

비선형 시스템에 대한 퍼지 도달 법칙을 가지는 가변 구조 제어

Variable Structure Control with Fuzzy Reaching Law Method for Nonlinear Systems

사공 성 대, 이 연 정, 최 봉 열
(Seong Dae Sagong, Yun-Jung Lee, and Bong Yeol Choi)

Abstract : In this paper, variable structure control(VSC) based on reaching law method with fuzzy inference for nonlinear systems is proposed. The reaching law means the reaching condition which forces an initial state of system to reach switching surface in finite time, and specifies the dynamics of a desired switching function. Since the conventional reaching law has fixed coefficients, the chattering can be existed largely in sliding mode. In the design of a proposed fuzzy reaching law, we fuzzify RP(representative point)'s orthogonal distance to switching surface and RP's distance the origin of the 2-dimensional space whose coordinates are the error and the error rate. The coefficients of the reaching law are varied appropriately by the fuzzy inference. Hence the state of system in reaching mode reaches fastly switching surface by the large values of reaching coefficients and the chattering is reduced in sliding mode by the small values of those. And the effectiveness of the proposed fuzzy reaching law method is shown by the simulation results of the control of a two link robot manipulator.

Keywords: variable structure control, fuzzy reaching law method, fuzzy logic systems

1. 서론

비선형 시스템에 대한 제어방식 중에서 가변구조 제어는 스위칭 평면 상에서 불연속 제어 입력을 가하여 시스템의 구조를 적절히 변화시켜서 슬라이딩 모드라는 동특성을 가진다. 그리고 시스템 상태가 슬라이딩 모드에 존재함으로써 시스템의 안정성이 보장될 뿐만 아니라 슬라이딩 운동을 유지하는 동안에는 매개변수의 변화와 외부잡음에 대해서 견실한 특성을 나타낸다[1-3].

일반적으로 가변구조 제어 시스템의 과도 동특성에는 두 가지 모드, 즉 도달 모드와 슬라이딩 모드로 구분되어진다. 도달 모드에서는 시스템 상태가 스위칭 평면으로 흡인시키는 도달 조건을 가지며, 이 조건을 구하는 방법으로 Lyapunov 함수 방법과 도달 법칙 방법(reaching law method)이 있다[2, 3].

Lyapunov 함수 방법은 적절한 선택한 Lyapunov 후보함수의 안정조건을 이용하여 도달 조건을 얻는 방법으로 슬라이딩 모드의 스위칭 구조를 유도할 수 있다. 이러한 Lyapunov 함수 방법에 퍼지 이론을 도입한 여러 연구가 발표되었는데, Lin 등[6]은 현재 상태를 나타내는 표시점(representative point: RP)과 초평면과의 거리를 퍼지 입력으로 하는 언어적 규칙을 이용하여 제어 입력의 궤환 이득을 결정하는 퍼지-슬라이딩 모드 제어를 제안하였고, Meystel 등[7]은 오차와 오차의 변화율을 두 축으로 하는 이차원 상태 공간에서 원점에 대한 표시점의 거리와 스위칭 평면에 대한 각도를 퍼지 입력으로 하고, 언어적 규칙을 이용하여 제어 입력의 두 가중치를 결정하는 퍼지 가변구조 제어를 제안하였으며, Palm [8]은 퍼지 제어가 가변구조 제어 방식에 경제성을 도입한 것으로 개념을 확장하여, 퍼지 제어기 변수의 설계시 가변구조 제어 이론을 사용하여 결정할

수 있음을 보였다. 그리고 Hwang 등[9]은 일반적인 가변구조 제어에 대하여 제어 입력을 평활화할 수 있는 퍼지 제어를 제안하였다. Lyapunov 함수 방법은 궁극적인 슬라이딩 모드 스위칭이 일어나며, 일반적으로 과도특성이 나쁜 단점을 가지고 있다.

