

와이블분포를 따르는 수명시간의 추정*

(Estimation of Weibull Lifetimes in Mixed Replacement Model)

이 태 섭**

Abstract

The estimation of lifetimes are examined when the distribution of lifetimes are Weibull. It is assumed that, due to physical restrictions and/or economic requirements, the lifetimes are investigated only at certain time intervals during the test period with '*mixed replacement*' experiment, even though it is well known that '*with replacement*' experiment produces better accuracy than '*without replacement*' one.

The maximum likelihood estimators are derived through the iterative method like as Lawless(1982). Also Cramer-Rao lower bounds are found as the asymptotic variances of the estimates.

* 이 논문은 1995년도 안양대학교 학술연구비의 지원을 받아 연구되었음.

** 안양대학교 통계학과

1. 서 론

1.1. 연구의 배경 및 목적

제품의 수명시간으로 대표되는 신뢰성의 향상에 따라 특정 제품 또는 부품의 수명시간을 추정하고자 하는 경우 많은 시간과 비용이 소요된다. 또한 신뢰성이 매우 높은 제품의 경우에는 정상상태에서의 수명시간 관찰이 불가능한 경우도 있다. 따라서 수명 검사에 있어 시험비용을 절감하고 시험의 편의성을 향상시키기 위하여 전체 시험기간 중에서 몇몇 특정 시점에서만 제품을 검사하는 구간검사(interval inspection)가 고려된 바 있으며, 추정하려는 대상에 스트레스를 부과하여 정상적인 경우보다 조속한 고장이 기대되는 상태에서 수명시간을 관찰하는 가속 검정(accelerated testing)이 도입되기도 하였다. 여기서 구간검사는 각 검사시점에서 발생된 고장품을 단순히 제거할 것인지, 아니면 새 것으로 교체한 후 시험을 계속할 것인지에 따라 각각 비복원(without replacement) 검사와 복원(with replacement) 검사로 구분된다. 일반적으로 복원검사는 고장품의 교체로 인하여 비복원검사의 경우보다 시험비용은 상승하게 되나, 추정량의 정확도를 높일 수 있는 장점을 갖는다고 할 수 있다. 그런데 이러한 복원검사를 도입하기 위해서는 각각의 검사시점에서 고장품을 새 것으로 복원시켜 주기 위한 충분한 양의 시험대상물을 준비해야 할 것이다. 그러나 현실적으로 시험기간 동안에 발생하게 될 고장품의 수를 사전에 정확히 알 수 없다는 점에서 복원검사 적용의 어려움이 초래된다.

여기서 복원검사의 현실적인 어려움이란 다음 두

가지 측면으로 구분될 수 있겠다. 첫째, 고장품 발생수를 과다예측함에 따라 너무 많은 여분의 시험대상물을 준비하게 되는 경우인데, 이 때는 불필요한 시험비용이 많이 소요된다. 둘째, 고장품의 발생수를 과소평가함에 따른 문제로서 시험대상물이 시험 도중에 부족하게 되는 경우를 말한다. 특히 이 경우에는 시험이 사전에 예상했던 시험기간에 못미쳐 중단되므로 수명시간의 추정 자체가 곤란하게 된다.

최근 이러한 문제를 해결하기 위하여 비복원검사와 복원검사를 결합한 혼합복원(mixed replacement) 구간검사가 제시된 바 있다. 즉 시험의 초기단계에서는 추정량의 정확도를 높이기 위하여 복원검사를 채택하고, 고장품의 교환을 위하여 준비해 둔 여분의 시험대상물이 부족해지는 검사시점부터는 비복원검사를 적용하여 사전에 계획한 기간 동안 시험을 수행하는 것이다.

따라서 본 연구에서는 이상의 혼합복원 구간검사를 가장 일반적인 수명분포라 할 수 있는 와이블분포(Weibull distribution)로 확장하여 추정의 가능성을 알아 보고자 한다.

