

非對稱分布 工程을 위한 中央値와 範圍 管理圖의 設計 (The Design of Median and Range Control Charts for Skewed Distribution Processes)

김우열, 김동목, 정화식, 최진섭*

Abstract

The statistical control chart has been proven to be the effective tool most widely used in the manufacturing industry for monitoring and controlling the quality of the manufacturing processes. However, the Shewhart chart sometimes gives us false information when the distribution of quality characteristic is skewed. Therefore, it cannot serve as the universal quality control chart if there exist odd events in the manufacturing process. The objective of this study is thus to develop the new technique for constructing the limits of quality control chart based on a sample median and range when the distribution of the underlying population is skewed. This new control chart can effectively solve and manage the processes which have the non-normally distributed quality characteristics frequently occurring in the practical situation.

* 동신대학교 산업공학과

1. 序 論

생산공정에서 품질 특성치에 관한 자료를 해석하여 필요한 정보를 얻고 이 정보에 의하여 공정을 효과적으로 관리하기 위하여 관리도(Control Chart)가 사용된다. 일반적으로 관리도라고 하면 Walter. A. Shewhart의 3σ 원칙에 입각한 $\bar{X}-R$, X , $\bar{X}-R$ 등의 전통적인 관리도를 말하는데, 이들은 모두 제품의 품질 특성치의 분포가 정규분포이거나 또는 그에 유사한 분포를 따른다고 간주될 때 사용되는 통계적 품질관리 활동의 대표적인 기법이다.

이 관리도를 적용하기 위해서는 먼저 대상 제품의 정규성을 입증할 수 있어야만 소기의 목적을 달성할 수 있게 된다. 그러나 제품의 품질 특성치가 비정규성을 나타내고 있는 경우에는 이 관리도들은 몇 가지 문제점을 보이게 된다. 특히 품질 특성치가 정규분포가 아닌 비대칭 분포를 따를 때 $\bar{X}-R$ 관리도를 사용하면 실제로 공정에 이상원인이 존재하지 않더라도 관리도 상에는 이상원인이 발생한 것처럼 잘못된 정보(False Alarm)를 주는 경우가 많이 발생한다. 이것은 비정규분포의 경우 정규분포 보다는 후미의 확률(Tail Probability)이 크기 때문이다. 또한, \bar{X} 관리도를 비대칭 분포에 적용하면 표본들이 중심선 상한 또는 하한에 치우쳐서 타점되는 경향이 많은데 이런 경향은 비대칭 분포에서는 표본 평균 \bar{X} 가 중심 경향을 나타내는 좋은 통계량이라고 볼 수 없기 때문이다.

품질 특성치가 비대칭 분포를 따르는 경우에 발생하는 문제점을 해결하기 위하여 많은 연구가 진행되어 왔다. 기존의 연구를 특징에 따라 분류하면 다

음과 같이 세 분야로 분류할 수 있다. 첫째로 품질 특성치에 대한 모집단의 분포를 사전에 가정하고 그 분포에 따른 확률 한계를 사용하는 방법으로 Ferrell[5], Nelson[11] 등에 의하여 제안되었다. 둘째로 Burr[2]에 의하여 제안된 방법으로 Shewhart의 $\bar{X}-R$ 관리도 상수를 왜도에 따라 수정하여 사용하는 방법이다. 셋째로 모집단의 분포를 가정하지 않고 표본으로부터 왜도에 따른 비대칭 관리한계를 구하는 발견적 방법(Heuristic Method)이 있다. 이 방법에 대한 연구로는 Cowden[4]의 분포분리법(Split Distribution Method), Choobineh와 Ballard[3]의 가중분산법(Weighted Variance Method), 그리고 사분위분할법(Quantile Split Method) 등이 있다.

본 연구에서는 분포의 가정없이 표본으로부터 왜도를 추정하여 일반적으로 사용할 수 있는 관리도를 개발하기 위하여 Cowden의 분포분리법과 최인수[12]의 사분위분할법의 개념을 활용하여 공정의 수준과 변동을 동시에 관리할 수 있는 범위분할법(Range Split Method)을 제안한다. 또한 제안된 방법이 품질 특성치의 왜도에 대하여 얼마나 잘 적용되는지를 알아보기 위하여 $\bar{X}-R$ 관리도법 및 가중분산법과 새로 개발한 범위분할법을 컴퓨터 모의 실험을 통하여 비교하고자 한다.

2. 中央値(\bar{X}) 管理圖

어떤 모집단 즉 제품 로트에서 무작위로 뽑은 n 개의 제품의 품질 특성치를 각각 X_1, X_2, \dots, X_n 이라 하고 이들로부터 구해진

순서통계량을 $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ 라 한다. 또한 중앙치(\bar{X})관리도의 본래 목적인 생산현장에서 의 간편성과 실용적 측면을 고려하여 표본의 크기 n 을 홀수인 경우만 고려하기로 한다. 중앙치의 평균 $\mu_{\bar{X}}$, 분산 $\sigma_{\bar{X}}^2$ 및 범위 R 의 기대값은 다음 식(1)과 같다.

$$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X})$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = E(\bar{X}^2) - [E(\bar{X})]^2 \quad (1)$$

$$\mu_R = E(R) = E(X_{(n)}) - E(X_{(1)})$$

그런데 $\sigma_{\bar{X}} = c_1\sigma$, $\mu_R = c_2\sigma$ 의 관계가 성립

한다고 가정하면, 중앙치의 관리한계는 $\mu_{\bar{X}} \pm 3\sigma_{\bar{X}}$ 가 되고 이 관리한계는 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$\mu_{\bar{X}} \pm 3\sigma_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} \pm 3c_1\sigma$$

$$= \mu_{\bar{X}} \pm 3c_1 \frac{\mu_R}{c_2} \quad (2)$$

여기에서 $3c_1/c_2$ 을 k 라 하면

$$k = 3\sigma_{\bar{X}}/\mu_R \quad (3)$$

이 된다. 따라서 $\mu_{\bar{X}}$ 의 추정치로 $\bar{\bar{X}}$, μ_R 의 추정치로 \bar{R} 를 사용한다면 중앙치의 관리 한계는 $\bar{\bar{X}} \pm k\bar{R}$ 이 되므로 중심선과 관리 상한 및 관리 하한은

$$CL = \bar{\bar{X}}$$

$$UCL = \bar{\bar{X}} + k\bar{R}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - k\bar{R} \quad (4)$$

이 된다. 만약 식(4)에서 모집단이 정규분포라면 $k = m_3A_2$ 가 된다. 그러나 모집단이 정규분포가 아니라면 상수 k 는 왜도가 있는 일반적인 분포(와이블분포, 감마분포, 대수정규분포 등)로부터 순서 통계량의 적률기대값을 이용하여 구할 수 있다.