도달 법칙은 스위칭 함수의 동특성을 직접적으로 결정할 수 있을 뿐만 아니라, 도달 모드 동안의 시스템 동특성도 결정할 수 있어 과도특성을 개선한다[3]. 즉, 도달계수의 선택시 스위칭 평면의 도달 시간과 슬라이딩 모드에서의 채터링을 고려할 수 있다. 그리고 제어 입력의 설계가 간단하다는 장점이 있다. 그러나 기존의 도달 법칙은 도달계수가 지속적으로 일정한 값을 유지하므로 시스템 상태가 슬라이딩 모드에 도달하여 채터링이 발생하는 문제점을 가진다. 이러한 문제점은 시스템의 상태가 슬라이딩 모드로 도달한 후에 도달계수를 적절히 재 조절하면 해결할 수 있다.

한편 채터링을 줄이는 방법으로는 Slotine[10]의 포화 함수와 유계층을 사용한 연속 근사화 방법과 Dorling 등[11]의 개선된 단위 벡터 형태의 연속 근사화 방법이 있는데, 이러한 방법들을 사용하면 채터링은 감소시킬 수 있으나 유계층의 폭만큼 정확성이 감소되는 단점을 가지고 있다.

본 논문에서는 기존의 도달 법칙[3]의 문제점을 해결하기 위해 퍼지 추론을 가지는 도달 법칙을 제안하여 가변구조 제어를 설계한다. 여러 장점을 가진 도달 법칙에서 오차와 오차의 변화율을 두 축으로 하는 이차원 오차 상태 공간상의 표시점을 스위칭 평면에 대한 법선 거리와 원점에 대한 위치로 나타내어, 이들 위치와 법선 거리를 퍼지 변수로 설정하고, 미리 설계한 퍼지 제어 규칙에 따라 적절한 도달계수를 얻는다. 그러므로 제안된 퍼지 도달 법칙은 일정한 도달계수 값으로 인해 채터링이 항상 존재하는 기존의 도달 법칙을 개선할 수 있음을 보인다. 즉, 도달 모드에서는 큰 도달계수 값을 가지게 하여 도달 시간을 감소시키며, 슬라이딩 모드에서는 아주 작은 도달계수 값으로 채터링을 줄일 수 있다. 마지막으로 2링크 로봇 매니퓰레이터에 대하여 제

안한 퍼지 도달 법칙을 가지는 가변구조 제어를 적용하여 컴퓨터 시뮬레이션하였으며, 채터링 문제에 있어서 포화 함수와 유계층을 가지는 연속 근사화 방법과 개선된 단위 벡터 형태의 연속 근사화 방법에 대하여 비교하여 제안한 퍼지 도달 법칙의 타당성을 입증하고, 특성들을 고찰한다.

II. 가변구조 제어 시스템

이 장에서는 비선형 시스템에 대한 일반적인 가변구조 제어기의 설계를 소개한다. 먼저 가변구조 제어기 설계시 슬라이딩 모드에서 원하는 스위칭 함수를 결정하는데, 비선형 시스템을 슬라이딩 모드 등가 시스템으로 변환하고, 이를 다시 정준형(canonical form)의 선형 시스템으로 가정하면 쉽게 스위칭 함수를 얻을 수 있다. 그리고 도달 모드에서 도달 법칙 방법을 이용하여 전체 시스템에 대한 제어 입력을 설계한다.

1. 비선형 시스템에서의 슬라이딩 모드

제어 대상 시스템은 다음의 n차 비선형 시스템을 고려한다.

$$\dot{x} = a(x) + B(x)u \tag{1}$$

여기서 시스템의 상태는 $x \in R^n$, 제어 입력은 $u \in R^m$ 이며, $a(x) \in R^{n \times 1}$, $B(x) \in R^{n \times m}$ 으로 각각 시스템과 입력 행렬을 나타낸다.

가변구조 제어 시스템에서의 과도 동특성은 슬라이딩 모드와 도달 모드로 나눌 수 있는데, 제어법칙의 설계는 먼저 원하는 슬라이딩 모드의 동특성을 나타내는 스위칭 함수 $s(x)$ 을 결정하고, 다음으로 도달 조건을 만족하는 도달 모드에서의 제어 입력을 설계한다. 일반적으로 슬라이딩 모드의 동특성은 오버슈트 없이 오차에 무관하게 안정하고 빠른 응답 특성을 가지는 다음과 같이 정의되는 스위칭 평면으로 결정되어진다.

$$s(x) = c^T x = 0 \tag{2}$$

(2)의 $s(x)$ 는 시스템의 상태가 유한한 시간에 슬라이딩 모드에 도달하는 응답 특성을 가진다.

