韓國經營科學會誌
第21卷 第3號
1996年 12月

기계 고장을 고려한 생산 및 품질검증 정책†

이창환*

Lot Sizing and Quality Inspection Schedules with Machine Breakdown†

Chang Hwan Lee*

Abstract

This paper addresses the effects of an imperfect production process on the optimal production quantity and quality inspection policies. The system is assumed to deteriorate during the production process. The results are either the production of a number of defective items or the breakdown of the production machine. A simple rule has been suggested to determine whether multiple quality inspection is worth or not. Furthermore, when multiple inspection policy is adopted, the optimal inspection schedule is shown to be equally spaced throughout the production cycle. Exact solution and approximation of the optimal production quantity and approximation of the optimal number of inspection are provided. Finally, to better understand the model of this paper, comparisons between this model and classical EMQ model are provided.

1. 서 론

최근 고전적 재고모형 (EMQ, EOQ)의 비현실적 가정을 보완한 연구가 활발히 진행되고 있다. Yao and Klein [21]은 변수의 연속적 변동을 수용한 모형을 분석하였으며, Lev and Weiss [12], Weiss and Rosenthal [20]등은 변수의 비연속적 변동을 수용할 수 있는 모형을 연구하였다. Muth and Spremann [13]은 생산비용이 학습효과를 보여 주는 모형을 고려하였으며, Karwan, Mazzola and Morey [9]와 Chand [3] 등은 준비기간이 학습효과를 보이는 모형을 연구하였다. Porteus [15]는 JIT

* 아주대학교 경영학과
†본 연구는 대우재단 특별연구비 지원으로 이루어졌음.

생산 방식의 준비 단축 (setup reduction)프로그램을 고려하여, 준비 시간을 의사결정 변수화 하였으며, Porteus [16] 및 Cheng [4] 등은 생산과정의 준비기간 단축 및 품질 향상 프로그램을 고려한 모형을 분석하였으며, Fine and Porteus [6]는 [16]을 확장하여 다단계 정책을 분석하였다.

본 논문은 이러한 연구 추세의 일환으로 생산과정의 불확실성을 고려한 EMQ모형을 분석하였다. 현실면에서 볼 때 생산과정은 여러 가지 불확실성을 지닐 수 있다. 예컨대 생산이 진행됨에 따라 불량품을 생산 할 수 있으며, 갑작스러운 기계 고장으로 중단 될 수도 있다. Groenevelt, Pintelon and Seidmann [7]은 고장으로 생산이 중단될 수 있으며, 고장이 발생하기 까지의 경과시간이 지수분포인 생산시스템의 최적 생산정책을 분석하였다. Groenevelt et al. [7]에서는 고장을 일으킨 기계의 수리기간이 무시할 만큼 짧다고 가정한데 반해 그들의 또 다른 논문 [8]에서는 무시할 수 없으며, 임의의 확율 분포를 지닌다고 가정하였다. 또한 재고를 수리기간의 수요를 충족하기 위한 안전재고와, 일반수요를 충족하기 위한 재고로 나누어 모형을 분석하였다.

Groenevelt et al. 이 생산시스템의 신뢰도 측면을 고려한데 반해 Porteus [16]와 Rosenblatt and Lee [19]는 생산과정의 품질측면을 고려하였다. [16]와 [19]는 생산과정이 양품을 생산하는 정상 과정에서 시작하여 생산이 진행됨에 따라 차츰 퇴화하여 불량품을 생산하는 단계에 진입한다는 가정하에서 생산정책 및 품질향상 정책을 분석하였다. Rosenblatt and Lee [18]과 Lee and Rosenblatt [10]는 [19]를 확장하여 n번의 품질검증을 통해 불량품 생산 상태를 포착할 수 있으며, 비정상 상태가 감지될 경우 정상상태로 수정할 수 있다는 가정하에서 생산 및 품질검증 정책을 분석하였다. Porteus [17]는 [10]을 확장하여 품질검증의 결과를 얻는데 시간적인 지연 현상이 있는 경우를 고려하였다. Lee and Rosenblatt [11]는 [10]을 확장하여 불량품을 생산하는 상태에서 양품을 생산하는 상태로 수정하는 비용이 불량품 생산 단계에 들어선 후의 경과 시간의 함수관계라는 가정하에서 모형을 분석하였다. 이외에도 함주호, 김승한, 이건호 [1]는 철강이나 유리제품의 성형공정 등의 경우 가동준비가 끝난 후에도 공정변수 등의 조정으로 안정화 기간을 두는 개념을 도입하여 생산정책을 분석하였다. 따라서 기존 모형들이 정상에서 비정상으로 생산과정이 진행된다고 가정한데 반해 [1]에서는 안정화 기간을 거쳐 비정상에서 정상으로 진행한다고 가정하였다.

본 연구는 위에서 서술한 두 가지 불확실성을 모두 지닌 생산 시스템의 생산 및 품질 검증 정책에 대해 알아 보았다. 연구 논문의 전개는 불량품을 고려한 생산량 및 품질검증 정책에 관한 Lee and Rosenblatt [10]의 논문과 기계고장을 고려한 생산정책에 관한 Groenevelt et al. [7]의 논문에 바탕을 두고 있다. [10]은 생산과정의 불량품 생산가능성 (품질측면)을 재고모형에 도입하여 생산시스템의 운행결과 (1) 전수 양품 생산 또는 (2) 일부 불량품 생산 등 두가지 상태를 보여 주고 있으며, 반대로 [7]은 생산과정의 고장에 인한 생산중단 가능성 (신뢰도 측면)을 재고모형에 도입하여 (1) 목표생산량 달성, (2) 기계고장에 인한 목표생산량 미달 등 두 가지 상태를 보여준다. 본 논문은 품질측면과 신뢰도 측면을 모두 고려한 생산시스템의 재고관리 모형이므로 운행 결과 (1) 전수 양품으로 목표생산량 달

성, (2) 일부 불량품으로 목표생산량 달성, (3) 전수 양품, 기계고장으로 목표생산량 미달, (4) 일부 불량품으로 목표생산량 미달 등 네 가지 상태를 보여준다. 또한 모형의 특성상 위에서 서술한 두 가지 불확실성을 모두 지니므로 기존의 모형에서 얻은 결론과 다소 다른 결과를 얻을 수도 있다. 예를 들어 [16]와 [19]에서는 불량품 생산의 가능성이 커질 수록 최적 생산량이 작아진다는 결론을 얻었는데 반해 본 연구에서는 기계고장의 확율이 커질 수록 (신뢰도가 낮아질 수록) 최적생산량이 커진다는 결과를 얻게 되어 불량품 생산가능성이 커진다고 최적생산량이 꼭 작아지지 만은 않는다는 결론을 얻을 수 있었다.

연구 논문은 다음과 같은 순서로 진행되었다. 2장에서는 모형의 가정을 설명하였으며, 3장에서는 모형에 사용되는 기호 와 비용 함수의 기대치 및 최적 품질 검증 계획을 알아보았다. 4장에서는 최적 생산 정책 및 품질 검증 횟수, 5장에서는 고전적 경제적 생산량 모형과의 관계를 설명하였다. 마지막으로 6장에서는 요약 및 향후 연구 방향에 대하여 서술하였다.

2. 모형의 가정

생산 준비 (setup)에 소요되는 시간이 아주 적어, 특별히 고려할 필요가 없으며, 부 재고의 가능성을 배제한다. 또한 생산 시스템은 단일 제품만을 취급하며, 수요 율 및 생산 율은 일정하며, 확정적이라 가정한다.