1.2. 기존의 수명시간 추정 연구

수명자료(lifetime data)에 관한 연구로 대표되는 신뢰성분석은 공학, 의학, 보험 및 금융 등 많은 분야에 적용될 수 있으나, 그 이론적 배경이 매우 복잡하여 지금까지도 수학적으로 명쾌한 해답을 얻지 못하고 있는 실정이다. 다만 수명에 관한 확률분포가 지수분포를 따르는 경우에는 비교적 문제가 쉽게 해결될 수 있으나, 다른 분포에 관해서는 차선책으로 컴퓨터를 이용한 수치해석적 접근방법 또는 그래픽을 이용한 근사적 해를 도출하는데 만족할 수밖에

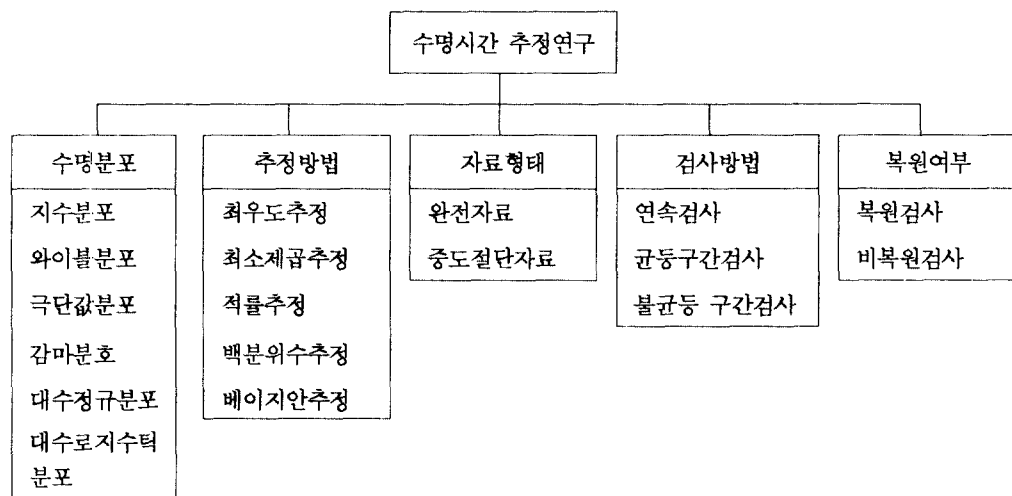
없는 상황이다. 그러나 컴퓨터의 발전에 힘입어 이러한 분야에도 상당한 진전의 가능성을 보이고 있다는 것이 다행이라 하겠다. 이 분야의 주요 관심사인 수명시간 추정에 관한 이제까지의 연구는 다음의 <그림 1>에서 보는 바와 같이 수명분포, 추정방법, 자료형태, 검사방법 및 복원여부 등으로 구분하여 검토될 수 있다.

먼저 수명분포로는 비교적 추정량의 도출이 용이한 지수분포가 주로 이용되었다. 다만 부분적으로 와이불(Weibull) 분포, 겐블(Gumbel, 1958)의 극단값(extreme value) 분포, 굽타와 그롤(Gupta & Groll, 1961)의 감마(Gamma) 분포, 넬슨과 한(Nelson & Hahn, 1972)의 대수정규(log-normal) 분포 및 바틀렛과 켄달(Bartlett & Kendall, 1946)의 대수로지스틱(log-logistic) 분포 등이 가정되기도 하였다.

추정방법에 있어서는 일반적인 최우추정법(maximum likelihood estimation) 외에도 제한과 시디퀴(Gehan & Siddiqui, 1973)의 최소제곱(least square) 추정법, 라이더(Rider, 1961)의 적률

(percentile) 추정법, 신하(Sinha, 1983) 및 칼라브리(moments) 추정법, 듀비(Dubey, 1967)의 백분위수와 풀치니(Calabria & Pulcini, 1990)의 베이지안(Bayesian) 추정법 등이 적용되었다. 또한 음함수(implicit function) 추정량 등에 대한 반복적인 추정 절차로 뉴튼-랩슨 방법(Newton-Rhapson's method)과 뎀프스터(Dempster, 1977) 등에 의해 제시된 EM 알고리즘이 이용된 바 있는데, EM 알고리즘은 일반적으로 뉴튼-랩슨 방법에 비하여 수렴속도는 떨어지나, 결측값(missing value) 등이 존재하는 불완전자료에 효과적으로 적용될 수 있는 특징이 있다.

