

임무수행도 평가를 위한 대기행렬모형 및 수치평가

조일연* · 이호우** · 이강원***

(Queueing Models for Mission Effectiveness and its Numerical Evaluation)

I. Y. Jo* · H. W. Lee** · K. W. Lee***

Abstract

A system is considered which is required to perform tasks that arrive randomly during a fixed mission duration. We develop queueing models to obtain the mission effectiveness and the blocking probabilities. Exact probabilities are computed by using the Finite Fourier Cosine Transform.

1. 서 론

소형 교환기를 생각해보자. 교환기가 임무를 수행하기 위해서는 콜(call)이 도착하였을 때 운행상태에 있어야 하며 서비스중 고장이 나서는 안된다. 또는 유휴중에 고장이 나더라도 다음 콜이 도착하기 전에 수리가 끝나야만 한다. 만약 모든 회선이 가동 중일 때 콜이 도착하면 완전히 임무를 수행한다고 볼 수 없다. 비슷한 경우의 예를 임무수행중인 경찰조에 대해서도 찾아볼 수 있을 것이다.

위의 시스템들에서 시스템설계자나 운영자들은 주어진 시간 동안 임무를 완벽하게 수행할 수 있는 확률, 즉, 임무수행도에 관심을 갖게 된다. 임무수행도(mission effectiveness)는 “어떤 특정한 임무를 완벽하게 성취할 수 있는 확률”이라 정의된다[1]. 임무수행도에 대한 조사 논문으로는 Tillman[8]을 보기 바란다. 임무수행도를 분석하기 위한 모형으로는 몇가지가 있으나 마코프모형이 그 중 한 가지이다.

Tillman 등[9]은 신뢰도와 수행정도에 대한 혼합적도인 가신뢰도(pseudo-reliability)라는 개념을 처음으로 소개하였다. Tillman 등[9,10]

* 전자통신연구소
** 성균관대학교 산업공학과
*** 서울산업대학교 산업공학과

은 임무수행도를 가용도함수(availability)와 신뢰도함수의 혼합형태로 구하였다. Lee 등[4]은 임무수행중에 하나의 도착만을 허용하는 Tillman 등의 모형을 확장하여 복수개의 도착을 허용하는 임무수행도 모형을 다루었다. 이때의 임무수행도는 각 도착시점에서의 가용도와 신뢰도의 곱으로 주어진다. Lee 등의 모형에서는 서비스시간이 확정적이고 수리시간이 지수분포를 따르는 한계를 갖는다.

본 연구의 목적은 두가지 이다:

- (1) 임무수행도 분석에 대기행렬이론의 개념이 사용될 수 있다는 것을 보이고,
- (2) Lee 등의 모형을 확장하여 서비스시간과 수리시간이 모두 일반적인 경우의 임무수행도를 분석하는 것이다.

임무수행중에 새로운 도착(대기행렬이론상의 용어로는 “고객”이 된다)이 발생하여 임무를 완수하지 못할(즉 시스템의 용량을 잘못 파악하여 설계한 경우의) 확률을 나타내는 “시스템설계에 의한 실패(system design failure (SDF))”에 관해서는 동시에 두 고객의 도착을 처리할 수 있도록 기존의 모형들을 확장한다.

분석틀로서는 비마코비안 (non-Markovian) 시스템에 대한 시간의존확률을 계산할 수 있는 유일한 방법인 부가변수법(supplementary variable technique)을 사용한다[2]. 부가변수법을 사용하여 $M^X/G/1$ 휴가형시스템을 분석한 논문으로는 Lee et al. [5, 6, 7]을 들 수 있다. 본 연구에서는 우선 경과서비스시간과 경과수리시간을 정의하고 시스템방정식을 세운 후 라플라스변환을 취하여 편미분방정식을 구한다. 마지막으로 Dubner 와 Abate[3]가 개발한 Finite Fourier Cosine Transform의 방법을

통하여 역변환을 취함으로써 목적하는 확률값들을 구한다. 이들의 역변환 방식을 <부록>에 간략하게 수록하였다.