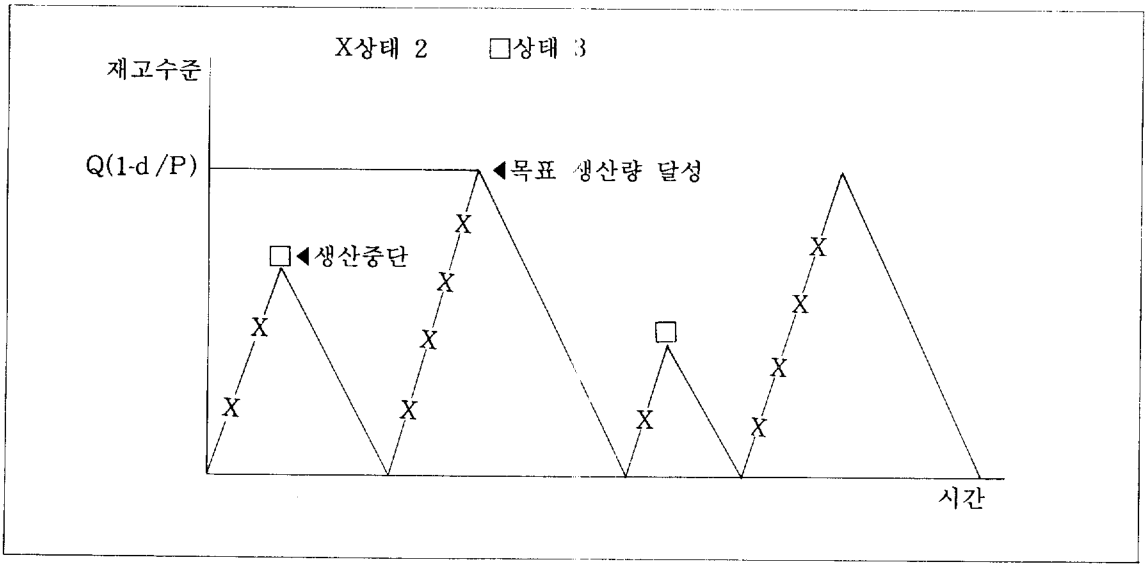
2.1. 불량품 생산에 관한 가정

생산 시스템은 준비 작업(setup)을 거쳐 "정상" 상태 (상태 1이라 지정한다.) 에서 가동하기 시작하며, 규격에 적합한 제품을 생산한다. 생산기간이 경과함에 따라 생산과정은 차츰 둔화하여, 어느 시점에 이르러서는 "비 정상" 상태 (상태 2)에 진입하여 일정 비율의 불량품을 제조하기 시작한다. 이와 유사한 가정은 Rosenblatt and Lee [18,19], Lee and Rosenblatt [10,11] 등에서 적용되었다. 상태 2가 발생하는데 경과하는 시간은 확률적이며, 지수 분포를 따른다. 이러한 가정은 Chiu [5], Rosenblatt and Lee [18,19], Lee and Rosenblatt [10, 11] 등에서 사용 된 바 있다. 기계 고장으로 생산 계획이 중단되지 않는 한 최대 $n \geq 1$회의 품질 검증이 이루어 지며, 최종 품질 검증은 목표 생산량이 달성된 시점에서 이루어 진다. 반대로 기계 고장으로 목표 생산량을 달성할 수 없을 경우에는 n 보다 적은 횟수의 품질 검증이 이루어질 수 있으며, 최종 검증 시기는 생산이 중단된 시점에서 이루어 진다. 품질 검증 결과 상태2 가 감지될 경우 생산과정은 즉시 상태 1로 수정되며, 기계 고장으로 생산이 중단될 경우 또는 목표 생산량 달성이 있기 전 까지는 생산이 계속 진행된다. 품질 검증은 효과적으로 이루어져 상태를 잘못 파악할 가능성은 없으며, 품질 검증의 결과는 즉시 얻을 수 있다고 가정한다. 따라서 위에서 서술한 상태 2에 관한 가정은 Lee and Rosenblatt [10]과 일치한다.

2.2. 생산 중단에 관한 가정

본 모형에서 고려되는 두 번째 불확실성은 고장에 인한 생산 중단 (상태 3)이다. 2.1절에서 서술한 상태 2와 본 절에서 설명하는 상태 3은 각기 독립적 현상이다. 따라서 상태 3이

발생하기 직전 생산과정은 상태 2에 있을 수 있으며, 또한 상태 1에 있을 수도 있다. 이 와 유사한 가정은 Pate-Cornell, Lee and Tagaras [14]의 기계 점검과 보수 (inspection and maintenance)모형에서 적용되었다. 이 외에도 기계 고장에 인한 생산 중단을 고려한 재고 모형으로 Bielecki and Kumar [2], Groenevelt, Pintelon and Seidmann [7,8] 등이 있다. 구체적으로 상태 3은 다음과 같은 특성을 지닌다. 생산 기계는 상태 1에서 생산을 시작한다. 일정 기간이 경과 한 후 생산과정은 고장으로 계획 생산량에 미달된채 가동을 중단(상태 3) 할 수 있다. 고장을 일으킨 기계는 즉시 보수 단계에 들어 가며, 보수기간은 무시할 만큼 짧다. 차기 생산은 전기에 생산된 재고가 완전히 고갈된 후에야 시작된다. 상태 3이 발생하는데 경과하는 시간은 확률적이며, 지수 분포를 따른다. 이러한 가정은 Groenevelt, Pintelon and Seidmann [7]에서 적용된 바 있다. 위에서 설명한 상태 2와 상태 3은 그림 (1)로 설명할 수 있다. 그림 (1)에서 X는 상태 2의 발생을 의미하며 □는 상태 3의 발생을 의미한다.



〈그림 1〉 생산 계획의 수행 예(시간 대비 재고 수준)

3. 모 형

모형에 사용되는 기호는 다음과 같다.

d, P, h, S: 수요율, 생산율, 단위 당 단위기간 재고유지 비용, 1회 준비 비용

r : 상태 2의 수정 비용

M: 상태 3의 보수 비용

V : 1회 품질 검증 비용

Q : 계획 생산량

T_i: i 번째 품질 검증 시점

θ_i : $\theta_i = T_{i+1} - T_i$; $i+1$과 i번째 품질 검증간의 시간 간격

t : 확률 변수, 상태 3이 발생하는데 경과하

는 시간

τ : 확률 변수, 상태 2가 발생하는데 경과하는 시간

$g(\tau)$: τ의 밀도 함수, 평균 $1/\lambda_1$인 지수 분포

$f(t)$: t의 밀도 함수, 평균 $1/\lambda_2$인 지수 분포

λ : $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$

α : 상태 2에서의 불량률

K: 단위 당 불량품 재가공 처리 비용

E^{-a}: $E^{-a}=1-e^{-a}$

3.1. 총 비용 기대치의 일반형

본 절에서는 g, f에 대한 특정 형식의 분포를 가정하지 않은 상태에서 총 비용의 기대치를 알아 본다. 총비용은 재고 유지, 준비, 품질 검증, 상태 2의 수정, 상태 3의 보수, 및 불량품 처리 비용으로 구성된다. 우선 재고 유지, 생산 준비 및 상태 3의 보수 비용의 기대치는 Groenevelt, Pintelon and Seidmann [7]로 부터 얻을 수 있다.

$$\int_0^\infty E(cost\ per\ cycle\ 1|t)f(t)dt$$
$$=\int_0^{Q/P}\left(S+M+\frac{1}{2}h(P-d)\frac{P}{d}t^2\right)f(t)dt$$
$$+\int_{Q/P}^\infty\left(S+\frac{1}{2}h\frac{(P-d)}{Pd}Q^2\right)f(t)dt$$
$$=S+MF\left(\frac{Q}{P}\right)+\left[\frac{1}{2}h(P-d)\frac{P}{d}\left(\left(\frac{Q}{P}\right)^2\left(1-F\left(\frac{Q}{P}\right)\right)+\int_0^{Q/P}t^2f(t)dt\right)\right] \quad (1)$$

위 식의 첫 부분은 (0, Q/P)내에 상태 3이 발생할 경우의 기대 비용, 뒷부분은 상태 3이 발생하지 않아 계획 생산량을 달성할 경우의 기대 비용을 뜻한다. 다음으로 불량품 처리 및 상태 2 의 수정 비용 기대치를 알아 본다. 우선 (T_j, T_{j+1})내에서 상태 3이 발생한다고 가정하면, 불량품 생산량과 수정 횟수의 조건부 기대치는 다음과 같다.