분석대상인 수명자료의 형태에 있어서도 모든 시험대상물의 수명시간이 알려지는 완전자료(complete data) 외에 일부 시험대상물의 수명시간은 어떤 특정시점의 이상 또는 이하라고만 알려지는 중도절단자료(censored data)가 현실적으로 이용되기도 하였다. 이 때, 이러한 중도절단의 형태는 제1종 중도절단(type I censoring)과 제2종 중도절단(type II censoring)으로 구분된다. 제1종 중도절단방법은 총



<그림 1> 수명시간 추정연구의 구분

시험시간 T 를 미리 정해놓고 그 시간 동안 고장품을 관찰하는 것이며, 사한과 그린버그(Sarhan & Greenberg, 1962) 등에서의 같이 제2종 중도절단방법은 미리 정해진 숫자만큼의 고장품이 발생할 때까지 시험하는 것을 말한다.

한편 고장품을 관찰하는 검사방법에 따라 연속검사(continuous inspection)와 구간검사(interval inspection)로 나눌 수 있다. 연속검사는 전체 시험시간 동안 계속적으로 시험대상물의 고장시간을 관찰하는 것이고, 데이비스(Davis, 1952) 및 멘덴홀과 헤이더(Mendenhall & Hader, 1958) 등의 구간검사에서는 전체 시험시간 중 몇몇 특정 시점에서만 고장품을 관찰하는 것을 의미한다. 이 때 이러한 구간검사방법에 의하여 얻어지는 고장시간은 구간의 형태를 취하므로 고장시간의 상한과 하한만을 알게 된다는 특징이 있다.

끝으로 고장품의 교체여부에 따라 복원검사 및 비복원검사로 구분할 수 있는데 넬슨(Nelson, 1977) 및 웨이와 바우(Wei & Bau, 1987) 등과 같이 각 검사시점에서 고장품을 제거한 후 남은 시험대상물만으로 시험을 계속하는 것을 비복원검사라 하며, 이태섭과 윤상운(1987) 등에서의 같이 각 검사시점에서 고장품을 새 것으로 교체하여 항상 처음과 같은 숫자의 시험대상물로 시험을 계속하는 것을 복원검사라고 한다. 이 때, 비복원검사는 시험비용이 저렴한 반면에 복원검사는 추정량의 분산을 감소시킬 수 있는 특징이 있다. 그러나 최근 이태섭과 윤상운(1993)에서는 복원검사의 단점을 보완할 수 있는 현실적인 시험방법으로 복원검사와 비복원검사를 결합한 혼합복원검사를 제시하기도 하였다.

2. 혼합복원 구간검사를 통한 수명 시간 추정

앞에서 언급한 바와 같이 이태섭과 윤상운(1993) 및 이태섭(1994)에서 제시된 혼합복원 구간검사모형을 간략히 알아 보고, 제품의 고장분포가 지수분포(exponential distribution)를 따르는 수명시간에 있어서의 최우추정량에 대하여 소개하기로 한다.

2.1. 혼합복원 구간검사의 적용

혼합복원모형에서 사용되는 기호와 그 정의를 정리하면 다음의 <표 1>과 같다.