2. 시스템방정식

본 연구에서는 다음과 같은 특성을 갖는 두 시스템들을 다룬다:

<시스템 I>

1. 고객의 도착은 도착률 λ 의 포아송과정으로 일어난다.
2. 시스템은 “바쁘거나” “유휴중”이다.
3. 임무수행실패는 다음과 같은 경우에 일어난다.
 - a) 수리중에 도착이 발생한다.
 - b) 서비스 중에 고장이 일어난다.
 - c) 바쁜 중에 도착이 발생한다.
4. 시점 0에 시스템은 가동상태에 있다.
5. 유휴상태에서의 고장률은 α_0 이다
6. 바쁜상태에서의 고장률은 α 이다.
7. 유휴중에 고장이 발생하면 즉시 수리를 시작한다.
8. 서비스시간과 수리시간은 일반분포를 따른다.

<시스템 II>

이 시스템은 <시스템 I>을 다음과 같이 변형한다.

1. 동시에 두 개의 고객을 수용할 수 있다. 따라서 한 고객이 서비스중일 때 도착하는 고객도 서비스를 받을 수 있다.
2. 서비스시간과 수리시간은 각각 평균 $1/\mu$, $1/\beta$ 의 지수분포를 따른다.

3. 분석

3.1 <시스템 I>

이 시스템은 서비스시간과 수리시간이 일반적이기 때문에 비마코비안이라고 할 수 있다. 그렇지만 하나 또는 둘 이상의 부가변수를 첨가함으로써 마코비안화 할 수 있다 (Cox[2]). 부가변수로서는 경과서비스시간과 경과수리시간을 사용한다. <그림 1>에서 각 상태간의 이동에 따른 전이율을 볼 수 있다. 다음과 같은 상태, 기호, 확률을 정의하자.

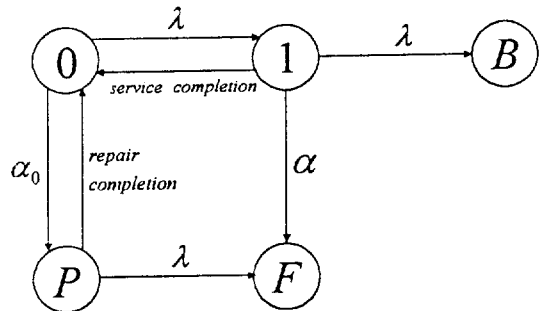
(상태정의)

- 0 시스템 내에 고객이 없다.
- 1 시스템내에 한명의 고객만이 있고 서비스받고 있다.
- B 시스템설계에 의한 실패상태(SDF)
- P 시스템내에 고객이 없고 시스템이 수리상태에 있다.
- F 시스템실패에 따른 임무수행불가

(기호 및 확률)

- ME(T) 시간 T동안의 임무수행도
- S 서비스시간
- R 수리시간
- S(x), s(x) 서비스시간의 분포함수와 확률밀도함수
- R(y), r(y) 수리시간의 분포함수와 확률밀도함수
- S*(θ) 서비스시간의 라플라스변환(Laplace transform)
- R*(θ) 수리시간의 라플라스변환
- S^e(t) 시점 t에 서비스중인 고객의 경과서비스시간
- R^e(t) 시점 t에 수리중인 시스템의 경과수

- 리시간
- λ 도착률
- α 바쁜상태에서의 시스템 고장률
- α₀ 유향상태에서의 시스템 고장률
- N(t) 시점 t에서의 시스템 상태
- P_i(t) 시점 t에 시스템이 상태 i에 있을 확률, i ∈ {0, 1, B, P, F}.
- P_i^{*}(θ) P_i(t)의 라플라스변환
- P₁(x,t)Δt = Pr[N(t)=1, x ≤ S^e(t) ≤ x+Δt].
- P_F(y,t)Δt = Pr[N(t)=1, y ≤ R^e(t) ≤ y+Δt].
- η(x)dx = 서비스종료가 (0,x] 동안 일어나지 않았다는 조건하에 (x, x+dx) 동안에 일어날 확률
- τ(y)dy = 수리종료가 (0,y] 동안 일어나지 않았다는 조건하에 (y, y+dy) 동안에 일어날 확률



<그림 1> <시스템 I>에 대한 상태전이도

Δt 동안에 일어나는 상태전이를 고려하면 다음과 같은 순간전이방정식(infinitesimal system equations)을 세울 수 있다. 우선 고객이 없는 상태에서는 다음과 같다.

$$P_0(t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t - \alpha_0\Delta t)P_0(t) + \left[\int_0^t P_1(x, t)\eta(x)dx \right]\Delta t + \left[\int_0^t P_F(y, t)\tau(y)dy \right]\Delta t + o(\Delta t).$$