불량품 생산량+수정 횟수

$$=\alpha P\left(\sum_{k=0}^{j-1}\int_0^{0_k}(0_k-\tau)g(\tau)d\tau+\int_0^{t-T_j}(t-T_j-\tau)g(\tau)d\tau\right)+\left(\sum_{k=0}^{j-1}\int_0^{0_k}g(\tau)d\tau+\int_0^{t-T_j}g(\tau)d\tau\right)$$ [1)]

따라서, 불량품 처리, 품질 검증 및 수정 비용은 다음과 같이 된다.

$$\int_0^\infty E(cost\ per\ cycle\ 2|t)f(t)dt$$
$$=\int_{Q/P}^\infty\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(K\alpha P\int_0^{0_k}(0_k-\tau)g(\tau)d\tau+r\int_0^{0_k}g(\tau)d\tau\right)+nV\right]f(t)dt$$
$$+\sum_{j=0}^{n-1}\int_{T_j}^{T_{j+1}}\left[K\alpha P\left(\sum_{k=0}^{j-1}\int_0^{0_k}(0_k-\tau)g(\tau)d\tau+\int_0^{t-T_j}(t-T_j-\tau)g(\tau)d\tau\right)\right.$$
$$\left.+r\left(\sum_{k=0}^{j-1}\int_0^{0_k}g(\tau)d\tau+\int_0^{t-T_j}g(\tau)d\tau\right)+jV\right]f(t)dt \quad (2)$$

식 (2)는 (0, Q/P)내에 상태 3이 발생할 경우의 기대 비용, 계획 생산량을 달성할 경우의 기대 비용으로 구성된다.

다음으로 재고 주기의 기대치를 알아 본다. 재고 주기의 기대치는 Groenevelt, Pintelon and Seidmann [7]로 부터 얻을 수 있다.

$$\int_0^\infty E(Duration\ per\ cycle|t)f(t)dt$$
$$=\int_0^{Q/P}\frac{P}{d}tf(t)dt+\int_{Q/P}^\infty(Q/d)f(t)dt \quad (3)$$

1) 위에서 서술된 기대치는 Lee and Rosenblatt(1987)의 모형에 상태 3의 발생 가능성을 고려하여 모형화 한 형식이다.

따라서 기간 평균 비용의 기대치는 renewal reward이론에 근거하여 식 (4)와 같이 된다.

$$C(Q)=\frac{(1)+(2)}{(3)} \tag{4}$$

3.2. 지수 분포 가정하에서의 기대 비용

g, f의 분포를 지수 분포로 가정할 경우 식 (3)의 기대치는 식 (5)가 된다.

$$=\left(\frac{P}{d}\right)\int_0^{Q/P} t\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}dt + \left(\frac{Q}{d}\right)\left(1-F\left(\frac{Q}{P}\right)\right)=\frac{P}{d\lambda_2}\mathrm{E}^{-\lambda_2 Q/P} \tag{5}$$

식 (1)의 기대치는 식 (6)이 된다.

$$=S+M\mathrm{E}^{-\lambda_2 Q/P} + \frac{h(P-d)P}{d\lambda_2^2}\left(\mathrm{E}^{-\lambda_2 Q/P}-\frac{\lambda_2 Q}{P}\; e^{-\lambda_2 Q/P}\right) \tag{6}$$

식 (2)는 $t_j=t-T_j$로 한 후 식 (7)이 된다.

$$=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(K\alpha P\left(\theta_k-\frac{1}{\lambda_1}\mathrm{E}^{-\lambda_1\theta_k}\right)+r\mathrm{E}^{-\lambda_1\theta_k}\right)+V\right)e^{-\lambda_2 Q/P}$$
$$+\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^{\theta_j}\left[K\alpha P\left(\sum_{k=0}^{j-1}\left(\theta_k-\frac{1}{\lambda_1}\mathrm{E}^{-\lambda_1\theta_k}\right)+\left(t_j-\frac{1}{\lambda_1}\mathrm{E}^{-\lambda_1 t_j}\right)\right)+Ve^{\lambda_2 t_j}+r\left(\sum_{k=0}^{j-1}\mathrm{E}^{-\lambda_1\theta_k}+\mathrm{E}^{-\lambda_1 t_j}\right)\right]\lambda_2 e^{-\lambda_2(t_j+T_j)}dt_j \tag{7}$$

따라서 의사결정자는 $((6)+(7))/(5)$를 최소로 하는 품질검증 횟수(n^*), 품질검증 시점 (T_i^*`s) 및 생산량 ($Q^*$)을 결정하게 된다. 여기서 임의의 $(n,Q)$가 주어졌을 경우, 품질검증 정책은 품질검증 시점하고만 관련된다. 따라서 식(5)와 (6)과는 무관하며, 식 (7)과 연관되므로, 식 (7)을 최소로 하는 의사결정 변수 $T_i$`s를 결정하게 된다. 다음 명제 1은 품질검증 횟수가 주어졌을 경우 임의의 생산 기간$(0,Q/P)$ 내의 기대 비용을 최소화하는 품질 검증 시점에 관하여 서술하였다.

명제 1. (n,Q)가 주어졌을 경우 임의의 기간 $(0, T_j)$내의 기대 비용을 최소화하는 품질 검증 계획은

(1) $K\alpha P-r\lambda_1\leq 0$일 경우
$T_1=T_2=\ldots=T_{j-1}=0$, T_j는 첫번 째 품질 검증 시점이 되며,

(2) $K\alpha P-r\lambda_1>0$일 경우
$\theta_1=\theta_2=\ldots=\theta_{j-1}=\theta=T_j/j$가 된다.

따라서 생산기간 $(0, Q/P)$내의 기대 비용을 최소화하는 품질 검증 간격은 Q/P를 균등하게 나눈 $\theta^*=Q/Pn$이 된다.

증명. $(0,T_j)$내의 품질 검증 계획과 관련된 부분은 $G(\theta_k)=(r-K\alpha P/\lambda_1)\sum_{k=0}^{j-1}\mathrm{E}^{-\lambda_1\theta_k}$이다. 따라서 품질검증 계획은 $\min_{\theta_k}G(\theta_k)$로 얻을 수 있다. 명제 1에서 제시된 품질 검증 계획은 위 식을 최소화하는 품질 검증 계획이며, Lee and Rosenblatt [10]의 Proposition 1, 2와 유사한 방법으로 증명할 수 있다. (증명의 outline은 부록 (1)을 참조하시기 바란다.) □

명제 1에서 서술된 첫째 조건 $K\alpha P-r\lambda_1\leq 0$은 상태 2에서 발생하는 불량품 처리 비용이 상태 2의 수정 비용 보다 적음을 뜻하며, 따라서 $T_1=T_2=\ldots=T_{j-1}=0$,란 품질 검증을 하지 않은 체 불량품을 계속 생산하도록 방치한다는 뜻을 의미 한다. 명제 1 과 식 (5), (6), (7)에 따라 기간 평균 비용의 기대치는 다음과 같이 된다. (부록 (2) 참조 바람)

$K\alpha P-r\lambda_1>0$일 경우,

$$C(Q,n)=\frac{d\lambda_2}{P}\left(\frac{S}{\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta n}}+\frac{Ve^{-\lambda_2\theta}}{\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}}\right)+\frac{d\lambda_2 M}{P}$$
$$+\frac{h(P-d)}{\lambda_2}\left(1-\frac{\lambda_2\theta ne^{-\lambda_2\theta n}}{\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta n}}\right)$$
$$+K\alpha d+\frac{\mathrm{E}^{-\lambda\theta}(r\lambda_1/P-K\alpha)d\lambda_2}{\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}\lambda} \quad (8)$$

$K\alpha P-r\lambda_1\leq 0$일 경우,

$$C(Q)=\frac{d\lambda_2\left(S+Ve^{-\lambda_2\theta}\right)}{P\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}}+\frac{d\lambda_2 M}{P}$$
$$+\frac{h(P-d)}{\lambda_2}\left(1-\frac{\lambda_2\theta e^{-\lambda_2\theta}}{\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}}\right)$$
$$+K\alpha d+\frac{\mathrm{E}^{-\lambda\theta}(r\lambda_1/P-K\alpha)d\lambda_2}{\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}\lambda} \quad (9)$$

4. 최적 생산 정책

의사 결정자는 식 (9)에서 최적 생산량 Q^*, 식 (8)에서 Q^* 및 최적 품질 검증 횟수 n^*을 결정한다.