만약 품질 특성치가 와이블분포인 경우라 한다면 Lieblein이 제안한 와이블분포에 있어서 순서통계량의 적률기대값[10]을 이용할 수 있다. <표 1>에 이 방법을 이용한 와이블분포의 \bar{X} 관리도 상수가 나타나 있다.

감마분포의 경우 관리도 상수값은, Gupta[6], Krishnaiah[9]가 연구한 감마분포의 적률기대값 표를 이용하여 구할 수 있는 표본수와 왜도에 따라 각각의 관리도 상수를 산출하여 <표 2>에 제시하였다. 또한 대수 정규분포에 있어서는 Gupta[7]가 제시한 결과를 토대로 형상모수가 1인 경우 (왜도가 6.2인 경우)의 상수값만을 구하였다.

<표 1> 과 <표 2>에서 보는 바와 같이 관리도 상수 k 값은 모집단의 분포와 왜도에 대하여 크게 민감하지 않기 때문에 일반적인 분포에 대하여 관리도를 사용할 때 와이블분포에서 구한 관리도 상수값을 대표치로 사용한다.

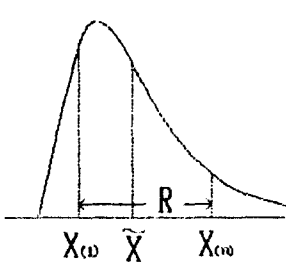
범위분할법은 <도 1> 과 같이 중앙치에서 분포를 분리하는 방법이다. 하나의 분포를 중앙치를 기준으로 두개로 분리한 후 각각에 대하여 분리한 각 분포가 양쪽에 대칭적으로 존재한다고 가정하면 <도 1.b> 및 <도 1.c> 와 같이 중앙치는 같고 분산이 다른 두개의 분포로 생각할 수 있다. 따라서 중앙치보다 작은 쪽 범위는 <도 1.b> 에서와 같이 R_L 을 사용하고, 중앙치보다 큰 쪽 범위는 <도 1.c> 에서와 같이 R_U 를 사용한다. 즉 중앙치 관리도에의 적

<표 1> 와이블분포의 \bar{X} 관리도 상수

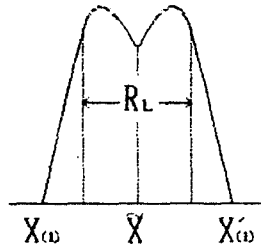
| 왜도 | .00 | .50 | .75 | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 2.00 | 3.00 | 4.00 |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| n=3 | 1.21 | 1.21 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 | 1.20 | 1.18 | 1.16 |
| n=5 | .71 | .71 | .71 | .71 | .70 | .69 | .67 | .61 | .57 |
| n=7 | .53 | .53 | .53 | .52 | .51 | .50 | .48 | .42 | .37 |
| n=9 | .43 | .43 | .43 | .42 | .41 | .40 | .38 | .32 | .28 |

<표 2> 감마분포와 대수정규분포의 \bar{X} 관리도 상수

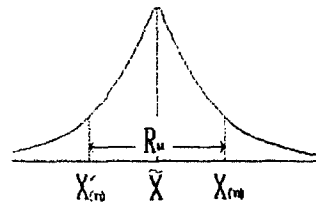
| 왜도 | 감마분포 | | | | | | | 대수 정규분포 |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|---------|
| | .62 | .73 | 1.00 | 1.26 | 1.41 | 2.00 | 2.83 | 6.2 |
| n=3 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.10 |
| n=5 | .69 | .68 | .69 | .68 | .67 | .67 | .63 | .54 |
| n=7 | .51 | .51 | .50 | .50 | .49 | .48 | .43 | .36 |
| n=9 | .41 | .41 | .40 | .40 | .40 | .38 | .33 | .27 |



(a) 원래의 분포와 범위



(b) 하한 범위



(c) 상한 범위

<도 1> 분포의 분리방법

용시 관리 하한에는 R대신 하한 범위인

$$R_L = 2(\bar{X} - X_{(1)}) \quad (5)$$

을 사용하고 관리 상한에는 R대신 상한 범위인

$$R_U = 2(X_{(n)} - \bar{X}) \quad (6)$$

를 사용한다. m개의 부분군으로부터 부분군의 하한 범위 R_{Li} 와 부분군의 상한 범위 R_{Ui} 를 산출한 후 각각의 평균 \bar{R}_L , \bar{R}_U 를 계산하여 관리도에서

하한범위의 상한범위의 추정치로 사용한다.