$P_0(t)$ 를 양변에서 빼고 Δt 로 나눈 뒤 Δt 를 0으로 보내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P_0(t) &= -(\lambda + \alpha_0)P_0(t) \\ &+ \int_0^t P_1(x, t)\eta(x)dx \\ &+ \int_0^t P_P(y, t)\tau(y)dy \end{aligned} \quad (1)$$

마찬가지 방법으로 다음과 같은 편미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}P_1(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}P_1(x, t) \\ = -[\alpha + \lambda + \eta(x)]P_1(x, t), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}P_P(y, t) + \frac{\partial}{\partial y}P_P(y, t) \\ = -[\lambda + \tau(y)]P_P(y, t), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P_F(t) &= \alpha \int_0^t P_1(x, t)dx \\ &+ \lambda \int_0^t P_P(y, t)dy \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt}P_B(t) = \lambda \int_0^t P_1(x, t)dx \quad (5)$$

위 방정식을 풀기 위한 경계조건은 다음과 같다.

$$P_1(0, t) = \lambda P_0(t), \quad (6)$$

$$P_P(0, t) = \alpha_0 P_0(t), \quad (7)$$

다음과 같은 초기조건을 가정한다.

$$P_0(0) = 1, P_1(x, 0) = P_P(y, 0) = P_F(0) = 0 = P_B(0) = 0;$$

마지막으로 확률의 합은 1이라는 정규화 조건을 쓸 수 있다.

$$\sum_i P_i(t) = 1 \quad (8)$$

다음과 같은 라플라스변환을 정의하자.

$$P_i^*(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta t} P_i(t) dt.$$

식 (1)-(8)에 라플라스변환을 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \theta P_0^*(\theta) - 1 &= -(\lambda + \alpha_0)P_0^*(\theta) \\ &+ \int_0^\infty P_1^*(x, \theta)\eta(x)dx \\ &+ \int_0^\infty P_P^*(y, \theta)\tau(y)dy \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \theta P_1^*(x, \theta) + \frac{\partial}{\partial x}P_1^*(x, \theta) \\ = -[\alpha + \lambda + \eta(x)]P_1^*(x, \theta), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \theta P_P^*(y, \theta) + \frac{\partial}{\partial y}P_P^*(y, \theta) \\ = -[\lambda + \tau(y)]P_P^*(y, \theta), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\theta P_F^*(\theta) = \alpha \int_0^\infty P_1^*(x, \theta)dx + \lambda \int_0^\infty P_P^*(y, \theta)dy \quad (12)$$

$$\theta P_B^*(\theta) = \lambda \int_0^\infty P_1^*(x, \theta)dx, \quad (13)$$

$$P_1^*(0, \theta) = \lambda P_0^*(\theta), \quad (14)$$

$$P_P^*(0, \theta) = \alpha_0 P_0^*(\theta). \quad (15)$$

식 (10)으로부터 다음과 같은 일반해를 도출할 수 있다.

$$P_1^*(x, \theta) = C \cdot e^{-\int_0^x [\theta - \alpha - \lambda + \eta(z)] dz}$$

$e^{-\int_0^x \eta(z) dz} = 1 - S(x)$ 과 경계조건 (14)로부터 다음을 얻는다.

$$P_1^*(x, \theta) = \lambda P_0^*(\theta) \cdot e^{(\theta - \alpha - \lambda)x} \cdot [1 - S(x)] \quad (16)$$

비슷한 방법으로 식 (11)로부터 다음을 얻는다.

$$P_p^*(y, \theta) = \alpha_0 P_0^*(\theta) \cdot e^{-(\theta+\lambda)y} \cdot [1-R(y)] \quad (17)$$

식 (16)과 (17)을 (9)에 대입하면 다음과 같다.

$$P_0^*(\theta) = \frac{1}{(\theta+\alpha_0+\lambda) - \lambda S^*(\theta+\alpha+\lambda) - \alpha_0 R^*(\theta+\lambda)} \quad (18)$$

식 (16)으로부터 다음을 얻는다.

$$P_1^*(\theta) = \int_0^\infty P_1^*(x, \theta) dx = \frac{\lambda}{\theta+\alpha+\lambda} [1-S^*(\theta+\alpha+\lambda) \cdot P_0^*(\theta)] \quad (19)$$

식 (17)로부터 다음을 얻는다.