4.1. n=1 일 경우

우선 $K\alpha P-r\lambda_1\leq 0$을 가정한다. 식 (9)를 Q에 대해 미분하여 식 (10)을 얻었다.

$$\frac{\partial C(Q)}{\partial Q}=\frac{\lambda_2}{P}\frac{e^{-\lambda_2\theta}}{\left(\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}\right)^2}\left[\frac{-d\lambda_2(S+V)}{P}\right.$$
$$+\frac{h(P-d)}{\lambda_2}\left(\lambda_2\theta-\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}\right)$$
$$\left.+d\left(\frac{r\lambda_1}{P}-K\alpha\right)\left(e^{-\lambda_1\theta}\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}-\frac{\lambda_2}{\lambda}\mathrm{E}^{-\lambda\theta}\right)\right] \quad (10)$$

따라서 최적 생산량은 식 (11)을 충족하는 Q^*가 된다.

$$\frac{-d\lambda_2(S+V)}{P}+\frac{h(P-d)}{\lambda_2}\left(\lambda_2\theta-\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}\right)$$
$$+d\left(\frac{r\lambda_1}{P}-K\alpha\right)\left(e^{-\lambda_1\theta}\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}-\frac{\lambda_2}{\lambda}\mathrm{E}^{-\lambda\theta}\right)=0 \quad (11)$$

식 (11)의 왼편항을 보면, Q가 0에 접근할 경우 음값을 지니게 되며, Q가 무한대에 접근할 경우 양값을 지니게 됨을 알 수 있다. 또한 (11) 식을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\mathrm{Z}_1\left(\lambda_2\theta+e^{-\lambda_2\theta}\right)+\mathrm{Z}_2\left(e^{-\lambda_1\theta}\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}+\frac{\lambda_2}{\lambda}e^{-\lambda\theta}\right)$$
$$=\mathrm{Z}_1+\frac{\lambda_2}{\lambda}\mathrm{Z}_2+\mathrm{Z}_3 \quad (11.1)$$

여기서 $\mathrm{Z}_3=d\lambda_2(S+V)/P$, $\mathrm{Z}_1=h(P-d)/\lambda_2$, $\mathrm{Z}_2=d(r\lambda_1/P-K\alpha)$, 이다. 왼편항을 Q로 미분하면 $h(P-d)-e^{-\lambda_1\theta}\lambda_1 d(r\lambda_1/P-K\alpha)>0$ 임을 알 수 있다 (위 식이 양(+)값을 취하게 됨은 명제 (2.3)의 증명을 참조하시기 바람). 따라서 (11)에 대한 유일한 최적해가 존재함을 알 수 있다. 명제 2는 최적 생산 정책의 특성에 관하여 서술하였다.

명제 2.

(2.1) λ_1,λ_2가 아주 작을 경우 최적 생산량은 다음과 같이 근사화 할 수 있으며,

$$Q^*\cong\sqrt{\frac{2d(S+V)P}{h(P-d)+(K\alpha-r\lambda_1/P)d\lambda_1}} \quad (12)$$

Lee and Rosneblatt [10]의 식 (8) (최적 생산량에 관한 식)과 일치한다.

(2.2) $\lambda_1,\lambda_2\downarrow 0$할 경우

$C(Q)\rightarrow d(S+V)/Q+h(P-d)Q/2P$

되며 이는 전통적 EMQ 모형의 비용 함수에 1회의 품질검증 비용을 추가한 경우다. 따라서 $Q^*\rightarrow\sqrt{2d(S+V)P/h(P-d)}$ 된다. 이 경우 불량품 생산량이 극히 적어 품질 검증을 하지 않

을 수 도 있으므로 V항목은 취소되어, 고전적 EMQ 모형과 일치 하게 된다.

(2.3) 최적 생산량을 도입한 비용 함수는 다음과 같으며,

$$C(Q^*) = \frac{h(P-d)Q^*}{P} + K\alpha d - \frac{(K\alpha P - r\lambda_1)d}{P} e^{-\lambda_1 \theta^*} + \frac{d\lambda_2}{P}(M-V) \quad (13)$$

$h(P-d) > (r\lambda_1/P - K\alpha)d\lambda_1$일경우 $C(Q^*)$는 Q^*의 증가 함수이다.

(2.4) $h(P-d) > (r\lambda_1/P - K\alpha)d\lambda_1$일 경우 Q^*는, λ_1, λ_2의 증가 함수, 추가로 $M \geq V$일 경우 $C(Q^*)$는 λ_2의 증가 함수이다.

명제(2.1): (11)식은 구조상 복잡하므로 Q^*를 얻기가 쉽지 않다. λ_1, λ_2가 아주 작을 경우 테일러 (Taylor) 2차 근사치 $e^{-a} \cong 1 - a + a^2/2$를 (11)식에 적용하여 최적 해의 근사치를 얻을 수 있다. 이러한 접근법은 [10,18,19]등에서 사용된 바 있다. 근사화를 거쳐 식 (14)를 얻었다.

$$\lambda_2\left[\frac{-dS}{P} + \frac{h(P-d)Q^2}{2P^2} - \frac{(r\lambda_1/P - K\alpha)d\lambda_1 Q^2}{2P^2}\right] = 0 \quad (14)$$

식 (12)는 식 (14)로 부터 얻을 수 있다. 식 (14)에서 $h(P-d) \leq (r\lambda_1/P - K\alpha)d\lambda_1$일 경우, $Q^* \to \infty$되므로, 이 경우를 제외한 최적 생산량은 식 (12)로 근사화 할 수 있다. 위에서 서술한 조건은 명제 (2.3)에서 다시 적용된다. 식 (12)에서 $|K\alpha - r\lambda_1/P|$이 상대적으로 크면 클수록 불량품에 대한 부담이 적으므로 Q^*는 커진다.

명제(2.2): 테일러 근사치를 식 (9)에 적용하여 다음과 같은 근사값을 얻었다.

$$C(Q) \cong \frac{d\left(S + V\left(1 - \lambda_2\theta + (\lambda_2\theta)^2/2\right)\right)}{\theta P(1 - \lambda_2\theta/2)} + \frac{d\lambda_2 M}{P} + \frac{h(P-d)}{2}\left(\frac{\theta - \lambda_2\theta^2}{1 - \lambda_2\theta/2}\right) + K\alpha d + d\left(\frac{r\lambda_1}{P} - K\alpha\right)\frac{1 - (\lambda\theta/2)}{1 - (\lambda_2\theta/2)} \quad (15)$$

따라서 $\lambda_1, \lambda_2 \downarrow 0$할 경우에는 명제 (2.2)에서 서술한 결과를 얻을 수 있다.

명제(2.3): 식 (13)의 도출 과정은 부록 (3)을 참조 하기 바란다. 식 (13)을 Q에 대해 미분한 후 명제 (2.1)에서 제시된바와 같이 $h(P-d) > (r\lambda_1/P - K\alpha)d\lambda_1$을 적용하여 식 (16)을 얻었다.

$$C'(Q) = \left(h(P-d) - (r\lambda_1/P - K\alpha)d\lambda_1 e^{-\lambda_1\theta}\right) > 0 \quad (16)$$

따라서 $C(Q^*)$는 Q^*의 증가 함수이다.