<표 1> 기호의 정의

기호	사용상의 정의
T	전체 시험시간
I	구간의 수
K	복원구간의 수 ($0 \leq K \leq I$)
n	시험대상물의 수
τ_j	j 번째 검사시점 ($j = 1, \dots, I$) ($0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_I = T$)
Δ_j	j 번째 구간의 크기 ($\Delta_j = \tau_j - \tau_{j-1}$)
P_j	j 번째 구간에서 고장품이 발생할 확률
r_j	j 번째 구간에서 발생한 전체 고장품의 수
r_{ij}	i 번째 구간에서 복원한 시험대상물 중에서 j 번째 구간에서 발생한 고장품의 수

검사시점										
고장품 수		r_1	r_2	...	r_K	r_{K+1}	r_{K+2}	...	r_I	
시험대상수		n	n	...	n	n	$n - r_{K+}$...	$n - (r_{K+1} + \dots + r_{I-1})$	

<그림 2> 혼합복원모형을 적용하는 구간검사

위의 그림은 앞에서 정의한 기호를 이용하여 혼합 복원 구간검사모형에서의 검사시점, 각 구간에서의 시험대상수 그리고 고장품 발생수를 나타낸 것이다.

혼합복원모형을 나타내고 있는 위의 그림을 보면 전체 I개 구간 중에서 처음 K개 구간은 복원구간, 그리고 나머지 (I-K)개 구간은 비복원구간이 됨을 알 수 있다. 이 때, 혼합복원모형은 만일 K=0이라면 비복원모형이 되며, 또한 K=I인 경우에는 완전한 복원모형이 된다. 즉 혼합복원모형은 그 자체의 특수한 경우로서 비복원모형과 완전복원모형을 모두 포함하는 것이다.

한편 j번째 구간 ($\tau_j - \tau_{j-1}$)에서 발생하는 고장품의 수를 r_j 그리고 (K+1)번째 구간에서의 시험대상물이었던 n개 중에서 시험이 끝나는 τ_j 까지도 고장나지 않을 시험대상물의 수를 n_{j+1} 이라고 하면, n과 r_j 그리고 n_{j+1} 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립된다.

$$r_{K+1} + \dots + r_{I+1} =$$

2.2. 지수 수명모수의 추정

이제 시험대상물의 수명시간이 지수분포를 따르는 한 가지의 고장요인에 지배를 받는다는 가정하에 혼

합복원모형을 적용하여 평균수명시간을 추정하기로 한다. 이 때, 수명분포로 가정하는 지수분포의 분포 함수(distribution function)는 다음에서 보는 바와 같다.

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad x > 0, \theta > 0$$

먼저 수명시간의 최우추정량(maximum likelihood estimator)을 구하기 위해서는 우도함수(likelihood function)를 설정해야 하는데, 혼합복원모형을 이용한 구간추정에서의 우도함수는 특정 구간이 복원구간인지 또는 비복원구간인지에 따라 다음과 같이 두 가지 우도함수의 곱으로 나타나게 됨을 유의하여야 한다.

$$L = L_1 \times L_2$$

여기서 우도함수 L_1 은 첫번째 구간부터 K번째 구간까지의 복원구간에 대한 우도를 나타내며, 두번째 우도함수 L_2 는 (K+1)번째 구간 이후의 비복원구간에 대한 우도를 의미한다. 그러면 L_1 과 L_2 로부터 혼합 복원모형에서의 우도함수를 구한 이태섭과 윤상운(1993)의 결과는 다음과 같다.

$$L = \prod_{j=1}^K \frac{n!}{r_j!(n-r_j)!} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta_j}{\theta}\right) \right\}^{r_j} \left\{ \exp\left(-\frac{\Delta_j}{\theta}\right) \right\}^{n-r_j} \frac{n!}{r_{K+1}! \cdots r_{l+1}!} \prod_{j=K+1}^{l+1} P_j$$

단,
$$\begin{cases} r_{K+1} + \cdots + r_{l+1} = \\ \Delta_j = \tau_j - \tau_{j-} \\ P_j = \exp\left(-\frac{\tau_{j-1} - \tau_K}{\theta}\right) \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta_j}{\theta}\right) \right\}, \quad j = K+1, \dots \\ P_{l+1} = \exp\left(-\frac{\tau_l - \tau_K}{\theta}\right) \end{cases}$$