$$P_p^*(\theta) = \int_0^\infty P_p^*(y, \theta) dy = \frac{\alpha_0}{\theta+\lambda} [1-R^*(\theta+\lambda) \cdot P_0^*(\theta)] \quad (20)$$

(16)을 (13)에 대입하면 다음과 같다.

$$P_b^*(\theta) = \frac{\lambda^2}{\theta(\theta+\alpha+\lambda)} [1-S^*(\theta+\alpha+\lambda) \cdot P_0^*(\theta)] \quad (21)$$

식 (12), (16), (17)로부터 다음을 얻는다.

$$P_p^*(\theta) = \frac{1}{\theta} \left\{ \frac{\alpha\lambda}{\theta+\alpha+\lambda} [1-S^*(\theta+\alpha+\lambda)] + \frac{\alpha_0\lambda}{\theta+\lambda} [1-R^*(\theta+\lambda)] \right\} \quad (22)$$

식 (18)-(22)의 역변환을 취하면 시간의존 상태확률값들을 구할 수 있다. 임무수행실패는 SDF나 고장에 의하여 발생되므로 시간 T동안의 임무수행도는 $ME(T) = 1 - P_b(T) - P_f(T)$ 로부터 구할 수 있다.

3. 2. <시스템 II>

다음과 같은 상태를 정의하자.

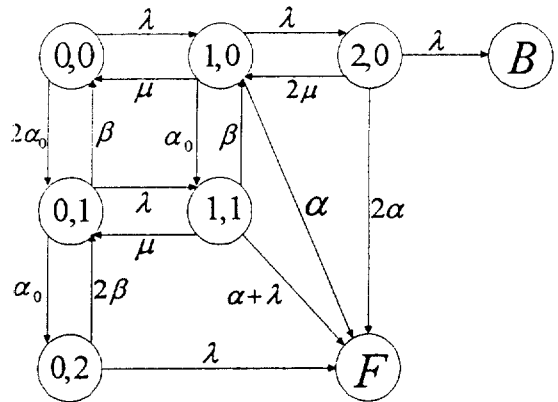
<상태정의>

B : 시스템설계에 의한 실패 (SDF)

F : 시스템고장에 의한 임무수행불가

(i, j): i명의 고객이 있고 j명의 서버가 바쁜 상태 ($j \leq 2-i$).

이 시스템에 대한 상태전이는 <그림 2>와 같다.



<그림 2> <시스템 II>에 대한 상태전이도

우선 $P_{00}(t+\Delta t)$ 를 생각하면 다음이 성립한다.

$$P_{00}(t+\Delta t) = P_{00}(t)[1 - (2\alpha_0 + \lambda)\Delta t] + P_{1,0}(t)\mu\Delta t + P_{1,0}(t)\beta\Delta t + o(\Delta t).$$

위로부터 다음과 같은 미분차등방정식을 쉽게 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dt}P_{00}(t) = -(2\alpha_0 + \lambda)P_{00}(t) + \mu P_{1,0}(t) + \beta P_{0,1}(t) \quad (23)$$

비슷한 방법으로 다음과 같은 미분차등방정식

들을 얻는다.

$$\frac{d}{dt}P_{1,0}(t) = -(\alpha + \alpha_o + \lambda + \mu)P_{1,0}(t) + \lambda P_{0,0}(t) + 2\mu P_{2,0}(t) + \beta P_{1,1}(t) \quad (24)$$

$$\frac{d}{dt}P_{2,0}(t) = -(2\alpha + \lambda - 2\mu)P_{2,0}(t) + \lambda P_{1,0}(t) \quad (25)$$

$$\frac{d}{dt}P_{0,1}(t) = -(\alpha_o + \beta + \lambda)P_{0,1}(t) + 2\alpha_o P_{0,0}(t) + \mu P_{1,1}(t) + 2\beta P_{0,2}(t) \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt}P_{1,1}(t) = -(\alpha + \beta + \lambda - \mu)P_{1,1}(t) + \alpha_o P_{1,0}(t) + \lambda P_{0,1}(t) \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt}P_{0,2}(t) = -(2\beta + \lambda)P_{0,2}(t) + \alpha_o P_{0,1}(t) \quad (28)$$

$$\frac{d}{dt}P_B(t) = \lambda P_{2,0}(t) \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt}P_F(t) = \alpha P_{1,0}(t) + 2\alpha P_{2,0}(t) + (\alpha + \lambda)P_{1,1}(t) + \lambda P_{0,2}(t) \quad (30)$$