명제(2.4): λ_1과 Q^*과의 관계는 식 (12)에 따라 얻을 수 있다. 식 (11)을 λ_2에 대해 미분하여 식 (17)을 얻었다. (부록 (4) 참조 바람)

$$\frac{Q'\lambda_2}{P}\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}(\Omega_1 - \Omega_2 e^{-\lambda_1\theta}) = \frac{\Omega_2\lambda_2(1 - e^{-\gamma} - \gamma e^{-\gamma})}{\lambda_2} + \frac{\Omega_1\left((2+\alpha)e^{-\alpha} + \alpha - 2\right)}{\lambda_2} + \Omega_2\left(\frac{e^{-\beta}}{\lambda_1} - \frac{e^{-\gamma}}{\lambda} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1\lambda}\right) \quad (17)$$

위 식의 각 구성 기호는 다음과 같다.

$\alpha = \lambda_2 Q^*/P$, $\beta = \lambda_1 Q^*/P$, $\gamma = \lambda Q^*/P$,

$\Omega_1 = h(P-d)$, $\Omega_2 = d\lambda_1(r\lambda_1/P - K\alpha)$.

$\Omega_1 > \Omega_2$일 경우 식 (17)의 왼편 항목 중 Q'을 재외한 부분은 양(+)값을 지니게 된다. 따라

서 Q'는 식 (17)의 바른편에 따라 음(−), 양(+)기호가 결정된다. 식 (17)의 바른편을 $G(\gamma)$라고 한다. $\alpha, \beta \geq 0$이므로 $\gamma=0 \Rightarrow \alpha=0$, $\beta=0$이 된다. 또한 식 (11)에 L'Hopital 법칙을 적용하면 $\gamma \downarrow 0 \Rightarrow \lambda_2 \downarrow 0$가 됨을 알 수 있다. 따라서 $\lim_{\gamma \to 0} G(\gamma)=0$을 얻을 수 있다. G를 γ에 대해 미분하여,

$$G'(\gamma)=\Omega_1(1-e^{-\alpha}-\alpha e^{-\alpha})/\lambda_2 +\Omega_2(e^{-\gamma}/\lambda-e^{-\beta}/\lambda_1)+\Omega_2\gamma e^{-\gamma}\lambda_2/\lambda^2,$$

$\lim_{\gamma \to 0} G'(\gamma)=0$를 얻었다. 다시 G'를 γ에 대해 미분하여,

$$G''=\Omega_1\alpha e^{-\alpha}/\lambda_2+\Omega_2(e^{-\beta}/\lambda_1-e^{-\gamma}/\lambda) +\Omega_2(1-\gamma)e^{-\gamma}\lambda_2/\lambda^2,\ \lim_{\gamma \to 0} G''(\gamma)=0,$$

$$G'''(\gamma)=\left(\Omega_1 e^{-\alpha}-\Omega_2 e^{-\gamma}(\lambda_2/\lambda)^2\right)/\lambda_2-G''(\gamma)$$를 얻었다. $G''(\gamma)<0$로 가정하면 $\Omega_1>\Omega_2$와 더불어 $G'''(\gamma) \geq 0$이 된다. $G'''(\gamma) \geq 0$, $\lim_{\gamma \to 0} G''(\gamma)=0$는 $G''(\gamma) \geq 0$을 의미한다. 따라서 $G''(\gamma)<0$와 모순된다. 그러므로 $G''(\gamma) \geq 0$만이 가능하다. $G''(\gamma) \geq 0$와 $\lim_{\gamma \to 0} G'(\gamma)=0$은 $G'(\gamma) \geq 0$을 의미한다. 따라서 $\lim_{\gamma \to 0} G(\gamma)=0$과 더불어 $G(\gamma) \geq 0$이 된다. 그러므로 $Q' \geq 0$임을 알 수 있다. 또한 식 (16), $Q' \geq 0$ 및 $M \geq V$에 따라 $\partial C\left(Q(\lambda_2), \lambda_2\right)/\partial\lambda_2$

$$=\partial C/\partial Q \partial Q/\partial\lambda_2+\partial C/\partial\lambda_2 \geq 0$$가 된다. □

명제2의 이해를 돕기위한 예제를 풀어 보았다. 본 예제는 Lee and Rosenblatt [11]의 예제를 충분히 반영하되 일부 변수값은 추가했으며, 일부 변수값은 수정하였다. 각 변수값은 다음과 같이 주어졌다. d=500, P=1000, h=0.5, S=150, r=2,000, M=2,000, V=4, $\lambda_1=\lambda_2=0.1$, $\alpha=0.02$, K=5. 우선 식 (12)를 이용하여 최적 생산량의 근사값 $Q=792.82$를 얻었다. 이 값을 식 (11.1)에 도입한 결과 정확히 양변이 같지는 않지만, 왼편항의 값은 2533.25 바른편항의 값은 2532.7이 되어 차이는 0.55미만이 되었다. 따라서 식 (12)로 부터 얻은 근사값이 최적 생산량((11)식이 정확히 0이되는 생산량)과 별차이가 없음을 알 수 있었다. 최적생산량을 비용함수식 (13)에 대입한 결과 최적비용은 394.21이 되었다.

4.2. $n>1$ 일 경우

다음으로 $K\alpha P-r\lambda_1>0$가정하에서, 최적 생산량을 결정한다. 식 (8)을 Q에 대해 미분하여 식 (18)을 얻었다.

$$\frac{\partial C(Q,n)}{\partial Q}=\frac{\lambda_2}{P}\Bigg\{\frac{e^{-\lambda_2 0n}}{(\mathrm{E}^{-\lambda_2 0n})^2}\Bigg[\frac{-d\lambda_2 S}{P} +\frac{h(P-d)}{\lambda_2}(\lambda_2 0n-\mathrm{E}^{-\lambda_2 0n})\Bigg] +\frac{e^{-\lambda_2 0}}{n(\mathrm{E}^{-\lambda_2 0})^2}\Bigg[\left(d\left(\frac{r\lambda_1}{P}-K\alpha\right)\left(e^{-\lambda_1 0}\mathrm{E}^{-\lambda_2 0}-\frac{\lambda_2}{\lambda}\mathrm{E}^{-\lambda 0}\right)\right)-\frac{Vd\lambda_2}{P}\Bigg]\Bigg\} \tag{18}$$

최적 생산량은 식 (18)이 0이 되는 $Q^*(n)$을 결정하게 된다. 명제 3은 최적 생산과 품질 검증 정책에 대하여 서술하였다.

명제 3:

(3.1) λ_1, λ_2가 아주 작을 경우 최적 생산량은 다음과 같이 근사화 할 수 있으며,

$$Q^*(n)=\sqrt{\frac{2d(S+nV)P}{h(P-d)+(K\alpha-r\lambda_1/P)d\lambda_1/n}} \tag{19}$$

Lee and Rosenblatt [10]의 식 (12) (최적생산 기간에 관한 식)와 일치한다.

(3.2) $\lambda_1, \lambda_2 \downarrow 0$할 경우

$C(Q,n) \to d(S+nV)/Q+h(P-d)Q/2P$되며, 이는 전통적 EMQ 모형에 n회의 품질검증 비용을 추가한 경우이다. 따라서

$Q^*(n) \to \sqrt{2d(S+nV)P/h(P-d)}$된다. 이 경우 불량품 생산량이 극히 적어 n을 0으로 할 수도 있으므로, 고전적 경제적 생산량 모형과 일치 하게 된다.