2. 슬라이딩 모드 등가 시스템에서의 스위칭 평면 설계

슬라이딩 모드의 동특성을 결정하는데 있어, 복잡한 비선형 시스템에서 직접 스위칭 함수를 설계하기 보다는 슬라이딩 모드 등가인 시스템에서 설계하면 더욱 쉬워진다[3]. (1)을 다음과 같은 슬라이딩 모드 등가 시스템으로 변환할 수 있다.

$$\dot{x} = a_s(x) + B_s(x)u \tag{3}$$

여기서 시스템의 상태는 $x \in R^n$, 제어 입력은 $u \in R^m$ 이며, $a_s(x) \in R^{n \times 1}$, $B_s(x) \in R^{n \times m}$ 으로 각각 등가 시스템과 입력 행렬을 나타낸다. 가변구조 제어에서 (1)과 (3)이 같은 스위칭 평면을 가진다면, 다음의 정리 1은 (1)의 슬라이딩 모드 해석에 중요한 의미를 가진다.

정리 1(3) : 슬라이딩 모드 등가

(1)이 다음의 매칭 조건을 만족하면

$$\begin{aligned} a(x) - a_s(x) &= B_s(x) \tilde{a}(x) \\ B(x) - B_s(x) &= B_s(x) \tilde{B}(x) \end{aligned} \tag{4}$$

(1)과 (3)의 슬라이딩 모드는 같아지며, 이를 슬라이딩 모드 등가라 한다. 여기서 $\tilde{a}(x)$ 와 $\tilde{B}(x)$ 는 각각 적당한 차원을 가지는 상태 벡터와 입력 행렬이며, $\frac{\partial s}{\partial x} B(x)$ 와 $\frac{\partial s}{\partial x} B_s(x)$ 는 비특이라고 가정한다.

앞의 슬라이딩 모드 등가 시스템을 정준형 선형 시스템으

로 가정하면 다음의 선형 스위칭 함수를 쉽게 얻을 수 있다. (3)을 정준형 선형 시스템으로 표현하고, (2)의 스위칭 평면을 다시 쓰면

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_s u \\ s(x) &= Cx = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

을 얻는다. 여기서

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad C_s = [C_1 \ C_2] \\ A_s &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B_s = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

으로 표현되며, $x_1 \in R^{n-m}$ 이고 $x_2 \in R^m$ 이다. (6)을 행렬 변환으로 표현하면

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

이 되며, (5)는 다음으로 변환되어진다

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (A_{11} - A_{12}C_2^{-1}C_1)x_1 + A_{12}C_2^{-1}s \\ \dot{s} &= [(C_1A_{11} - C_2A_{12}) - (C_1A_{12}) \\ &\quad - (C_1A_{12} + C_2A_{22})C_2^{-1}C_1]x_1 \\ &\quad + (C_1A_{12} + C_2A_{22})C_2^{-1}s + C_2B_2u \end{aligned} \tag{8}$$

스위칭 평면 위에서 $s = 0$ 이므로 다음의 미분방정식

$$\dot{x}_1 = (A_{11} - A_{12}C_2^{-1}C_1)x_1 \tag{9}$$

이 매칭 조건 (4)을 가지면, 선형 시스템 뿐만 아니라 원래의 비선형 시스템에 대한 슬라이딩 모드를 나타내게 된다. 만일 (5)에서 (A_s, B_s) 가 가제어 쌍이면, (9)의 (A_{11}, A_{12}) 도 역시 가제어 쌍이 된다. 따라서 다음으로 정의되는 행렬

$$K = -C_2^{-1}C_1 \tag{10}$$

의 요소를 적당히 선택함으로써 슬라이딩 모드의 극점을 원하는 위치에 배치할 수 있다. 마지막으로 원하는 스위칭 함수는

$$s(x) = C_s x = C_2[-K \ I]x \tag{11}$$

이며, 여기서 C_2 는 임의값을 가진다.