여기서 수명모수 θ 의 최우추정량은 위의 우도함수를 최대화하는 θ 값이 되는데, 이 때의 최우추정량은 항상 존재하며 유일한 것임을 알 수 있다 [쿨도르프, 1961]. 한편 최우추정량을 도출하기 위하여 위의 우도함수에 대수를 취하여 θ 에 대한 1차 도함수를 구한 후, 이를 정리하면 다음과 같은 음함수 형태의 최우추정량을 얻게 된다 [이태섭과 윤상운, 1993]. 이 때, 음함수 형태의 최우추정량은 일반적으로 뉴턴-랩슨방법 등을 이용한 반복적 계산절차(iterative method)에 의해 구해질 수 있다 [로리스, 1982].

$$n\tau_K + \sum_{j=K+1}^l r_j(\tau_j - \tau_K) + r_{l+1}(\tau_l - \tau_K) - \sum_{j=1}^l \frac{r_j \Delta_j}{1 - \exp\left(-\frac{\Delta_j}{\theta}\right)} = 0$$

2.3. 추정량의 점근적 분산

한편 앞에서 도출한 음함수 형태의 최우추정량에 대한 점근적 분산개념으로 크레이머-라오 하한(Cramer-Rao lower bound : CRLB)을 도출한 결과는 다음과 같다.

$$CRLB(\hat{\theta}) = \frac{\theta^4}{n} \times \left[\sum_{j=1}^K \frac{\Delta_j^2}{\exp\left(\frac{\Delta_j}{\theta}\right) - 1} + \sum_{j=1}^l \frac{\Delta_j^2 \exp\left(-\frac{\tau_{j-1} - \tau_K}{\theta}\right)}{\exp\left(\frac{\Delta_j}{\theta}\right) - 1} \right]^{-1}$$

이 때, 추정량의 크레이머-라오 하한은 구간의 크기보다는 총시험시간과 시험대상물의 수에 더 민감함을 이태섭과 윤상운(1993)에서 보여 준다.

3. 와이블 수명분포의 추정

수명검사에서 시험대상물의 고장이 발생하는 경우 고장품의 복원은 추정량의 분산을 감소시키게 된다. 그러나 이러한 복원은 시험대상물의 수명시간, 다시 말하여 고장이 발생할 때까지의 시간인 고장시간의 분포가 지수분포의 경우와 같이 일정한 위험률(constant failure rate)을 갖는 경우에만 적용되어 왔다. 따라서 여기서는 시험대상물의 수명시간이 모수에 따라 증가 또는 감소할 수 있는, 즉 일반적인 위험률을 갖는 와이블분포를 따르는 경우에 있어서

혼합복원모형의 적용 가능성에 대하여 알아 보고자 한다.

3.1. 와이블분포에서의 혼합복원모형 구축

먼저 검사하고자 하는 제품의 수명시간이 다음과 같은 분포함수를 갖는 와이블분포를 따른다고 가정한다.

$$F(y) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^\beta\right\}, \quad y > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

이 때, α 는 크기모수(scale parameter), β 는 형상모수(shape parameter)를 나타낸다. 여기서 각 검사시점을 τ_j 라고 가정하면, j 번째 구간에서 고장이 발생할 확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_j &= F(\tau_j) - F(\tau_{j-1}) \\ &= \exp\left\{-\left(\frac{\tau_{j-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\} - \exp\left\{-\left(\frac{\tau_j}{\alpha}\right)^\beta\right\} \end{aligned}$$

이 때, j 번째 구간에서의 고장품 발생수를 r_j 라고 하면, 비복원모형에서의 우도함수는 다음과 같이 다항분포의 형태로 구해진다.

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta) &= \frac{n!}{r_1! \cdots r_{I+1}!} \times \\ &\prod_{j=1}^{I+1} \left[\exp\left\{-\left(\frac{\tau_{j-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\} - \exp\left\{-\left(\frac{\tau_j}{\alpha}\right)^\beta\right\} \right]^{r_j} \end{aligned}$$

단, 위의 식에서 τ_{I+1} 은 ∞ 로 가정한다.