(3.3) 최적 생산량을 도입한 비용 함수는 다음과 같으며

$$C(Q^*,n) = \frac{h(P-d)Q^*(n)}{P} + K\alpha d - \frac{(K\alpha P - r\lambda_1)d}{P} e^{-\lambda_1\theta} + \frac{d\lambda_2}{P}(M-V) \quad (20)$$

$C(Q^*,n)$는 $Q^*(n)$의 증가 함수 이다.

(3.4) $K\alpha P - 2\lambda_1 r < 0$일 경우, $C(Q^*,n)$, $Q^*(n)$는 λ_1의 증가 함수 이다. $Q^*(n)$는 λ_2의 증가 함수 이며, $M \geq V$일 경우 $C(Q^*,n)$는 λ_2의 증가 함수 이다.

(3.5) λ_1, λ_2가 아주 작을 경우 최적 품질 검증 횟수는 식 (21)로 근사화 할 수 있다.

$$n^*(n^*-1) \leq \frac{S(K\alpha - r\lambda_1/P)\lambda_1 d}{h(P-d)V} \leq n^*(n^*+1) \quad (21)$$

이는 Lee and Rosenblatt [10]의 식 (13) (최적 품질 검증 횟수에 관한 식)과 일치한다.

명제(3.1): 식 (18)은 구조상 복잡하므로 다음과 같은 일련의 근사화 과정을 거친다. 우선 λ_2가 아주 작다는 가정하에서 다음과 같은 근사치를 사용한다.

(1) $e^{-\lambda_2\theta n} \cong 1 \Rightarrow e^{-\lambda_2\theta i} \cong 1 \forall i = 1 \ldots . n-1$ 따라서
(2) $\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\lambda_2\theta i} \cong n$

위에서 나열한 근사치로 식 (18)을 식 (22)로 근사화 한다. (부록 (5) 참조 바람)

$$\frac{e^{-\lambda_2\theta n}\lambda_2}{(\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta n})^2 P}\left[\frac{-d\lambda_2(S+nV)}{P} + \frac{h(P-d)}{\lambda_2}(\lambda_2\theta n - \mathrm{E}^{-\lambda_2\theta n}) + nd\left(\frac{r\lambda_1}{P} - K\alpha\right)\left(e^{-\lambda_1\theta}\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta} - \frac{\lambda_2}{\lambda}\mathrm{E}^{-\lambda\theta}\right)\right] \quad (22)$$

따라서 최적 생산량은 식 (23)을 충족하는 Q^*를 결정하게 된다.

$$\frac{-d\lambda_2(S+nV)}{P} + \frac{h(P-d)}{\lambda_2}(\lambda_2\theta n - \mathrm{E}^{-\lambda_2\theta n}) + nd\left(\frac{r\lambda_1}{P} - K\alpha\right)\left(e^{-\lambda_1\theta}\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta} - \frac{\lambda_2}{\lambda}\mathrm{E}^{-\lambda\theta}\right) = 0 \quad (23)$$

4장 1절에서 적용한 방식과 유사한 방법으로 식 (23)을 충족하는 최적해가 유일함을 알 수 있다. 테일러 근사치를 식 (23)에 적용하여 식 (24)를 얻었다. 식 (19)는 식 (24)로 부 터 얻을 수 있다.

$$\lambda_2\left(\frac{-d(S+nV)}{P} + \frac{h(P-d)Q^2}{2P^2} - \frac{(r\lambda_1/P - K\alpha)d\lambda_1 Q^2}{2P^2 n}\right) = 0 \quad (24)$$

명제(3.2), (3.3), (3.4): 명제 (3.2), (3.3)과 (3.4)의 증명은 명제 (2.2), (2.3), (2.4)와 유사 하므로 생략한다.

명제(3.5): 식 (20)은 테일러 1차 근사치를 이용하여 식 (25)로 근사화 한다.

$$\cong \left(\frac{h(P-d)}{P} + \frac{(K\alpha - r\lambda_1/P)d\lambda_1}{Pn}\right)Q^*(n) + \frac{dr\lambda_1}{P} + \frac{d\lambda_2}{P}(M-V)$$

$$= \sqrt{2d(S+nV)\left[h\left(1-\frac{d}{P}\right) + \frac{(K\alpha - r\lambda_1/P)d\lambda_1}{Pn}\right]} + \frac{dr\lambda_1}{P} + \frac{d\lambda_2}{P}(M-V) \quad (25)$$

따라서 $C(Q^{*},n)$을 최적화 하는 n^{*}은, $\Omega_1=h(P-d)$, $\Omega_2=(K\alpha-r\lambda_1/P)\lambda_1 d$으로 정의 한 후 다음과 같은 조건을 충족한다.

$$(S+(n-1)V)(\Omega_1+\Omega_2/(n-1))\geq[(S+nV)(\Omega_1+\Omega_2/n)]<(S+(n+1)V)(\Omega_1+\Omega_2/(n+1))$$

위 조건에 따라 식 (21)를 얻게 된다. 식 (19)를 보면 S가 증가하거나 h가 감소 하면 $Q^{*}(n)$가 커진다. 따라서 불량품 생산량 또한 증가하게 된다. 이 경우 의사 결정자는 불량품을 줄이기 위해 n^{*}을 늘리게 된다. 우리는 이러한 결과를 식 (21)로 부터 얻을 수 있다. 또한 r 또는 V가 증가해도 n^{*}이 감소함을 알 수 있다.

명제3의 이해를 돕기 위한 예제를 풀어 보았다. 명제2에서 다루어진 예제에서 K=200로 늘린 후 식 (21)를 이용하면 최적 품질검증 횟수가 $n(n-1)\leq 2.85\leq n(n+1)$를 충족해야 됨을 알 수 있다. 따라서 $n^{*}=2$가 된다. 이 값을 식 (19)에 대입하여 최적 생산량의 근사값 $Q^{*}=676.74$을 얻었다. 이 값을 식 (23)에 대입한 결과 정확히 0이 되지는 않으나 0.988이 됨을 알 수 있으므로 식 (19)로 부터 얻은 근사값이 최적 생산량 ((23)식이 정확히 0이 되는 생산량)과 별차이가 없음을 알 수 있었다. 최적생산량을 비용함수식 (20)에 대입한 결과 최적비용은 431.69가 되었다.

5. 고전적 EMQ 모형과의 관계

본 절에서는 위에서 서술한 모형과 고전적 EMQ모형과의 관계를 알아 본다. $\tilde{Q}=Q/n$, $\theta=Q/P$, $\tilde{\theta}=\theta/n$로 정의한다. n에 대한 정수의 제한이 주어지지 않을 경우 Q와 $\tilde{Q}$는 독립적이므로, 식 (8)은 (8a)+(8b)으로 구성 된다.

$$C(Q)=\frac{d\lambda_2}{P}\frac{S}{\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}}+\frac{d\lambda_2 M}{P}+\frac{\Omega_1}{\lambda_2}\left(1-\frac{\lambda_2\theta e^{-\lambda_2\theta}}{\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}}\right)\qquad(8a)$$

테일러 근사치로 근사화 후 $\lambda_2\downarrow 0$를 적용하면 $\cong dS/Q+\Omega_1 Q/2P$가 된다. 따라서 이 부분은 고전적 EMQ모형의 비용식과 일치한다.

$$C(\tilde{Q})=\frac{d\lambda_2}{P}\frac{Ve^{-\lambda_2\tilde{\theta}}}{\mathrm{E}^{-\lambda_2\tilde{\theta}}}+K\alpha d-\frac{\mathrm{E}^{-\lambda\tilde{\theta}}\Omega_2\lambda_2}{\mathrm{E}^{-\lambda_2\tilde{\theta}}\lambda\lambda_1}\qquad(8b)$$