3. 도달 모드와 제어 법칙의 설계

스위칭 함수를 선택하면 그 다음으로 도달 모드를 설계하는데, 도달 모드의 설계시 원하는 시스템 동특성 뿐만 아니라 슬라이딩 모드를 얻을 수 있는 전체 시스템 제어 입력을 고려해야 한다. 여기서 슬라이딩 모드 도달 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{s}_i < 0 \text{ 일때 } s_i > 0 \\ \dot{s}_i > 0 \text{ 일때 } s_i < 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \tag{12}$$

이 조건은 각각의 스위칭 평면들이 서로 교차하는 평면도 모두 스위칭 평면임을 의미한다. 그리고 도달 모드의 설계시 도달 시간과, 채터링을 고려한다. 이러한 고려점들을 만족하는 설계 방법으로 다음의 도달 법칙 방법이 있다.

$$\dot{s} = -Ks - Q \operatorname{sgn}(s) \tag{13}$$

여기서

$$\begin{aligned} K &= \operatorname{diag}[k_1, \dots, k_m], \quad k_i > 0 \\ Q &= \operatorname{diag}[q_1, \dots, q_m], \quad q_i > 0 \\ \operatorname{sgn}(s) &= [\operatorname{sgn}_1(s), \dots, \operatorname{sgn}_m(s)]^T \end{aligned}$$

이다. 이 도달 법칙은 스위칭 함수의 동특성을 직접 결정할 수 있으며, 만일 점근적으로 안정하면 도달 조건이 만족하게 된다. (13)에서 $-Q \operatorname{sgn}(s)$ 는 시스템의 상태를 $|s| = -q_i$ 의 일정율로 스위칭 평면에 도달시키는 법칙으로 설계

가 간단하나 q_i 가 매우 작은 값이면 도달 시간이 길어지고, q_i 가 매우 큰 값이면 채터링을 심하게 발생시킨다. 이러한 문제점을 보완하기 위해 $-Ks$ 항을 추가하면 시스템의 상태를 비례율로 스위칭 평면에 도달시킨다. 이는 도달 구간에서 큰 값의 s 와 K 의 비례값으로 시스템의 상태를 스위칭 평면으로 빠르게 도달시켜 도달 시간을 감소시킬 수 있음을 나타낸다. 도달 구간에서 도달 시간을 줄이기 위해서는 (13)에서 K 값과 Q 값을 크게 설정하여야 하는데, 이 경우 시스템 상태가 슬라이딩 모드에 도달하게 되면 K 값 보다는 Q 값에 의해 심한 채터링이 발생된다. 그리고 슬라이딩 모드에서의 채터링을 고려하여 Q 값과 K 값을 아주 크게 설정하면 시스템의 상태는 슬라이딩 모드에 궁극적으로 도달하게 되며, 이 경우 도달 시간이 매우 길어져 바람직하지 않다.

다음으로 잡음, 즉 시스템 섭동과 외란에 건설한 제어 입력을 설계하기 위해 (1)을 다음과 같이 표현한다.

$$\dot{x} = a(x) + \Delta a(x, p, t) + [B(x) + \Delta B(x, p, t)]u + d(x, p, t) \quad (14)$$

여기서 p 는 매개변수의 불확실성을 나타내는 벡터이고, d 는 외란을, Δa 와 ΔB 는 시스템 섭동을 각각 나타낸다.

정의 1(3) : 불변성

슬라이딩 모드에서 가변구조 제어 시스템이 잡음, 즉 시스템 섭동과 외란 등에 영향을 받지 않는 것을 불변성이라 정의한다.

일반적으로 (14)가 다음의 매칭 조건을 만족하면 불변성을 가지는 것이 잘 알려져있다[3].

$$\begin{aligned} \Delta a(x, p, t) &= B(x) \tilde{a}(x, p, t) \\ \Delta B(x, p, t) &= B(x) \tilde{B}(x, p, t) \\ d(x, p, t) &= B(x) \tilde{d}(x, p, t) \end{aligned} \quad (15)$$

그리고 다음과 같이 정의 되는 행렬 $F(x, u, p, t)$ 에 대해 (16)의 조건을 만족하는 양의 연속함수 $\rho(x, t)$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned} F(x, u, p, t) &= \tilde{a}x + \tilde{B}u + \tilde{d} \\ \|F(x, u, p, t)\| &\leq \rho(x, t) \end{aligned} \quad (16)$$

이 매칭 조건은 시스템의 섭동과 외란이 입력이 인가되는 채널에 존재하며 그 유계를 안다는 조건을 의미한다.