정규화조건은 다음과 같다.

$$\sum_i P_i(t) = 1. \quad (31)$$

식 (23)-(31)의 양변에 라플라스변환을 취하고 풀면(자세한 풀이과정은 생략하기로 한다) 다음과 같은 해를 얻을 수 있다.

$$P_{1,0}^*(\theta) = C \cdot P_{0,0}^*(\theta) \quad (32)$$

$$P_{2,0}^*(\theta) = \frac{\lambda}{\theta + 2\alpha + \lambda + 2\mu} \cdot C \cdot P_{0,0}^*(\theta), \quad (33)$$

$$P_{0,1}^*(\theta) = \frac{2\alpha_o + \frac{\alpha_o \mu}{\theta + \alpha + \beta + \lambda + \mu} \cdot C}{A} \cdot P_{0,0}^*(\theta), \quad (34)$$

$$P_{0,2}^*(\theta) = \frac{\alpha_o}{\theta + 2\beta + \lambda} \cdot \frac{2\alpha_o + \frac{\alpha_o \mu}{\theta + \alpha + \beta + \lambda + \mu} \cdot C}{A} \cdot P_{0,0}^*(\theta), \quad (35)$$

$$P_{1,1}^*(\theta) = \left[\frac{\alpha_o C}{\theta + \alpha + \beta + \lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\theta + \alpha + \beta + \lambda + \mu} \cdot \frac{2\alpha_o + \frac{\alpha_o \mu C}{\theta + \alpha + \beta + \lambda + \mu} \cdot C}{A} \right] \times P_{0,0}^*(\theta), \quad (36)$$

$$P_B^*(\theta) = \frac{\lambda^2}{\theta(\theta + 2\alpha + \lambda + 2\mu)} \cdot C \cdot P_{0,0}^*(\theta), \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
 P_F^*(\theta) = & \frac{1}{\theta} \left\{ \left[\alpha + \frac{2\alpha\lambda}{\theta + 2\alpha + \lambda + 2\mu} + \frac{\alpha_0(\alpha + \lambda)}{\theta + \alpha + \lambda + \mu} \right] \cdot C \right. \\
 & + \left[\frac{\lambda(\alpha + \lambda)}{\theta + \alpha + \beta + \mu} + \frac{\alpha_0\lambda}{\theta + 2\beta + \lambda} \right] \cdot \\
 & \left. \frac{2\alpha_0 + \frac{\alpha_0\mu C}{\theta + \alpha + \beta + \lambda + \mu}}{A} \right\} \cdot P_{00}^*(\theta),
 \end{aligned} \tag{38}$$

위에서 A, B, C 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 A = & (\theta + \alpha_0 + \beta + \lambda) - \frac{\mu\lambda}{\theta + \alpha + \beta + \lambda + \mu} - \frac{2\alpha_0\beta}{\theta + 2\beta + \lambda} \\
 B = & (\theta + \alpha + \alpha_0 + \lambda + \mu) - \frac{2\mu\lambda}{\theta + 2\alpha + \lambda + 2\mu} - \frac{\alpha_0\beta}{\theta + \alpha + \beta + \lambda + \mu} \\
 C = & \frac{\lambda A \frac{2\alpha_0\beta\lambda}{\theta + \alpha + \beta + \lambda + \mu}}{AB \frac{\alpha\beta\lambda\mu}{(\theta + \alpha + \beta + \lambda + \mu)^2}}.
 \end{aligned}$$

$P_{00}^*(\theta)$ 는 다음과 같은 정규화조건으로부터 구한다.

$$\sum_i P_i(t) = \frac{1}{\theta} \tag{39}$$

4. 수행도 평가

3절에서 구한 해들로부터 임무수행도를 계산해보자. 확률값들은 Dubner 와 Abate[3]가 소개한 역변환방법을 이용하기로 한다(Appendix에 이 방법에 대한 개략적인 설명이 되어 있다).