예로서 품질특성치 모집단의 형상모수가 1.0(왜도 2.0)인 와이블분포에서 표본을 5개 추출하는 경우에 μ_R 을 사용하여 구한 대칭관리한계 구간과 μ_{R_L} , μ_{R_U} 를 사용하여 구한 비대칭 관리한계 구간을 비교하여 보면

$$E(X_{(1)}) = 0.2 \quad E(X_{(3)}) = 0.7833$$

$$E(X_{(5)}) = 2.2833$$

$$\mu_{R=ER} = E(X_{(5)}) - E(X_{(1)}) = 2.0833$$

$$\mu_{R_L} = 2[E(X_{(3)}) - E(X_{(1)})] = 1.167$$

$$\mu_{R_U} = 2[E(X_{(5)}) - E(X_{(3)})] = 3.0$$

이므로 대칭관리 한계 구간은

$$\begin{aligned} UCL - LCL &= (\mu_{\bar{X}} + K\mu_{R_U}) - (\mu_{\bar{X}} - K\mu_{R_L}) = 2K\mu_R \\ &= 2 \times 0.67 \times 2.0833 = 2.792 \end{aligned}$$

이고, 비대칭 관리한계 구간은

$$\begin{aligned} UCL - LCL &= (\mu_{\bar{X}} + K\mu_{R_U}) - (\mu_{\bar{X}} - K\mu_{R_L}) \\ &= K(\mu_{R_U} + \mu_{R_L}) \end{aligned}$$

$$= 0.67 \times (3.0 + 1.167) = 2.792$$

이 되어 두 관리한계 구간은 동일하다. 그러나 중앙치를 중심으로 관리상한쪽 범위가 관리하한쪽 범위보다 크기 때문에 중앙치과 관리상한선과의 폭이 관리하한 선과의 폭보다도 넓어지게 된다.

따라서 범위분할법에 있어서 중앙치 (\bar{X}) 관리도의 중심선과 관리상한 및 관리하한은

$$CL = \bar{X}$$

$$UCL = \bar{X} + k\bar{R}_U \quad (7)$$

$$LCL = \bar{X} - k\bar{R}_L$$

이다. 식(7)에서 보는 바와 같이 품질 특성치의 분포가 정규분포를 따를 때는 식 (3)에 의하여 $3\sigma_{\bar{X}} = kR_L = kR_U$ 가되어 범위분할법의 중심선과 관리한계는 Shewhart형 \bar{X} 관리도의 중심선 및 관리한계와 같아진다.

3. 範圍(R) 管理圖

품질 특성치의 분포가 정규분포를 따를 경우에는 Shewhart $\bar{X}-R$ 관리도에서 R 관리도를 사용하면 된다. 그러나 특성치의 분포가 정규분포가 아닌 비대칭 분포인 경우에는 R 관리도를 그대로 사용할 수가 없다. 왜냐하면 R 관리도에서는 각각의 측정치가 정규분포를 따른다는 가정 하에 관리도상수 D_3 와 D_4 를 산출하였기 때문에 이들 상수는 왜도에는 관련이 없고 표본수에만 의존하기 때문이다.

품질 특성치가 와이블분포인 모집단에서 n개의

표본을 선택했을 때 $\mu_R = c_2\sigma$, $\sigma_R = c_3\sigma$ 관계가 성립한다고 가정하면, 범위 R의 관리한계는 $\mu_R \pm 3\sigma_R$ 이 되고 이 관리한계는 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$\begin{aligned}\mu_R \pm 3\sigma_R &= \mu_R \pm 3c_3\sigma \\ &= \mu_R \pm 3c_3 \frac{\mu_R}{c_2} \\ &= (1 \pm 3c_3/c_2)\mu_R \\ &= (1 \pm 3\sigma_R/\mu_R)\mu_R\end{aligned}\quad (8)$$

따라서 범위 R의 중심선과 관리상한 및 관리하한은

$$\begin{aligned}CL &= \mu_R \\ UCL &= k_U \mu_R \\ LCL &= k_L \mu_R\end{aligned}\quad (9)$$

이다.

범위 R의 기대값 μ_R 을 알고 있지 못하므로 μ_R 의 불편추정치 \bar{R} 로 추정한다면 범위 R의 중심선과 관리 한계선은

$$\begin{aligned}CL &= \bar{R} \\ UCL &= k_U \bar{R} \\ LCL &= k_L \bar{R}\end{aligned}\quad (10)$$

이다. 여기에서 관리상한과 관리하한의 관리도 상수인 k_L 과 k_U 를 구하기 위하여 Lieblein의 와이불분포에 있어서 순서통계량의 적률기대값[10]을 이용할 수 있다. 즉, 범위 R의 기대값 μ_R 과 표준편차 σ_R 은

$$\begin{aligned}\mu_R &= E(R) \\ &= E(X_{(n)} - X_{(1)}) \\ &= E(X_{(n)}) - E(X_{(1)}) \\ \sigma_R &= [E(R^2) - (E(R))^2]^{1/2} \\ &= [E((X_{(n)} - X_{(1)})^2) - (E(X_{(n)} - X_{(1)}))^2]^{1/2} \\ &= [E(X_{(n)}^2) + E(X_{(1)}^2) - 2E(X_{(n)}X_{(1)}) \\ &\quad - E(X_{(n)})^2 - E(X_{(1)})^2 + 2E(X_{(n)})E(X_{(1)})]^{1/2}\end{aligned}$$

이 되어 Lieblein의 식을 이용하면 범위 R의 기대값과 표준편차를 구할 수 있고 관리도상수 k_L 과 k_U 또한 계산할 수 있다.

예로써 모집단의 형상모수가 1.0(왜도 2.0)인 와이불분포에서 표본을 5개 추출하는 경우에 R 관리도의 관리상한과 관리하한의 관리도 상수 k_L 과 k_U 를 계산하면

$$\begin{aligned}E(X_{(1)}) &= 0.2 & E(X_{(1)}^2) &= 0.08 \\ E(X_{(5)}) &= 2.2833 & E(X_{(5)}^2) &= 6.6772 \\ E(X_{(1)}X_{(5)}) &= 0.4967 \\ \mu_R &= E(X_{(5)}) - E(X_{(1)}) = 2.0833 \\ \sigma_R &= [E(X_{(5)}^2) + E(X_{(1)}^2) \\ &\quad - 2E(X_{(1)}X_{(5)}) - (E(X_{(5)}))^2 \\ &\quad - (E(X_{(1)}))^2 + 2E(X_{(1)})E(X_{(5)})]^{1/2} \\ &= (6.6772 + 0.08 - 0.9934 - 2.2833^2 \\ &\quad - 0.2^2 + 0.9133)^{1/2} \\ &= 1.193\end{aligned}$$

$$k_L = 1 - 3\sigma_R/\mu_R = -0.7179$$

$$k_U = 1 + 3\sigma_R/\mu_R = 2.7179$$

이다. 모집단이 와이블분포인 경우에 왜도와 표본의 크기에 따라 산출한 R 관리도의 k_L 과 k_U 의 값은 <표 3>과 같다.