제어 입력을 구하면, 스위칭 평면 위에서 (2)는

$$s = \frac{\partial s}{\partial x} a(x) + \frac{\partial s}{\partial x} B(x)u = 0 \quad (17)$$

이 되고, (13)으로 부터 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial s}{\partial x} a(x) + \frac{\partial s}{\partial x} B(x)u = -Ks - Q \operatorname{sgn}(s) \quad (18)$$

여기서 $(\partial s / \partial x)B(x)$ 가 비특이이면 다음의 제어 법칙을 얻게 된다.

$$u = - \left[\frac{\partial s}{\partial x} B(x) \right]^{-1} \left[\frac{\partial s}{\partial x} a(x) + Ks + Q \operatorname{sgn}(s) \right] \quad (19)$$

이 제어 법칙은 도달 법칙을 포함하고 있으며, 시스템의 섭동이나 외란을 보상할 수 있는 건설 안정한 입력임을 알 수 있다.

III. 퍼지 논리를 이용한 도달 법칙의 설계

앞에서 설계한 도달 법칙 (13)에 퍼지 성질을 도입하여, 기존의 크리스프(crisp) 도달 법칙 대신에 도달계수를 퍼지 화하여 언어적인 값으로 표현한 퍼지 도달 법칙을 설계하고자 한다.

일반적인 퍼지 논리 시스템의 구성은 다음 그림1과 같다.

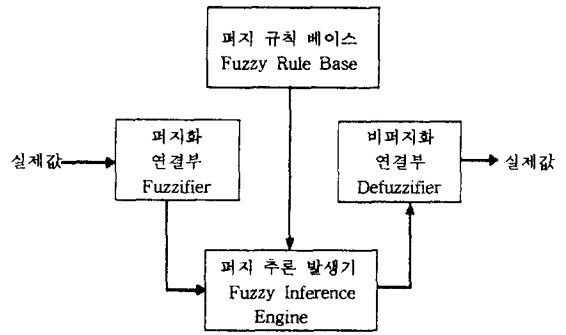


그림 1. 퍼지 논리 시스템의 기본 구성도.
Fig. 1. Basic configuration of fuzzy logic system.

퍼지화를 위해 사용한 실제값은 그림2에서와 같은 이차원 오차 위상 공간에서 표시점(RP)과 원점 사이의 거리 r 과 스위칭 라인에 대한 법선 거리 rd 를 사용하였다.

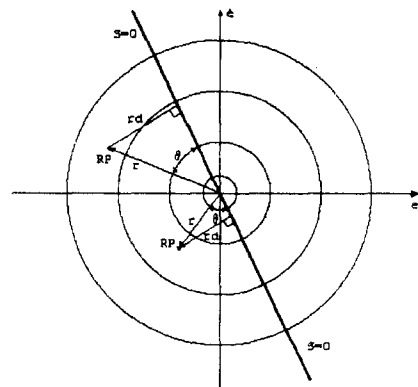


그림 2. 위상 평면에서의 표시점 거리 및 법선 거리의 표시.
Fig. 2. Representation of orthogonal distance and range of RP in the phase plane.