먼저 Lee, Tillman, Higgins (LTH) [4]의 결과와 본 연구의 결과를 비교하고자 한다. 그들은 임무수행기간 동안 복수개의 임무를 수행하는 모형을 개발하였다. 그들의 모형에서는

비정상 포아송과정(non-homogeneous Poisson process(NHPP))을 가정하였다. <표 1>에 본 연구와 LTH의 연구의 차이점이 비교되어 있다. <표 2>에는 두가지 서로 다른 서비스율 ($\mu = 0, \mu = 0.1$)에 대한(다른 파라미터 값들은 고정 : $\lambda = 0.1, \alpha = \alpha_0 = 1.0, \beta = 5.0$) 본 연구의 결과와 LTH의 연구의 결과가 비교되어 있다. 결과 값에서의 조그만 차이는 LTH에서 사용한 복잡한 증명분에 기인하는 것으로 보여진다. HPP(homogeneous Poisson process)의 경우 본 모델이 계산하기 훨씬 간편함을 알 수 있다.

〈표 1〉 LTH모형과 본 모형의 비교

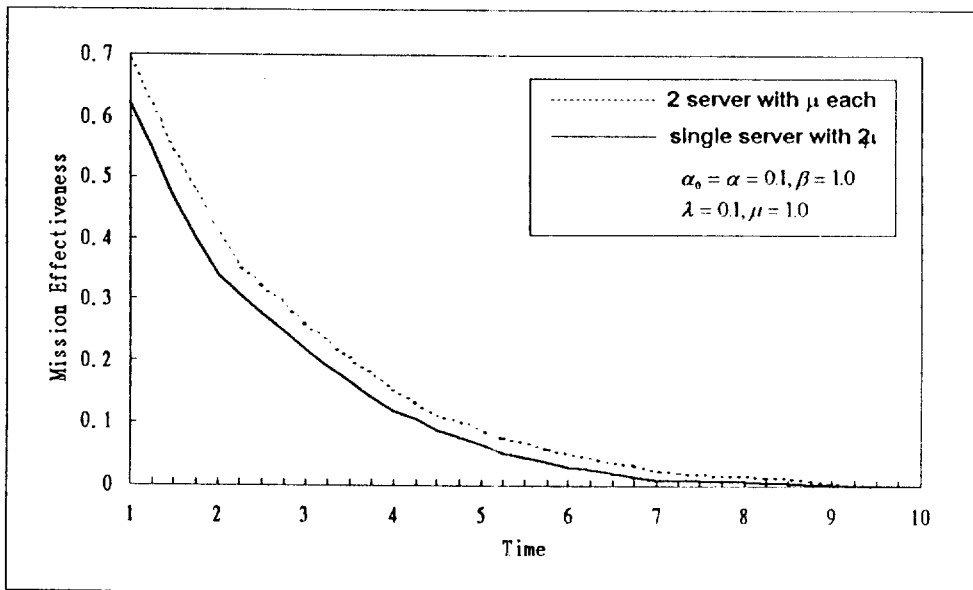
	LTH	본 모형
서버수	1	1 or 2
도착과정	NHPP	HPP
서비스시간 분포	확정적	일반분포
고장까지의 시간 분포	지수분포	일반분포
수리시간 분포	지수분포	일반분포
척도	임무수행도	·임무수행도 ·상태확률 ·SDF 확률

〈표 2〉 LTH 모형과 본 모형의 특정결과치 비교 ($\lambda=0.1, \alpha=\alpha_0=1.0, \beta=5.0$)

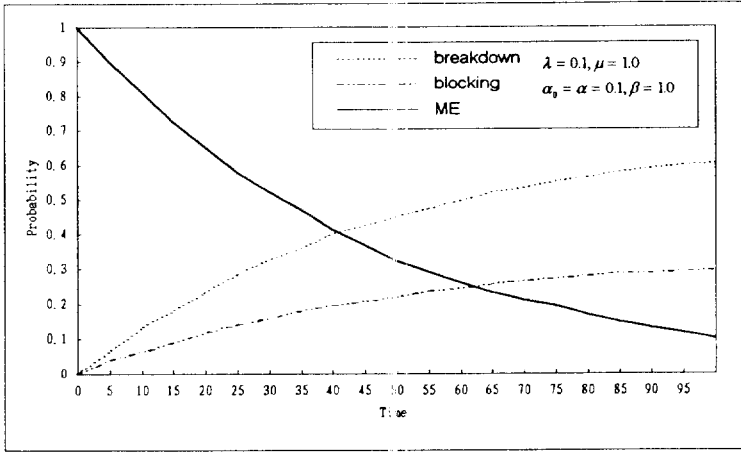
모형	임무수행도	
	$\mu = 0$	$\mu = 0.1$
LTH	0.8400	0.7800
본 모형	0.8507	0.7812

〈그림 3〉은 고장확률과 blocking확률을 시간의 함수로서 표현한 것이다. 기대했던대로 시간이 지남에 따라 임무수행도는 일양감소를 보이고 있음을 알 수 있다.