R 관리도의 관리도 상수 k_L 과 k_U 값을 계산하기 위해서는 부분군 표본 중에서 순서통계량의 최대치와 최소치에 대한 적률기대값, 그리고 최대치와 최소치 곱에 대한 적률기대값이 필요하다. 그러나 와이블분포를 제외한 비대칭 분포에 있어서 최대치와 최소치 곱에 대한 적률기대값을 계산할 수 없으므로 와이블분포에서 계산한 R 관리도 상수 k_L 과 k_U 값을 일반적인 분포에서도 대표값으로 사용한다.

4. 遂行度 評價

범위분할법이 실제 생산 현장에서 생산공정의 수준과 변동을 관리하는데 얼마나 잘 적용될 수 있는지를 알아보기 위하여 와이블분포에 대하여 Shewhart의 \bar{X} -R관리도와 가중분산법의 \bar{X} -R관리도를 몬테 칼로 시뮬레이션을 사용하여 비교하였다. 시뮬레이션은 PC에서 IMSL Library[8]를 이용

하여 수행되어 졌으며 크게 관리한계를 구하는 부분과, 구한 관리한계에 의하여 공정에 이상이 없을 경우의 합격률과 공정의 이상을 탐지할 검정력을 산출하는 부분으로 구성되어 졌다.

형상모수 β 와 표본수 n 을 입력받아 범위분할법을 이용해 관리한계 CL, UCL, LCL을 구하기 위한 프로시듀어(procedure)는 다음과 같다.

```

PROCEDURE Construction_of_Control_Chart
  ( $\beta, n$  ; Var CL, UCL, LCL)
  Evaluate_Control_Constant ( $\beta, n$  ; Var  $k_L, k_U, k_A$ );
  FOR i := 1 TO n_for_stability DO
    FOR j := 1 TO n_of_subgroup DO
      Weibull_Sample ( $\beta, n$  ; Var  $X_1, \dots, X_n$ );
      Sort_Data (Var  $X_1, \dots, X_n$ );
      Evaluate_Statistical_Data ( $X_1, \dots, X_n$  ;
        Var  $\bar{X}_j, R_j, RU_j, RL_j$ );
    END
    Average (n_of_subgroup,  $\bar{X}_j, R_j, RU_j, RL_j$  ;
      Var  $\bar{X}_i, \bar{R}_i, \bar{RU}_i, \bar{RL}_i$ );
  END

```

<표 3> 와이블분포의 R 관리도 상수

| 왜도 | | .00 | .50 | .75 | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 2.0 | 3.00 | 4.00 |
|-----|-------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|
| n=3 | k_L | 2.53 | 2.57 | 2.64 | 2.73 | 2.84 | 2.97 | 3.24 | 3.78 | 4.29 |
| | k_U | -.53 | -.57 | -.64 | -.73 | -.84 | -.97 | -1.24 | -1.78 | -2.29 |
| n=5 | k_L | 2.06 | 2.10 | 2.17 | 2.26 | 2.36 | 2.48 | 2.72 | 3.20 | 3.64 |
| | k_U | -.06 | -.10 | -.17 | -.26 | -.36 | -.48 | -.72 | -1.20 | -1.64 |
| n=7 | k_L | 1.87 | 1.90 | 1.97 | 2.06 | 2.16 | 2.27 | 2.50 | 2.94 | 3.33 |
| | k_U | .13 | .10 | .03 | -.06 | -.16 | -.27 | -.50 | -.94 | -1.33 |
| n=9 | k_L | 1.75 | 1.79 | 1.86 | 1.95 | 2.04 | 2.15 | 2.36 | 2.78 | 3.15 |
| | k_U | .25 | .21 | .14 | .05 | -.04 | -.15 | -.36 | -.78 | -1.15 |

```

Average (n_for_stability,  $\overline{X}_i, \overline{R}_i, \overline{R_U}, \overline{R}_L$  ;
          Var  $\overline{X}, \overline{R}, \overline{R_U}, \overline{R}_L$ );
Evaluate_Control_Limit(ku,kl,  $\overline{X}, \overline{R}, \overline{R_U}, \overline{R}_L$ ;
                      Var CL, UCL, LCL);

```

END

프로시듀어 Evaluate_Control_Constant에서는 β 와 n 을 입력받아 중앙치 및 범위관리도에 필요한 상수를 계산한다. 프로시듀어 Weibull_Sample에서는 와이불분포에서 n 개의 데이터를 추출하고 프로시듀어 Sort_Data를 통하여 크기 순으로 정렬시킨다. 프로시듀어 Evaluate_Statistical_Data에서는 정렬된 데이터들로부터 $\overline{X}, R, R_U, R_L$ 을 계산한다. $\overline{X}, R, R_U, R_L$ 을 각각 subgroup의 수만큼 계산하여 프로시듀어 Average를 통하여 평균을 구한다. 안정상태의 관리한계를 구하기 위하여 이와 같은 작업을 $n_{for_stability}$ 회 수행하여 프로시듀어 Average를 통하여 평균의 평균을 구한다.

