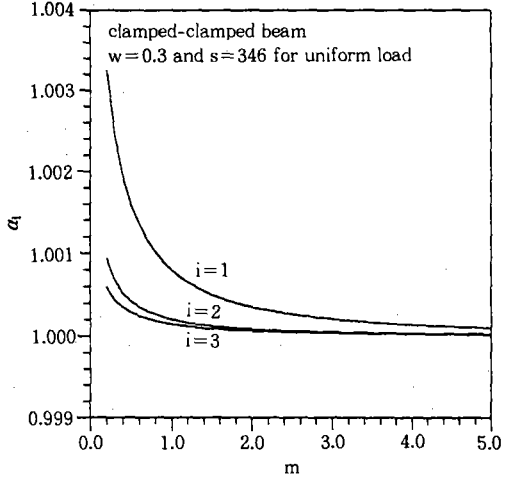


Fig. 10. α_1 vs. m curves (clamped-clamped beam)

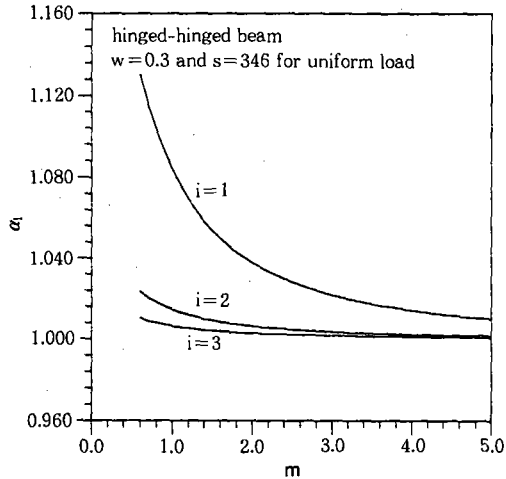


Fig. 9. α_1 vs. m curves (hinged-hinged beam)

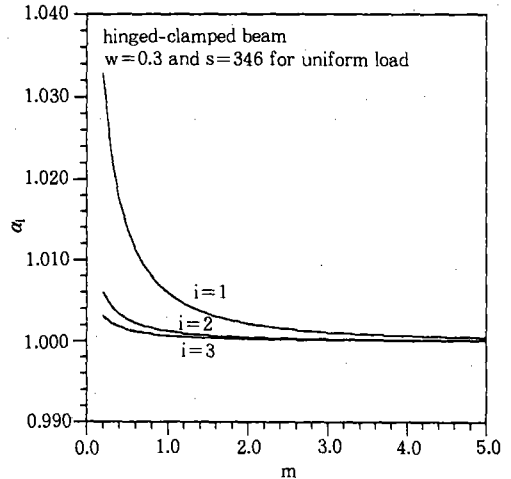


Fig. 11. α_1 vs. m curves (hinged-clamped beam)

는 경우의 제2진동형을 나타낸 것으로 $w=0$ (넓은 점선)과 $w=1$ (실선)의 진동형에 큰 차이를 보이고 있어서 사하중이 진동형에 미치는 영향력은 비교적 크다고 사료된다.

V. 결 론

이 연구는 분포사하중에 의한 정적변위를 갖는 변단면 보의 자유진동을 해석한 논문이며, 임의 분포사하중에 의한 임의 변단면 보

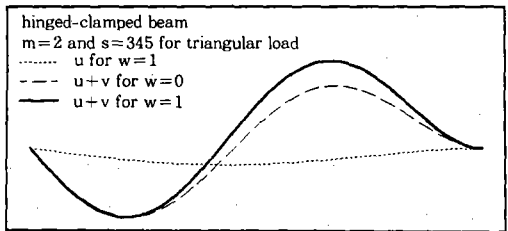


Fig. 12. Example of mode shape

의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 식 (5)와 같이 유도하고 이를 수치해석하여 고유

진동수와 진동형을 산출하였다. 수치해석 예에서는 직선형 변단면보에 삼각형분포, 정현분포 및 등분포 사하중이 작용하는 경우에 대하여 수치해석하였다.

수치해석의 결과로부터 사하중에 의한 정적변위는 고유진동수를 증가시키는 요인이며 고차모드에서 보다 저차모드에서 영향력이 더 큼을 알 수 있었다. 또한 회전지점을 갖는 보에서 그 영향력은 매우 커서 회전-회전보 및 회전-고정보의 자유진동해석에서 사하중에 의한 정적변위의 영향을 고려하는 것이 좋다고 사료된다.

참 고 문 헌

1. 이병구, 박광규, 오상진, 모정만, 1994. 사하중에 의한 정적변위를 고려한 보의 자유진동, 한국소음진동공학회 논문집, 제4권 제4호, pp.451-457.
2. 이병구, 오상진, 최규도, 1991. 변단면 보의 자유진동 해석, 대한토목학회논문집, 제11권 제4호, pp.37-46.
3. A. K. Gupta, 1975. Vibration Analysis of Linearly Tapered Beams using Frequency-Dependent Stiffness and Mass Matrix, Ph.D Thesis, Utah State University, U. S. A.
4. A. K. Gupta, 1985. Vibration of Tapered Beams, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.11, No.1, pp.1-15.
5. A. C. Heidebrecht, 1967. Vibration of

Non-Uniform Simply-Supported Beams, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.93, No. EM 2, pp.1-15.

6. B. K. Lee and S.J. Oh, 1994. Free Vibrations and Buckling Loads of Beam-Columns on Elastic Foundations, Proceedings of the International Conference on Vibration Engineering, ICVE'94, Beijing, pp.73-77.
7. B. K. Lee, S.J. Oh and J. M. Mo, 1995. Free Vibrations and Buckling Loads of Beam-Columns with Intermediate Multiple Elastic Springs, Proceedings of Sixth International Conference on Computing in Civil and Building Engineering, Berlin, pp.1155-1160.
8. H. Takabatake, 1991. Effect of Dead Loads on Natural Frequencies of Beams, Journal of the Structural Engineering, ASCE, Vol.117, No.4, pp.1039-1052.
9. W. Y. Tseng, 1969. Nonlinear Vibration of Straight and Buckled Beams under Harmonic Excitation, Ph.D Thesis, M. I. T., U. S. A.
10. H. C. Wang, 1967. Generalized Hypergeometric Function Solutions on the Transverse Vibration of a Class of Non-Uniform Beams, Journal of Applied Mechanics, Vol.136, pp.702-708.

(접수일자 : 1996년 3월 6일)