임무수행도가 시스템설계자에게 어떠한 도움을 줄 수 있는가를 보기 위하여 한 명의 서버가 있는 경우는 서비스율 2μ , 두 명의 서버가 있는 경우는 각각 서비스율 μ 를 갖는 두 가지 시스템에 대해 임무수행도를 시간의 함수로 〈그림 4〉에 나타내었다. 이 경우 임무수행도는 큰 차이를 보이고 있지 않으므로 일반적인 비용개념 하에서는 느린 서버 두 명 보다는 빠른 서버 한 명이 효율적일 것이다.



〈그림 3〉 시간의 변화에 따른 ME의 변화 (모든 분포는 지수분포를 가정)



〈그림 4〉 두가지 경우에 대한 ME의 비교

5. 결 어

본 논문에서는 임무수행도를 분석하기 위하여 대기행렬이 사용될 수 있음을 보이고 Dubner 와 Abate에 의해 개발된 finite Fourier Cosine transform을 이용하여 그 확률값들을 계산하였다. 본 연구는 비슷한 확률시스템들을 모델링하는데 그 기초가 될 수 있으며 실제시스템을 설계하고 제작하는데 필요한 정보를 제공할 수 있으리라고 생각한다.

본 연구에서는 서버의 수가 한 명 또는 두 명인 경우만으로 국한하였지만 일반적인 경우로 확장할 수 있을 것이라 생각된다. 또한 도착하는 고객의 대기공간을 설정함으로써 시스템의 활용도를 높일 수 있는 해의 개발이 필요하다 하겠다.

부 록

(DUBNER 와 ABATE'S 의 역변환 방법)

함수 $f(t)$ 의 라플라스변환을 다음과 같이 정의하자.

$$F^*(\theta) = \int_0^{\infty} e^{-\theta t} f(t) dt \tag{A-1}$$

역변환공식은 다음과 같다.

$$f(t) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} e^{\theta t} F^*(\theta) d\theta \tag{A-2}$$

는 실함수이므로 (A-1)과 (A-2)를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Re\{F^*(\theta)\} = \int_0^{\infty} e^{-\theta t} f(t) \cos \theta t dt \tag{A-3}$$

$$f(t) = \frac{2e^{at}}{\pi} \int_0^{\infty} Re\{F^*(\theta)\} \cos \theta t dt \tag{A-4}$$

위에서 $\theta = a + iw$ 이다. 식 (A-3)은 attenuation

factor를 갖는 Fourier cosine transform이다. 따라서 $f(t)$ 는 $Re\{F^*(\theta)\}$ 의 frequency spectrum에 의해 결정된다.

$h(t)=0$ ($t<0$)인 실함수 $h(t)$ 에 대해 길이 T 인 간격으로 분리하고 분리된 각 부분들을 생각하자. $h(t)$ 를 구간 $(nT, (n+1)T)$, $n=0, 1, 2, \dots$ 에 대해 다음과 같이 정의되는 함수로 생각하자.

$$g_n(t) = \begin{cases} h(t), & nT \leq t \leq (n+1)T, \\ h(2nT-t), & (n-1)T \leq t \leq nT. \end{cases} \quad (A-5)$$

$g_n(t)$ 를 다음과 같은 Fourier 급수의 형태로 표현하면 $n=0, 2, 4, \dots$ 에 대해 (A-5)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$g_n(t) = \begin{cases} h(nT+t), & 0 \leq t \leq T, \\ h(nT-t), & -T \leq t \leq 0. \end{cases} \quad (A-6)$$

또한 $n=1, 3, 5, \dots$ 에 대해

$$g_n(t) = \begin{cases} h((n+1)T-t), & 0 \leq t \leq T, \\ h((n+1)T+t), & -T \leq t \leq 0. \end{cases} \quad (A-7)$$

따라서 각 $g_n(t)$ 는 다음과 같은 Fourier 표현이 가능하다.

$$g_n(t) = \frac{A_{n,0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{n,k} \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \quad (A-8)$$