완성된 관리도를 이용하여 합격률과 검정력을 산출하기 위한 프로시듀어는 다음과 같다.

```

PROCEDURE Utilization_of_Control_Chart
  ( $\alpha, \beta, \delta, n, UCL, LCL$  ; Var probability);
FOR i := 1 TO n_for_stability DO
  Weibull_Sample ( $\alpha, \beta, \delta, n$  ; Var  $X_1, \dots, X_n$ );
  Sort_Data (Var  $X_1, \dots, X_n$ );
  Evaluate_Statistical_Data
    ( $X_1, \dots, X_n$  ; Var  $\overline{X}_i, R_i$ );
  IF Check ( $\overline{X}_i, R_i, UCL, LCL$ ) =TRUE
    THEN count := count+1;

```

END

```

probability := count / n_for_stability;

```

END

프로시듀어 Weibull_Sample에서는 형상모수 β , 척도모수 α , 위치모수 δ 및 표본수 n 을 입력받아 표본을 추출한다. 이때 합격률을 구하기 위한 표본인 경우에는 관리도 구성에서 사용한 모수와 같은 모수를 사용하여 표본을 생성하고, 검정력의 계산을 위한 표본인 경우에는 관리도 구성에서 사용한 모수와는 다른 새로운 모수를 사용하여 표본을 생성한다. 생성된 표본을 프로시듀어 Sort_Data를 통하여 정렬하고, 프로시듀어 Evaluate_Statistical_Data에서는 중앙치 \overline{X}_i 및 범위 R_i 를 계산한다. 그리고 \overline{X}_i 와 R_i 가 관리도 내부 또는 외부에 존재하는지를 체크하여 count를 하나 증가시킨다. 이와 같은 작업을 $n_{for_stability}$ 회 수행하여 probability를 계산한다.

품질 특성치의 모집단이 위치모수가 0이고 형상모수가 1인 와이불분포의 왜도가 0에서부터 4까지 변할 때 Shewhart법, 가중분산법 그리고 범위분할법을 이용하여 표본수가 5일 때 구한 관리한계를 <표 4>에 제시하였다. <표 4>의 \overline{X} 관리도에서 보는 바와 같이 범위분할법의 관리한계가 가장 넓게 나타났으며 그 다음이 Shewhart법이고 가중분산법의 관리한계가 가장 좁게 나타나 있다. R 관리도의 관리한계를 살펴보면 \overline{X} 관리도에서와 비슷한 현상이 나타나고 있다. 그러나 R 관리도에서는 왜도가 4.0이 되면 가중분산법의 관리한계가 Shewhart법의 관리한계보다 넓어지고 있다. 그 이유는 가중분산법과 범위분할법이 관리한계를 설정하는데 왜도를 반영하고 있기 때문이다. 특히 범위분할법의 관리한계는

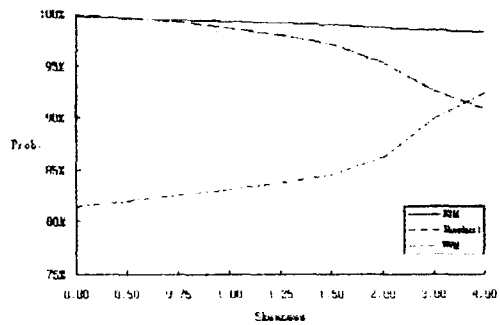
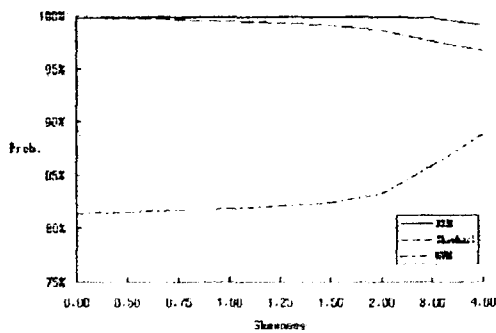
<표 4> 와이블분포에서 표본수가 5일 때 각 방법에 의한 관리한계

\bar{X} 관리도

| 왜도 | .00 | .50 | .75 | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 2.00 | 3.00 | 4.00 |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Shewhart법 | 1.28 | 1.45 | 1.56 | 1.67 | 1.79 | 1.92 | 2.21 | 2.88 | 3.63 |
| | .53 | .32 | .22 | .13 | .05 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 가중분산법 | 1.07 | 1.14 | 1.20 | 1.26 | 1.34 | 1.43 | 1.63 | 2.15 | 2.80 |
| | .74 | .64 | .60 | .56 | .53 | .50 | .45 | .34 | .23 |
| 범위분할법 | 1.36 | 1.64 | 1.82 | 2.00 | 2.19 | 2.39 | 2.80 | 3.63 | 4.44 |
| | .44 | .24 | .17 | .11 | .07 | .04 | .01 | .00 | .03 |

R 관리도

| 왜도 | .00 | .50 | .75 | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 2.00 | 3.00 | 4.00 |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| Shewhart법 | 1.37 | 2.07 | 2.44 | 2.82 | 3.20 | 3.60 | 4.43 | 6.25 | 8.23 |
| | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 가중분산법 | .96 | 1.47 | 1.78 | 2.11 | 2.48 | 2.89 | 3.81 | 6.07 | 8.85 |
| | .35 | .51 | .58 | .63 | .66 | .67 | .65 | .46 | .09 |
| 범위분할법 | 1.34 | 2.06 | 2.50 | 3.00 | 3.57 | 4.21 | 5.70 | 9.44 | 14.15 |
| | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |



\bar{X} 관리도

R 관리도

<도 2> 와이블분포에서 표본수가 5일 때 각 방법에 의한 합격률

왜도가 0.75이상이면 Shewhart법이나 가중분산법의 관리한계보다 넓게 나타나고 있다. 표본수가 각각 3, 5, 7, 9일 때에 범위분할법으로 구한 와이블분포의 관리한계가 부록 A에 수록되어 있다.