그림2에서와 같이 가변구조 제어에서는 원하는 동특성을 가지는 스위칭 평면을 e 와 \dot{e} 의 2차원 평면에 도시하게 된다. 초기의 RP가 스위칭 라인으로 부터 멀리 떨어져 있는 경우, 우선 RP의 시스템 상태는 스위칭 라인, 즉 $s = ce + \dot{e} = 0$ ($\dot{e} = -ce$)으로 천이되고, 이 스위칭 라인을 따라 이동하면서 궁극적으로 $s = ce + \dot{e} = 0$ ($e = 0, \dot{e} = 0$)인 원점으로 수렴하게 된다. 따라서 본 논문에서는 이러한 목적에 부합되는 r, rd 를 퍼지 입력 변수로 선택하였다. 여기서 거리 r 은 원점과의 거리차이며, $r = \sqrt{e^2 + \dot{e}^2}$ 이다. $rd = |r \sin(\theta_s - \operatorname{atan2}(\dot{e}, e))|$ 는 법선 거리이고, 여기서 $\theta_s = \operatorname{atan2}(\lambda \dot{e}, e)$ 는 스위칭 라인의 각도를 나타낸다. 이러한 r 과 rd 를 크리스프 입력으로 사용하며, 퍼지 규칙을 결정하기 위해 PZ, PS, PM, PB 의 네 가지 즉, *Positive Zero, Positive Small, Positive Medium, Positive Big*로 각각 퍼지 분할한다. PZ 은 퍼지 변수값이 스위칭 라인 또는 원점에 매우 근접해 있으므로 소속 함수의 범위를 좁게 하고 PS 는 PZ 보다 더 넓은 범위로, 즉 $PZ < PS < PM < PB$ 로 범위를 결정한다. 그리고 앞 장의 도달 법칙에서 K 와 Q 의 물리적인 성질에 따라 소속 함수의 범위를 $PZ < PS < PM < PB$ 로 결정한다.

K 와 Q 에 대하여 제안된 제어 규칙은 다음의 표1과 표2에서와 같다.

표 1. K에 대한 제안된 제어 규칙.

Table 1. Proposed rules for K.

$rd \backslash r$	PZ	PS	PM	PB
PZ	PZ	PZ	PS	PM
PS	PZ	PS	PM	PM
PM	PS	PS	PM	PB
PB	PS	PM	PB	PB

표 2. Q에 대한 제안된 제어 규칙.

Table 2. Proposed rules for Q.

$rd \backslash r$	PZ	PS	PM	PB
PZ	PZ	PZ	PZ	PS
PS	PZ	PS	PS	PM
PM	PS	PM	PM	PB
PB	PM	PM	PB	PB

표1에서 음영이된 부분을 언어적 표현을 사용하여 나타내면 다음과 같다.

[Rule 11] IF r is PZ and IF rd is PZ, THEN K is PZ
 [Rule 22] IF r is PS and IF rd is PS, THEN K is PS
 [Rule 33] IF r is PM and IF rd is PM, THEN K is PM
 [Rule 44] IF r is PB and IF rd is PB, THEN K is PB
 이 규칙들을 상술하면, [Rule 11]은 표시점이 원점에 가까이 있고 스위칭 라인으로 부터도 가까이 있는 경우에는 아주 작은 값의 K 로 결정함을 나타낸다. 즉, 시스템의 상태가 원점 근처에 그리고 스위칭 라인 근처에 존재하므로 K 의 값은 아주 작게 설정함을 의미한다. [Rule 44]는 표시점이 원점에서 매우 멀리 떨어져 있으며 스위칭 라인으로 부터도 매우 멀리 떨어져 있는 경우에는 큰 값의 K 로 결정함을 나타낸다. 즉, 시스템의 초기상태가 도달 모드에 존재하는 경우로 빠르게 슬라이딩 모드에 도달시키기 위하여 도달계수 K 값을 크게 설정함을 의미한다.

표2에서 음영이된 부분을 언어적 표현을 사용하여 나타내면 다음과 같다.

[Rule 11] IF r is PZ and IF rd is PZ, THEN Q is PZ
 [Rule 12] IF r is PS and IF rd is PZ, THEN Q is PZ
 [Rule 13] IF r is PM and IF rd is PZ, THEN Q is PZ
 [Rule 14] IF r is PB and IF rd is PZ, THEN Q is PS
 이 규칙들에서 rd 가 모두 PZ로 시스템의 상태가 스위칭 라인 근처에 존재하는 경우를 나타낸다. [Rule 11]는 표시점이 원점에 가까이 있고 스위칭 라인에도 가까이 있는 경우에는 아주 작은 값의 Q 로 결정함을 나타낸다. 즉, 시스템의 상태가 원점 근처에 그리고 스위칭 라인 근처에 존재하는 경우로 Q 의 값이 아주 작게 설정되면 채터링을 없앨 수 있음을 의미한다. [Rule 14]는 표시점이 원점에서 멀리 떨어져 있으나 스위칭 라인 근처에 존재하는 경우에도 작은 값의 Q 로 결정함을 나타낸다. 즉, 시스템의 상태가 이미 슬라이딩 모드에 존재하는 경우로 채터링을 없애기 위해서는 도달계수 값을 작게 설정함을 의미한다.