테일러 근사치로 근사화 후 $\lambda_2\downarrow 0$를 적용하면 $\cong dV/\tilde{Q}+\Omega_2\tilde{Q}/2P+r\lambda_1/P$가 된다. 이 부분은 품질 검증, 불량품 처리 및 상태 수정 비용과 관련된 부분으로 볼 수 있다. 식 (8a), (8b)를 Q와 $\tilde{Q}$에 대해 미분한 후 테일러 근사치로 근사화 하면 (8a.1)과 (8b.1)을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial C(Q,n)}{\partial Q}=\frac{\lambda_2}{P}\frac{e^{-\lambda_2\theta}}{(\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta})^2}\left(\frac{-d\lambda_2 S}{P}+\frac{\Omega_1}{\lambda_2}(\lambda_2\theta-\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta})\right)$$

$$\cong\frac{(\lambda_2)^2}{P}\frac{e^{-\lambda_2\theta}}{(\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta})^2}\left(\frac{-dS}{P}+\frac{\Omega_1 Q^2}{2P^2}\right)\qquad(8a.1)$$

$$\frac{\partial C(\tilde{Q},n)}{\partial\tilde{Q}}=\frac{\lambda_2}{P}\frac{e^{-\lambda_2\tilde{\theta}}}{(\mathrm{E}^{-\lambda_2\tilde{\theta}})^2}\left(-\frac{\Omega_2}{\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1\tilde{\theta}}\mathrm{E}^{-\lambda_2\tilde{\theta}}-\frac{\lambda_2}{\lambda}\mathrm{E}^{-\lambda\tilde{\theta}}\right)-\frac{Vd\lambda_2}{P}\right)$$

$$\cong\frac{(\lambda_2)^2}{P}\frac{e^{-\lambda_2\tilde{\theta}}}{(\mathrm{E}^{-\lambda_2\tilde{\theta}})^2}\left(\frac{-dV}{P}+\frac{\Omega_2\tilde{Q}^2}{2P^2}\right)\qquad(8b.1)$$

식 (8a.1)로 부터 EMQ모형의 경제적 생산량 $Q^{*}_{EMQ}=\sqrt{2dSP/\Omega_1}=Q^{*}$를 얻을 수 있으며,

식 (8b.1)로 부터 $Q^*=\sqrt{2dVP/\Omega_2}=\tilde{Q}^*$를 얻을수 있다. 따라서 $n^*=Q^*_{EMQ}/\tilde{Q}^*=\sqrt{S\Omega_2/V\Omega_1}$가 된다. 위에서 서술한 내용은 다음과 같이 점검해 볼 수 있다. n^*에 대한 정수의 제한이 주어지지 않을 경우 식 (21)에서 주어진 조건은 $n^*=\sqrt{S\Omega_2/V\Omega_1}$이 된다. n^*을 식 (19)에 대입하면 $Q^*(n^*)=\sqrt{2dSP/\Omega_1}=Q^*_{EMQ}$의 관계가 성립된다.

6. 요약 및 향후 연구 방향

본 연구에서는 불량품 생산 과 기계 고장을 일으키는 생산 시스템의 생산 및 품질 검증 정책을 분석하였다. 1회 이상의 품질 검증 필요성을 결정할 수 있는 법칙이 제시되었으며, 1회 이상의 품질 검증을 할 필요가 있을 경우에는 품질 검증간의 시간 간격이 일정하여야 한다는 점도 아울러 제시 되었다. 이러한 결과는 기계 고장의 가능성이 배제된 Lee and Rosenblatt [10]의 모형과 일치한다. 최적 생산량과 근사치 및 최적 품질 검증 횟수의 근사치가 주어졌으며, 시스템의 안정성 (λ_1,λ_2의 크기)과 최적 생산량 및 최적 비용 함수의 관계가 분석되었다. 또한 품질 검증 횟수에 대한 정수의 제한이 주어지지 않을 경우, 비용 함수는 고전적 EMQ모형과 일치하는 부분과 품질 검증, 불량품 처리 및 상태 수정 비용과 관련된 부분 등 독립된 두 부분으로 구성됨을 알 수 있었다.

향후 연구 방향은 Porteus [17]과 같이 품질 검증의 결과 획득에 시간적 지연 현상이 있는 경우, 또는 상태 파악을 정확히 할 수 없는 경우, 따라서 품질검증이 잘못된 결과를 제공할 수 도 있는 경우 등을 분석 해 볼 수 있으며, 확률적 수요 모형을 분석 해 볼 수 있다

부 록

부록 (1): 임의의 품질검증 시점 T_j까지의 최적화 문제는 다음식과 같이 된다. $\min_{\theta_k}\tilde{G}(\theta_k)=(K\alpha P/\lambda_1-r)\sum_{k=0}^{j-1}e^{-\lambda_1\theta_k}$. 여기서 우리는 두 가지 상황을 생각해 볼 수 있다. 첫번째 상황은 $(K\alpha P/\lambda_1-r)\le 0$이다. 이 경우 최적화 문제는 $\max_{\theta_k}\ \hat{G}(\theta_k)=\sum_{k=0}^{j-1}e^{-\lambda_1\theta_k}$가 된다. j=2의 경우를 보면, $e^{-k}\le 1$이므로 $e^{-\lambda_1(\theta_1+\theta_2)}-e^{-\lambda_1\theta_1}=e^{-\lambda_1\theta_1}(e^{-\lambda_1\theta_2}-1)\ge e^{-\lambda_1\theta_2}-1$가 된다. 양변에 각각 1과 $e^{-\lambda_1\theta_1}$를 더해 주면 $e^{-\lambda_1(\theta_1+\theta_2)}+e^{-\lambda_1 0}\ge e^{-\lambda_1\theta_2}+e^{-\lambda_1\theta_1}$가 됨을 알 수 있다. 따라서 $T_1=T_2=\ldots=T_{j-1}=0$, T_j는 첫번 째 품질 검증 시점이 최적임을 알 수 있다. 반대로 $(K\alpha P/\lambda_1-r)>0$일 경우 최적화 문제는 $\min_{\theta_k}\ \hat{G}(\theta_k)=\sum_{k=0}^{j-1}e^{-\lambda_1\theta_k}$가 된다. j=2의 경우를 보면, e^{-k}가 convex함수이므로 $1/2(e^{-\lambda_1\theta_2}+e^{-\lambda_1\theta_1})\ge e^{-\lambda_1(\theta_1+\theta_2)/2}$가 된다. 따라서 이 경우에는 $\theta_1=\theta_2=\ldots=\theta_{j-1}=\theta=T_j/j$가 최적임을 알 수 있다. 따라서 주어진 임의의 생산기간 내의 최적 품질검증 시점은 명제 1에서 제시한바 와 같이 된다.

부록 (2): 우선 $C(Q,n)$은 식 (5), (6), (7) 및 명제 1에 따라 다음과 같이 된다.

$$
\begin{aligned}
&C(Q,n)\\
&=\frac{d\lambda_2 S}{P\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta n}}+\frac{d\lambda_2 M}{P}+\frac{h(P-d)}{\lambda_2}\left(1-\frac{\lambda_2\theta n e^{-\lambda_2\theta n}}{\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta n}}\right)\\
&+\left(K\alpha P\left(\frac{1}{\lambda_2}\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}-\frac{1}{\lambda}\mathrm{E}^{-\lambda\theta}\right)+r\left(\mathrm{E}^{-\lambda\theta}\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)\right.\\
&\left.+Ve^{-\lambda_2\theta}\right)\times\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\lambda_2\theta i}\Big/\frac{P}{d\lambda_2}\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta n} \qquad \text{(A2.1)}
\end{aligned}
$$

$E^{-\lambda_2\theta}\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\lambda_2\theta i}=E^{-\lambda_2\theta n}$의 관계를 이용하여 식 (A2.2)를 얻는다.

$$=\frac{d\lambda_2 S}{PE^{-\lambda_2\theta n}}+\frac{d\lambda_2 M}{P}+\frac{h(P-d)}{\lambda_2}\left(1-\frac{\lambda_2\theta n e^{-\lambda_2\theta n}}{E^{-\lambda_2\theta n}}\right)+K\alpha d+\left(\frac{(r\lambda_1/P-K\alpha)d\lambda_2 E^{-\lambda\theta}}{\lambda E^{-\lambda_2\theta}}+\frac{Vd\lambda_2 e^{-\lambda_2\theta}}{PE^{-\lambda_2\theta}}\right)\frac{\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\lambda_2\theta i}}{\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\lambda_2\theta i}} \qquad (A2.2)$$

따라서 식 (8)을 얻을 수 있다. 식 (9)는 $n=1$을 대입하여 얻는다.