이제 이러한 와이블분포를 따르는 구간검사에 있어 혼합복원모형을 도입해 보기로 한다. 먼저 비복원모형에서 각 구간의 시험대상수 및 고장품 발생수

를 다음과 같이 가정한다.

검사 구간	1	2	...	I
고장품 수	r_1	r_2	...	r_I
시험대상수	n	$n - r_1$...	$n - (r_1 + \cdots + r_{I-1})$

<그림 3> 비복원모형에서의 시험대상수 및 고장품

발생수

여기서 다음과 같은 시험을 고려한다. n 개의 시험대상물로 시험을 시작하여 첫번째 구간에서 r_{11} 개의 고장품이 발생하였다면, 두번째 검사구간부터는 추가로 $r_1 (= r_{11})$ 개를 투여하여 시험을 계속한다. 그리고 두번째 구간에서 $(n - r_{11})$ 개로 시작된 첫번째 시험대상물로부터 r_{12} 개의 고장이 발생하고 또한 r_1 개로 시작된 두번째 시험대상물로부터 r_{22} 개의 고장이 발생한다면, 세번째 검사구간부터는 두번째 구간에서의 고장품 발생수인 $r_2 (= r_{12} + r_{22})$ 개를 시험에 추가한다. 이러한 복원과정을 K 번째 구간까지 계속하면 다음의 그림에서 보는 바와 같이 K 번째 구간까지는 각 구간에서의 시험대상수가 항상 n 개이고, 그 이후의 구간에서는 시험대상수가 n 보다 작게 되는 이른바 혼합복원모형이 구축된다.

검 사 구 간							
1	2	3	...	K	...	I	
n	$n - r_{11}$	$n - r_{11} - r_{12}$		$n - r_{11} - r_{12} \cdots - r_{1,K}$		$n - r_{11} - r_{12} \cdots - r_{1,K-1} \cdots - r_{1,I}$	
	r_1	$r_1 - r_{22}$		$r_1 - r_{22} \cdots - r_{2,K}$		$r_1 - r_{22} \cdots - r_{2,K-1} \cdots - r_{2,I}$	
		r_2		$r_2 \cdots - r_{3,K}$		$r_2 \cdots - r_{3,K-1} \cdots - r_{3,I}$	
				.		.	
				.		.	
				.		.	
				r_{K-1}		$r_{K-1} \cdots - r_{r,I}$	

<그림 4> 혼합복원모형에서의 시험대상수

한편 혼합복원모형에서의 고장품 발생수 및 비교장품 수는 다음의 <그림 5>와 같은데, 각 구간에서의 고장품 총수는 r_j 그리고 시험이 끝나는 시점까지 고장나지 않을 시험대상물의 수는 n_{j+1} 로 나타낼 수 있다.

$$r_j = \begin{cases} \sum_{i=1}^j r_{ij}, & j \leq K \\ \sum_{i=1}^K r_{ij}, & j \geq K+1 \end{cases} \quad \text{그리고} \quad r_{I+1} = \sum_{i=1}^K r_{i,I+1}$$

고 장 품 발 생 수								비고장 수	
구 간 :	1	2	3	...	K	K+1	...	I	I+1
	r_{11}	r_{12}	r_{13}	...	r_{1K}	$r_{1,K+1}$...	r_{1I}	$r_{1,I+1}$
		r_{22}	r_{23}	...	r_{2K}	$r_{2,K+1}$...	r_{2I}	$r_{2,I+1}$
			r_{33}	...	r_{3K}	$r_{3,K+1}$...	r_{3I}	$r_{3,I+1}$
				
				
				
					r_{KK}	$r_{K,K+1}$...	r_{KI}	$r_{K,I+1}$
	r_1	r_2	r_3	...	r_K	r_{K+1}	...	r_I	r_{I+1}