공정에 이상이 없을 경우의 합격률과 공정의 이상을 탐지할 검정력은 절충(trade-off) 관계에 있으므로 어느 한쪽이 크다고 반드시 좋은 관리도법이라고 할 수는 없다. 그러나 공정에 이상이 없을 경우의 합격률이 Shewhart의 3σ 원칙에 입각하여 왜도에 상관없이 99.73%정도라면 바람직하다고 하겠다. <도 2>에 모집단의 표본수가 5일 때의 합격률이 나타나 있다. <도 2>의 \bar{X} 관리도를 살펴보면 가중분산법의 합격률은 90%이하로써 가장 낮고 Shewhart법은 왜도가 0.75이하에서는 99.6% 이상으로 바람직하지만 왜도가 2.0이상인 경우에는 99%이하로 떨어지고 있다. 범위분할법의 합격률은 왜도가 3.0까지는 99.7%이상을 나타내고 있으며 그 이상의 왜도에서도 다른 방법에 비하여 가장 바람직하다고 하겠다.

R 관리도를 살펴보면 \bar{X} 관리도에서와 동일하게 가중분산법의 합격률이 왜도가 3.0이하인 구간에서는 90%이하로써 낮게 나타나고 있으며 Shewhart법의 합격률은 왜도가 1.0이상일 때는 99%이하로 떨어지며 특히 왜도가 3.0이상이면 93%이하로 떨어진다. 그러나 범위분할법의 합격률은 왜도에 관계없이 96%이상의 합격률을 나타내고 있다. 공정에 이상이 없을 경우의 합격률은 범위분할법이 왜도가 커지더라도 98%이상의 합격률을 나타내고 있으므로 가장 적합하다고 하겠다. 표본수가 각각 3, 5, 7, 9일 때에 범위분할법으로 구한 와이블분포의 합격률이 부록 B에 수록되어 있다.

공정의 이상을 탐지할 검정력을 산출하기 위하여 위치모수가 0에서 1로 변화했을 경우의 검정력과 형상모수가 1에서 2로 변화했을 경우의 검정력을 각 방법마다 각각의 왜도에 따라 구하였다. <표 5>에서 보는 바와 같이 위치모수가 0에서 1로 변화되면 분포의 모양은 변화가 없지만 중심이 이동되었으므로 \bar{X} 관리도에서는 관리한계 밖으로 타점되는 확률이 증가하지만 R 관리도에서의 타점들은 별다른 영향이 없다. \bar{X} 관리도에서 범위분할법의 검정력은 다른 방법보다 낮게 나타나고 있는데 왜도가 0인 경우에는 거의 100%이지만 왜도가 1이 되면 26%로 하락하며 왜도가 증가할수록 점점 낮아져서 4.0이 되면 1%의 검정력을 유지한다. 이와 같이 왜도가 증가할수록 검정력이 낮아지는 원인은 왜도가 증가하면 관리한계가 넓어지게 되어 공정에 이상이 없을 경우의 합격률은 99%로 높지만 반대로 검정력은 낮아진다. R 관리도에서는 위치모수가 변화하여 분포의 중심이 이동하였을 뿐이고 공정의 변동에는 변화가 발생한 것이 아니므로 검정력의 변화는 없게 된다. 표본수가 각각 3, 5, 7, 9일 때에 위치모수가 0에서 1로 변했을 경우의 범위분할법으로 구한 검정력이 부록 C에 수록되어 있다.

와이블분포의 형상모수가 1에서 2로 변화했을 경우의 검정력은 <표 6>에서 보는 바와 같다. 와이블분포에서 형상모수가 변화하면 평균과 분산이 동시에 변화되므로 \bar{X} 관리도와 R 관리도에 영향을 미치게 된다. \bar{X} 관리도에서 검정력을 살펴보면 왜도가 0인 경우에는 범위분할법이 92%, Shewhart법 98%, 가중분산법이 99%의 검정력을 나타내지만 왜도가 증가할수록 급격히 낮아진다. R 관리도에서 검

<표 5> 와이블분포에서 표본수가 5일 때 위치모수가 0에서 1로 변했을 경우의 검정력

\bar{X} 관리도

| 왜 도 | .00 | .50 | .75 | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 2.00 | 3.00 | 4.00 |
|-----------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Shewhart법 | 1.0000 | .9942 | .9392 | .8017 | .6266 | .4710 | .2767 | .1385 | .0991 |
| 가중분산법 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9991 | .9908 | .9561 | .7868 | .4207 | .2504 |
| 범위분할법 | .9999 | .8151 | .5028 | .2658 | .1403 | .0799 | .0341 | .0149 | .0103 |

R 관리도

| 왜 도 | .00 | .50 | .75 | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 2.00 | 3.00 | 4.00 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Shewhart법 | .0015 | .0041 | .0079 | .0138 | .0212 | .0296 | .0468 | .0747 | .0918 |
| 가중분산법 | .1857 | .1804 | .1745 | .1693 | .1626 | .1552 | .1836 | .1015 | .0722 |
| 범위분할법 | .0027 | .0045 | .0062 | .0081 | .0097 | .0113 | .0138 | .0167 | .0181 |

<표6> 와이블분포에서 표본수가 5일 때 형상모수가 1에서 2로 변했을 경우의 검정력

\bar{X} 관리도

| 왜 도 | .00 | .50 | .75 | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 2.00 | 3.00 | 4.00 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Shewhart법 | .9831 | .7945 | .6699 | .5661 | .4878 | .4284 | .3528 | .2799 | .2463 |
| 가중분산법 | .9987 | .9599 | .9091 | .8472 | .7847 | .7233 | .6176 | .4740 | .3861 |
| 범위분할법 | .9239 | .5429 | .3747 | .2648 | .1948 | .1490 | .1008 | .0623 | .0497 |

R 관리도

| 왜 도 | .00 | .50 | .75 | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 2.00 | 3.00 | 4.00 |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Shewhart 법 | .4154 | .4062 | .3999 | .3933 | .3870 | .3812 | .3703 | .3499 | .3331 |
| 가중분산법 | .7589 | .7382 | .7022 | .6586 | .6118 | .5645 | .4821 | .3678 | .3013 |
| 범위분할법 | .4437 | .4146 | .3760 | .3332 | .2946 | .2616 | .2131 | .1580 | .1290 |

정력은 왜도가 0인 경우 범위분할법의 검정력은 44%, Shewhart법 41%, 가중분산법은 76%를 유지한다. 그러나 왜도가 증가하면 \bar{X} 관리도와 유사하게 낮아진다. 표본수가 각각 3, 5, 7, 9일 때에 형상모수가 1에서 2로 변했을 경우의 범위분할법으로 구한 검정력이 부록 D에 수록되어 있다.