부록 (3): 부록 (3)에서는 $n\geq 1$ 경우를 모두 다룬다. 근사치 (2)에 따라 $E^{-\lambda_2\theta n}\cong E^{-\lambda_2\theta}n$가 되므로 $d\lambda_2 Ve^{-\lambda_2\theta}/PE^{-\lambda_2\theta}\cong nd\lambda_2 Ve^{-\lambda_2\theta}/PE^{-\lambda_2\theta n}$가 된다. 따라서 식 (A2.2, 부록 (2))는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$=(E^{-\lambda_2\theta n})^{-1}\Bigg[\frac{d\lambda_2(S+nV)}{P}-\frac{h(P-d)}{\lambda_2}(\lambda_2\theta n-E^{-\lambda_2\theta n})+\frac{h(P-d)}{\lambda_2}\lambda_2\theta nE^{-\lambda_2\theta n}+\left[\left(K\alpha d-\frac{r\lambda_1 d}{P}\right)\left(e^{-\lambda_1\theta}E^{-\lambda_2\theta}-\frac{\lambda_2}{\lambda}E^{-\lambda\theta}\right)\right]\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\lambda\theta i}+K\alpha dE^{-\lambda_2\theta n}-\left(K\alpha d-\frac{r\lambda_1 d}{P}\right)e^{-\lambda_1\theta}E^{-\lambda_2\theta n}-\frac{d\lambda_2 Vn}{P}E^{-\lambda_2\theta}\Bigg]+\frac{d\lambda_2}{P}M \qquad (A3.1)$$

$d\lambda_2 VnE^{-\lambda_2\theta}/P\cong d\lambda_2 VnE^{-\lambda_2\theta n}/nP=d\lambda_2 VE^{-\lambda_2\theta n}/P$가 된다. 따라서 근사치 (2) ($\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\lambda_2\theta i}\cong n$)와 식 (23) 및 식 (A3.1)에 따라 식 (20)을 얻을 수 있다. $n=1$ 일 경우에는 정확히 식 (13)이 된다.

부록 (4): 식 (11)을 λ_2에 대해 미분하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{Q'}{P}E^{-\lambda_2\theta}(\Omega_1-\Omega_2 e^{-\lambda_1\theta})=\frac{d(S+V)}{P}+\frac{\Omega_1(\alpha-E^{-\alpha})}{\lambda_2^2}-\frac{\Omega_1\alpha E^{-\alpha}}{\lambda_2^2}-\frac{\Omega_2\gamma e^{-\gamma}}{\lambda^2}-\frac{\Omega_2 E^{-\gamma}}{\lambda^2}$$

식 (11)에 의하면 $\Omega_2/\lambda_2\lambda_1(e^{-\beta}E^{-\alpha}-E^{-\gamma}\lambda_2/\lambda)+\Omega_1(\alpha-E^{-\alpha})/\lambda_2^2=d(S+V)/P$이 되므로, 위 식에 도입하여 식 (17)을 얻을 수 있다.

부록 (5): 우선 $\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\lambda_2\theta i}=E^{-\lambda_2\theta n}/E^{-\lambda_2\theta}$의 관계를 이용하여 근사치 (2)에 따라 $\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\lambda_2\theta i}\cong n \Rightarrow E^{-\lambda_2\theta n}/E^{-\lambda_2\theta}\cong n$와 같이 근사화 한다. ($n=1$일 경우에는 정확이 같아 진다.) 근사치 (1)에 따라 $e^{-\lambda_2\theta n}/e^{-\lambda_2\theta}\cong 1$이므로 $e^{-\lambda_2\theta}/(E^{-\lambda_2\theta})^2\cong\left(e^{-\lambda_2\theta n}/(E^{-\lambda_2\theta n})^2\right)n^2$가 되어 식 (18)은 식 (22)과 같이 근사화 할 수 있다.

참 고 문 헌

[1] 함주호, 김승한, 이건호, "안정화기간을 고려한 최적생산량의 결정," 산업공학회지, 20권 3호, 1994, 93-104

[2] Bielecki, T., and Kumar, P.R., "Optimality of Zero-Inventory Policies for Unreliable Manufacturing Systems," *Oper. Res.*, 36, 1988, 532-541.

[3] Chand, S., "Lot Sizes and Setup Frequency with Learning in Setups and Process Quality," *European Journal of Oper. Res.*, 42, 1989, 190-202.

[4] Cheng, T.C.E., "An Economic Production Quantity Model with Flexibility and Reliability Consideration," *European*

Journal of Oper. Res., 39, 1989, 174-179.

[5] Chiu, W. K., "Economic Design of *np* Charts for Processes subject to a Multiplicity of Assignable Causes," *Management Sci.*, 23, 1976, 404-411.

[6] Fine, C.H., and Porteus, E., "Dynamic Process Improvement," *Oper. Res.*, 37, 1989, 580-591.

[7] Groenevelt, H., Pintelon, L., and Seidmann, A., "Production Lot Sizing with Machine Breakdown," *Management Sci.*, 38, 1992 a, 104-123.

[8] ______, ______, ______, "Production Batching with Machine Breakdowns and Safety Stocks," *Oper. Res.*, 40, 1992 b, 959-971

[9] Karwan, K.R., Mazzola, J.B., and Morey, R.C., "Production Lot Sizing Under Setup and Worker Learning," *Naval Res. Logist.* 35, 1988, 615-624

[10] Lee, H.L., and Rosenblatt, M.J., "Simultaneous Determination of Production Cycle and Inspection Schedules in a Production System," *Management Sci.*, 33, 1987, 1125-1136.

[11] Lee, H. L, and Rosenblatt, M.J., "A Production and Maintenance Planning Model with Restoration Cost Dependent on Detection Delay," *IIE Trans.*, 21, 1989, 368-375.

[12] Lev, B., and Weiss, H.J., "Inventory Models with Cost Change," *Oper. Res.*, 38, 1990, 53-63

[13] Muth, E.J., and Spremann, K., "Learning Effects in Economic Lot Sizing," *Management Sci.*, 29, 1983, 264-269

[14] Pate-Cornell, M. E., Lee, H.L., and Tagaras, G., "Warnings of Malfunction: The Decision to Inspection and Maintain Production Processes on Schedule or on Demand," *Management Sci.*, 33, 1987, 1277-1290.

[15] Porteus, E., "Investing in Reduced Setups In EOQ Model," *Management Sci.*, 31, 1985, 720-726.

[16] Porteus, E., "Optimal Lot Sizing, Process Quality Improvement and Setup Cost Reduction," *Oper. Res.*, 34, 1986, 137-144.

[17] Porteus, E., "The Impact of Inspection Delay on Process and Inspection Lot sizing," *Management Sci.* 36, 1990, 999-1007

[18] Rosenblatt, M.J., and Lee, H.L., "A Comparative Study of Continuous and Periodic Inspection Policies in Deteriorating Production Systems," *IIE Trans.*, 18,1986 a, 2-9.

[19] ______ and ______, "Economic Production Cycle with Imperfect Production Process," *IIE Trans.*, 18, 1986 b, 48-55.

[20] Weiss, H.J., and Rosenthal, E.C., "Optimal Ordering Policies When Anticipating a disruption in supply or demand," *European Journal of Oper. Res.*, 59, 1992, 370-382

[21] Yao, D., and Klein, M., "Lot Sizes Under Continuous Demand: The Back-

order Case," *Naval Res. Logist.* 36, 1989, 615-624