위에서

$$A_{n,k} = \frac{2}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} h(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) dt \quad (A-9)$$

(A-8)을 n 에 대해 더하면

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) = \frac{2}{T} \left[\frac{A(\omega_0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A(\omega_k) \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \right] \quad (A-10)$$

위에서

$$A(\omega_k) = \int_0^{\infty} h(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) dt \quad (A-11)$$

이제 $A(\omega_k)$ 이 Fourier cosine 변환임을 알 수 있다. 다음과 같은 attenuation factor를 정의하자.

$$h(t) = e^{-at} f(t) \quad (A-12)$$

이것은 변환변수를 $\theta = a + \frac{k\pi}{T}i$ 로 갖는 함수 $f(t)$ 의 라플라스변환이다. 즉, $A(\omega_k) = Re\{F^*(\theta)\}$ 이다. 따라서 (A-10)은 다음과 같다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{at} g_n(t) = \frac{2e^{at}}{T} \left[\frac{1}{2} Re\{F^*(a)\} + \sum_{k=1}^{\infty} Re\left\{F^*\left(a + \frac{k\pi}{T}i\right)\right\} \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \right]. \quad (A-13)$$

에러(error)항을 다음과 같이 정의하자.

$$ERROR = \sum_{n=0}^{\infty} e^{at} g_n(t) - f(t) \quad (A-14)$$

다음을 이용하면

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{at} g_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{at} h(2nT+t) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{at} h(2nT-t) \quad (A-15)$$

다음을 얻는다.

$$ERROR = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-atn} [f(2nT+t) + e^{2at} f(2nT-t)] \quad (A-16)$$

위의 역변환방법을 요약하면 다음과 같다.

<Step 0> T 의 값을 설정.

<Step 1> 항수를 $MSUM=100$, 최대 항수를 $MAXTERM$ 으로, 에러상한을 ϵ 로 설정한다.

- <Step 2> (A-16)을 이용하여 *ERROR*를 계산한다.
- <Step 3> $|ERROR| < \epsilon$ 이거나 $MSUM > MAXTERM$ 이면 GO TO <Step 4>. 아니면 $MSUM = MSUM + 100$ 이라 하고 GO TO <Step 2>.
- <Step 4> (A-13)을 이용하여 $f(t)$ 를 계산.

참 고 문 헌

- [1] ARINC Res. Corp., *Reliability Engineering*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1964.
- [2] Cox, D.R., "The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 51, pp. 433-441, 1955
- [3] Dubner, H., and J. Abate, "Numerical Inversion of Laplace Transforms by Relating Them to the Finite Fourier Cosine Transform", *J. ACM*, Vol. 15, No. 1, pp. 115-123, 1968.
- [4] Lee, K.W., F.A. Tillman, and J.J. Higgins, "Stochastic Models for Mission Effectiveness", *IEEE Trans. on Reliability*, Vol. 39, No. 3, pp. 321-324, 1990.
- [5] Lee, H.W., S.S. Lee, K.C. Chae, "Operating Characteristics of $M^X/G/1$ Queue with N-policy", *Queueing systems: Theory and Application*, Vol. 15, 387-399, 1994
- [6] Lee, S.S., H.W. Lee, S.H. Yoon, K. C. Chae, "Batch Arrival Queue with N-policy and Single Vacation", *Compu & Oper Res*, Vol. 22, No. 2, 173-189, 1994
- [7] Lee, H.W., S.S. Lee, J.O. Park, K.C. Chae, "Analysis of $M^X/G/1$ Queue with N-policy and Multiple Vacations", *J Appl Prob*, Vol. 31, June, 467-496, 1994
- [8] Tillman, F.A., C.L. Hwang, and W. Kuo, "System Effectiveness Models: An Annotated Bibliography", *IEEE Trans. on Reliability*, Vol. R-29, No. 4, pp. 295-304, 1980.
- [9] Tillman, F.A., C.H. Lie, and C.L. Hwang, "Analysis of Pseudo-Reliability of a Combat Tank System and its Optimal Design," *IEEE Tr. on Reliability*, Vol. R-25, No. 4, pp 239-242. 1976
- [10] Tillman, F.A., W. Kuo, R.F. Nassar, and C.L. Hwang, "A numerical simulation of the system effectiveness-A renewal theory approach", *Proc. Ann. Reliability and Maintainability Symp.*, pp. 252-261, 1982.