5. 結 論

본 연구에서는 생산공정에서 품질 특성치가 비대칭분포를 따를 때 공정의 수준과 변동을 동시에 관리할 수 있는 새로운 관리도를 개발하였다. 품질 특성치가 정규분포를 따른다면 Shewhart의 \bar{X} -R 관리도를 사용하여도 좋겠지만, 만약 품질 특성치가 비대칭분포를 따른다면 새로 제안한 범위분할법의 사용이 바람직하다. 또한 품질 특성치가 정규분포를 따른다고 하더라도 범위분할법을 사용하면 Shewhart형 \bar{X} -R를 사용한 결과와 동일하게 된다. 실제 생산현장에서 공정의 표본으로부터 추정된 왜도가 아주 작은 경우에는 Shewhart의 \bar{X} -R 관리도를 사용하고 왜도가 큰 경우에는 범위분할법을 사용하는 것이 좋을 것이다.

향후 다음과 같은 분야의 연구가 요구된다. 첫째, 관리도 상수(k_L , k_U) 계산에 있어서 Lieblein이 제안한 적률기대값에 대한 함수식을 이용함으로써 모든 왜도에 따른 관리도 상수를 계산할 수 있었다. 그러나 와이블분포 이외의 분포에 대한 적률기대값은 수표에 의하여 계산할 수밖에 없었으므로 한정된 왜도의 관리도 상수값만을 계산할 수 있었다. 특히

R 관리도의 관리도 상수(k_L , k_U)는 와이블분포만을 활용하여 계산하였다. 따라서 와이블분포 이외의 비대칭분포에 대하여도 모든 왜도에 따라 관리도 상수를 계산하는 연구가 필요하다.

둘째, \bar{X} 관리도는 왜도에 따라 서로 다른 관리상한과 관리하한을 사용하지만 R 관리도에서는 중심선으로부터 관리상한과 관리하한이 동일간격으로 비대칭 관리한계를 갖지 못한다. 물론 실제 문제에서 범위 R이 적다고 문제가 되는 것은 아니다. 그러나 이론상으로는 왜도에 따른 상이한 관리한계를 설정할 수 있도록 하기 위한 연구가 필요할 것이다.

參 考 文 獻

1. Abel, V., "Comment on : Control-Limits of QC Charts for Skewed Distributions Using Weighted-Variance", IEEE Transactions on Reliability, Vol. 38, No. 2, 265-265, 1989.
2. Burr, I. W., "The Effect of Non-Normality on Constants for \bar{X} and R Charts", Industrial Quality Control, Vol. 23, No. 11, 563-569, 1967.
3. Choobineh, F. and Ballard, J. L., "Control-Limits of QC Charts for Skewed Distributions Using Weighted Variance", IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-36, No. 4, 473-477, 1987.
4. Cowden, D. J., Statistical Methods in Quality Control, Prentice-hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 298-332, 700, 1957.
5. Ferrell, E. B., "Control Charts for Log-Normal

- Universes", *Industrial Quality Control*, Vol. 15, 4-6, 1958
6. Gupta, S. S., "Order Statistics from the Gamma Distribution ", *Technometrics*, Vol. 2, No. 2, 243-262, 1960.
 7. Gupta, S. S., McDonald, G. C. and Galameau, D. I., "Moments, Product Moments and Percentage Points of the Order Statistics from the Lognormal Distribution for Samples of Size Twenty and Less", *Sankhya, Series B*, Vol. 36, 230-269, 1974.
 8. IMSL Library, Reference Manual, International Mathematical and Statistical Libraries, Inc., Houston, TX, 1987.
 9. Krishnaiah, P. R. and Rizvi, M. H., " A Note on Moments of Gamma Order Statistics", *Technometrics*, Vol. 9, 315-318, 1967.
 10. Lieblein, J., "On Moments of Order Statistics from The Weibull Distribution", *Annals of Mathematical Statistics*. Vol. 2 6, 330-333, 1955.
 11. Nelson. P. R., "Control Chart for Weibull Processes with Standards Given", *IEEE Transaction on Reliability*. Vol. R-28, No. 4, 283-287, 1979.
 12. 최인수, " 표본의 왜도에 근거한 비모수적 관리도의 설계", 석사 학위 논문, 한국과학기술원, 1990.

부록

APPENDIX A. Control Limit of Weibull Distribution

\bar{X} chart of RSM

| skewness | .00 | .50 | .75 | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 2.00 | 3.00 | 4.00 |
|----------|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| n=3 | UCL 1.47 | 1.82 | 2.02 | 2.24 | 2.48 | 2.73 | 3.26 | 4.44 | 5.72 |
| | CL .90 | .87 | .85 | .84 | .84 | .83 | .84 | .87 | .91 |
| | LCL .33 | .08 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| n=5 | UCL 1.36 | 1.64 | 1.82 | 2.00 | 2.19 | 2.39 | 2.80 | 3.63 | 4.44 |
| | CL .90 | .86 | .84 | .82 | .81 | .80 | .79 | .78 | .78 |
| | LCL .44 | .24 | .17 | .11 | .07 | .04 | .01 | .00 | .03 |
| n=7 | UCL 1.30 | 1.54 | 1.69 | 1.85 | 2.01 | 2.18 | 2.52 | 3.17 | 3.77 |
| | CL .90 | .86 | .83 | .82 | .80 | .78 | .76 | .74 | .73 |
| | LCL .51 | .34 | .28 | .23 | .21 | .19 | .17 | .20 | .24 |
| n=9 | UCL 1.25 | 1.47 | 1.61 | 1.75 | 1.89 | 2.04 | 2.33 | 2.87 | 3.34 |
| | CL .90 | .85 | .83 | .81 | .79 | .77 | .75 | .71 | .69 |
| | LCL .55 | .40 | .35 | .31 | .29 | .27 | .27 | .29 | .33 |