<그림 5> 혼합복원모형에서의 고장품 발생수 및 비교장품 수

3.2. 최우추정량의 추정

이제 이러한 혼합복원모형의 우도함수를 구하면 다음과 같이 K개 비복원모형의 결합형태가 됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
 L(\alpha, \beta) &= C_1 \prod_{j=1}^{l+1} \left[\exp\left\{-\left(\frac{\tau_{j-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\} - \exp\left\{-\left(\frac{\tau_j}{\alpha}\right)^\beta\right\} \right]^{r_{1j}} \\
 &\times C_2 \prod_{j=2}^{l+1} \left[\exp\left\{-\left(\frac{\tau_{j-1}-\tau_1}{\alpha}\right)^\beta\right\} - \exp\left\{-\left(\frac{\tau_j-\tau_1}{\alpha}\right)^\beta\right\} \right]^{r_{2j}} \\
 &\times C_3 \prod_{j=3}^{l+1} \left[\exp\left\{-\left(\frac{\tau_{j-1}-\tau_2}{\alpha}\right)^\beta\right\} - \exp\left\{-\left(\frac{\tau_j-\tau_2}{\alpha}\right)^\beta\right\} \right]^{r_{3j}} \\
 &\vdots \\
 &\times C_K \prod_{j=K}^{l+1} \left[\exp\left\{-\left(\frac{\tau_{j-1}-\tau_{K-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\} - \exp\left\{-\left(\frac{\tau_j-\tau_{K-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\} \right]^{r_{Kj}} \\
 &= \prod_{i=1}^K C_i \prod_{j=i}^{l+1} \left[\exp\left\{-\left(\frac{\tau_{j-1}-\tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\} - \exp\left\{-\left(\frac{\tau_j-\tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\} \right]^{r_{ij}}
 \end{aligned}$$

여기서 최우추정량을 구하기 위하여 우도함수에 대수를 취한 후 α 와 β 에 대하여 각각 1차 미분한 결과는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} &= \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^K \sum_{j=i}^{l+1} r_{ij} \left[\frac{\left(\frac{\tau_{j-1}-\tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\tau_{j-1}-\tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\}}{\exp\left\{-\left(\frac{\tau_{j-1}-\tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\} - \exp\left\{-\left(\frac{\tau_j-\tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\left(\frac{\tau_j-\tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\tau_j-\tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\}}{\exp\left\{-\left(\frac{\tau_{j-1}-\tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\} - \exp\left\{-\left(\frac{\tau_j-\tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = & - \sum_{i=1}^K \left[-r_{ii} \frac{\ln\left(\frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{\alpha}\right) \cdot \left(\frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta \exp\left\{-\left(\frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\}}{1 - \exp\left\{-\left(\frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\}} \right. \\
& + \sum_{j=i+1}^I r_{ij} \frac{\ln\left(\frac{\tau_{j-1} - \tau_{i-1}}{\alpha}\right) \cdot \left(\frac{\tau_{j-1} - \tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\tau_{j-1} - \tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\}}{\exp\left\{-\left(\frac{\tau_{j-1} - \tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\} - \exp\left\{-\left(\frac{\tau_j - \tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\}} \\
& - \sum_{j=i+1}^I r_{ij} \frac{\ln\left(\frac{\tau_j - \tau_{i-1}}{\alpha}\right) \cdot \left(\frac{\tau_j - \tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\tau_j - \tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\}}{\exp\left\{-\left(\frac{\tau_{j-1} - \tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\} - \exp\left\{-\left(\frac{\tau_j - \tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\}} \\
& \left. + r_{i,I+1} \frac{\ln\left(\frac{\tau_I - \tau_{i-1}}{\alpha}\right) \cdot \left(\frac{\tau_I - \tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\tau_I - \tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\}}{\exp\left\{-\left(\frac{\tau_I - \tau_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\}} \right]
\end{aligned}$$

이 때, α 와 β 의 최우추정량은 앞의 두 식에 초기값을 부여한 후 반복적인 추정과정을 통하여 도출된다 [로리스, 1982].