R chart of RSM

| skewness | .00 | .50 | .75 | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 2.00 | 3.00 | 4.00 |
|----------|----------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|
| n=3 | UCL 1.20 | 1.84 | 2.23 | 2.65 | 3.13 | 3.67 | 4.89 | 7.94 | 11.72 |
| | CL .47 | .72 | .84 | .97 | 1.10 | 1.24 | 1.51 | 2.10 | 2.73 |
| | LCL .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| n=5 | UCL 1.34 | 2.06 | 2.50 | 3.00 | 3.57 | 4.21 | 5.70 | 9.44 | 14.15 |
| | CL .65 | .98 | 1.15 | 1.33 | 1.51 | 1.70 | 2.10 | 2.95 | 3.89 |
| | LCL .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| n=7 | UCL 1.40 | 2.16 | 2.64 | 3.19 | 3.80 | 4.51 | 6.16 | 10.38 | 15.76 |
| | CL .75 | 1.13 | 1.34 | 1.55 | 1.76 | 1.99 | 2.47 | 3.53 | 4.73 |
| | LCL .10 | .11 | .04 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| n=9 | UCL 1.45 | 2.23 | 2.73 | 3.31 | 3.96 | 4.72 | 6.48 | 11.05 | 16.95 |
| | CL .82 | 1.24 | 1.47 | 1.70 | 1.94 | 2.19 | 2.74 | 3.98 | 5.38 |
| | LCL .20 | .25 | .20 | .09 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |

APPENDIX B. Acceptance Probability in Normal Process of Weibull Distribution

\bar{X} chart of RSM

| skewness | .00 | .50 | .75 | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 2.00 | 3.00 | 4.00 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| n=3 | .9982 | .9985 | .9980 | .9976 | .9972 | .9968 | .9961 | .9952 | .9945 |
| n=5 | .9978 | .9983 | .9984 | .9985 | .9985 | .9984 | .9982 | .9975 | .9903 |
| n=7 | .9977 | .9977 | .9973 | .9965 | .9952 | .9930 | .9835 | .9294 | .8373 |
| n=9 | .9974 | .9966 | .9956 | .9938 | .9905 | .9841 | .9607 | .8669 | .7570 |

R chart of RSM

| skewness | .00 | .50 | .75 | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 2.00 | 3.00 | 4.00 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| n=3 | .9959 | .9943 | .9925 | .9907 | .9890 | .9873 | .9848 | .9818 | .9806 |
| n=5 | .9973 | .9955 | .9938 | .9919 | .9903 | .9887 | .9862 | .9833 | .9819 |
| n=7 | .9978 | .9956 | .9939 | .9922 | .9906 | .9890 | .9869 | .9835 | .9818 |
| n=9 | .9979 | .9956 | .9940 | .9926 | .9911 | .9898 | .9875 | .9842 | .9826 |

APPENDIX C. Power of Test in Abnormal Process of Weibull
Distribution (location parameter 0->1)

\bar{X} chart of RSM

| | .00 | .50 | .75 | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 2.00 | 3.00 | 4.00 |
|-----|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| n=3 | .9872 | .5407 | .2837 | .1496 | .0868 | .0562 | .0299 | .0157 | .0119 |
| n=5 | .9999 | .8151 | .5028 | .2658 | .1403 | .0799 | .0341 | .0149 | .0103 |
| n=7 | 1.0000 | .9478 | .7100 | .4127 | .2185 | .1179 | .0443 | .0160 | .0105 |
| n=9 | 1.0000 | .9899 | .8583 | .5724 | .3207 | .1704 | .0598 | .0185 | .0115 |

R chart of RSM

| | .00 | .50 | .75 | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 2.00 | 3.00 | 4.00 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| n=3 | .0041 | .0057 | .0075 | .0093 | .0110 | .0126 | .0152 | .0182 | .0194 |
| n=5 | .0027 | .0045 | .0062 | .0081 | .0097 | .0113 | .0138 | .0167 | .0181 |
| n=7 | .0022 | .0044 | .0061 | .0078 | .0094 | .0110 | .0131 | .0165 | .0182 |
| n=9 | .0021 | .0044 | .0060 | .0074 | .0089 | .0102 | .0125 | .0158 | .0174 |

APPENDIX D. Power of Test in Abnormal Process in Weibull
Distribution (scale parameter 1->2)

\bar{X} chart of RSM

| | .00 | .50 | .75 | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 2.00 | 3.00 | 4.00 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| n=3 | .8040 | .4176 | .2943 | .2165 | .1685 | .1370 | .0988 | .0665 | .0525 |
| n=5 | .9239 | .5429 | .3747 | .2648 | .1948 | .1490 | .1008 | .0623 | .0497 |
| n=7 | .9721 | .6485 | .4528 | .3136 | .2240 | .1670 | .1069 | .0752 | .0937 |
| n=9 | .9907 | .7358 | .5283 | .3649 | .2565 | .1853 | .1153 | .0842 | .1109 |

R chart of RSM

| | .00 | .50 | .75 | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 2.00 | 3.00 | 4.00 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| n=3 | .2863 | .2718 | .2525 | .2313 | .2115 | .1939 | .1661 | .1310 | .1098 |
| n=5 | .4437 | .4146 | .3760 | .3332 | .2946 | .2616 | .2131 | .1580 | .1290 |
| n=7 | .5688 | .5304 | .4738 | .4131 | .3584 | .3124 | .2458 | .1768 | .1423 |
| n=9 | .6687 | .6240 | .5550 | .4783 | .4120 | .3551 | .2747 | .1926 | .1530 |