4. 결 론

일반적인 수명분포라 할 수 있는 와이블분포에 현실적이고 편리한 수명시간 추정방법이라 할 수 있는 혼합복원 구간검사가 적용될 수 있는지를 알아 보고자 하였다. 그 결과 와이블분포의 두 모수, 즉 크기모수와 형상모수를 반복적인 추정방법을 통하여 구할 수 있었다.

이 연구에서는 추정량의 도출과정만을 살펴 보았는데, 앞으로 추정량의 특성에 관한 분석을 통한 혼합복원 모형에서의 시험설계에 관한 연구가 요구된다.

참 고 문 헌

1. 이태섭, "수명시간 추정을 위한 혼합복원 구간검사의 최적 설계," 한국군사운영분석학회, 한국군사운영분석학회지, 20, #1, 36-48, 1994.
2. 이태섭·윤상운, "혼합복원 구간검사를 적용한 지수생명분포의 모수추정," 연세대학교, 산업과 경영, 30, #1, 1-14, 1993.
3. 이태섭·윤상운, "지수분포에서 불균등 구간검열과정에 의한 평균수명시간 추정," 연세대학교, 산업과 경영, 24, #1, 41-52, 1987.
4. Bartlett, M.S., and Kendall, D.G., "The Statistical Analysis of Variance Heterogeneity and Logarithmic Transformation," *Journal of the Royal Statistical Society*, B 8, #1, 128-138, 1946.
5. Calabria, R., and Pulcini, G., "Bayes Estimation in Exponential Censored Samples with Incomplete Information," *Communications in Statistics : Theory and Methods*, 19, #8, 3037-3049, 1990.
6. Davis, D.J., "An Analysis of Some Failure Data," *Journal of the American Statistical Association*, 47, 113-150, 1952.
7. Dempster, A.P., Laird, N.M., and Rubin, D.B., "Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm," *Journal of the Royal Statistical Society*, B 39, #1, 1-38, 1977.
8. Dubey, S.D., "Some Percentile Estimators for Weibull Parameters," *Technometrics*, 9, 119-129, 1967.
9. Gehan, E.A., and Siddiqui, M.M., "Simple Regression Methods for Survival Time Studies," *Journal of the American Statistical Association*, 68, 848-856, 1973.
10. Gumbel, E.J., *Statistics of Extremes*, Columbia University Press, New York, 1958.
11. Gupta, S.S., and Groll, P.A., "Gamma Distribution in Acceptance Sampling based on Life Tests," *Journal of the American Statistical Association*, 56, 942-970, 1961.
12. Kulldorff, G., *Contribution to the Theory of Estimation from Grouped and Partially Grouped Samples*, John Wiley & Sons, New York, 1961.
13. Lawless, J.F., *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, John Wiley & Sons, New York, 1982.
14. Mendenhall, W., and Hader, J.R., "Estimation of Parameters of Mixed Exponentially Failure Time Distributions from Censored Life Time Data," *Biometrika*, 45, 504-520, 1958.
15. Nelson, W., "Optimum Demonstration Tests with Grouped Inspection Data from an Exponential Distribution," *IEEE Transactions on Reliability*, R-26, 226-231, 1977.
16. Nelson, W., and Hahn, G.J., "Linear Estimation of a Regression Relationship from Censored Data : Part I - Simple Methods and their Applications," *Technometrics*, 14, 247-269, 1972.

17. Rider, P.R., "The Method of Moment Applied to a Mixture of Two Exponential Distributions," *Annals of Mathematical Statistics*, 32, 143-147, 1961.
18. Sarhan, A.E. and Greenberg, B.G., *Contribution to Order Statistics*, Wiley, 1962.
19. Sinha, S.K., "Bayesian Estimators of the Parameters and Reliability Function from Mixed Exponentially Distributed Time-Censored Life Test Data," *Communications in Statistics : Theory and Methods*, 12, #2, 141-151, 1983.
20. Wei, D., and Bau, J.J., "Some Optimal Designs for Grouped Data in Reliability Demonstration Tests," *IEEE Transactions on Reliability*, R-36, 600-604, 1987.