마지막으로 표1과 표2에서의 퍼지 제어 규칙을 사용하고, 퍼지 관계의 합성은 최대최소(maxmin) 연산자를 사용하였으며, 비퍼지화 연결부에서는 면적중심법(center of area method)을 사용하여 크리스프한 값의 도달계수 K 와 Q 를 얻는다.

IV. 시뮬레이션 및 고찰

제어 대상 시스템은 그림3에서와 같은 2링크 로봇 매니퓰레이터로서 다음식으로 표현된다[3].

$$M(q)\ddot{q} + n(q, \dot{q}) = \tau + f(q, \dot{q}, p, t) \quad (20)$$

여기서 q, n, τ, f 는 모두 이차원 벡터이며, q 는 좌표 벡터이고, $M(q)$ 는 관성 행렬이며, $n(q, \dot{q})$ 은 원심력, Coriolis 항 및 중력의 합을 나타내고, τ 는 제어 토크이며,

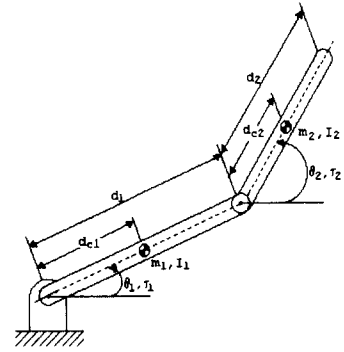


그림 3. 2링크 로봇 매니퓰레이터.

Fig. 3. Geometry of a two link robot manipulator.

$f(q, \dot{q}, p, t)$ 는 섭동 및 외란을 나타낸다.

(20)의 2링크 로봇의 동특성 방정식을 Lagrangian 방정식을 이용하여 표현하면

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -n\dot{q}_2 & -n\dot{q}_1 - n\dot{q}_2 \\ n\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

이고, 여기서

$$\begin{aligned} M_{11} &= m_1 d_{e1}^2 + I_1 + m_2(d_{e1}^2 + d_{e2}^2 + 2d_{e1}d_{e2}\cos q_2) + I_2 \\ M_{22} &= m_2 d_{e2}^2 + I_2 \\ M_{12} &= M_{21} = m_2 d_{e1}d_{e2}\cos q_2 + m_2 d_{e2}^2 + I_2 \\ n &= m_2 d_{e1}d_{e2}\sin q_2 \end{aligned}$$

이며, 시뮬레이션에서 사용한 값은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m_1 &= 20\text{kg}, m_2 = 10\text{kg}, I_1 = 0.8\text{kgm}^2, \\ I_2 &= 0.2\text{kgm}^2, d_1 = d_2 = 1\text{m}, d_{c1} = d_{c2} = 0.5\text{m}, \\ \theta_1 &= 30^\circ, \theta_2 = 70^\circ \end{aligned}$$

시스템의 상태 변수를 다음과 같이 정의하고

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (22)$$

(22)를 미분하여 다시 정리하면

$$\dot{x} = a(x) + B(x)u + d(x, p, t) \quad (23)$$

로 표현할 수 있으며, 여기서

$$\begin{aligned} u &= \tau \quad d(x, p, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(x)f(x, p, t) \end{bmatrix} \\ a(x) &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -M^{-1}(x)n(x) \end{bmatrix} \quad B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

이고, $d(x, p, t) = B(x)f(x, p, t)$ 로서 매칭 조건을 만족하는 것으로 가정한다. 그러므로 슬라이딩 모드와 도달 모드에서의 불변성은 항상 성립하게 된다.

기준값을 q^d 로 정의하여 오차 벡터를 나타내면 다음과 같다.

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - q^d \\ x_2 - \dot{q}^d \end{bmatrix} \quad (25)$$

그리고 이차원 벡터의 스위칭 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$s(e) = Ce = [\Lambda \ I] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \Lambda e_1 + \dot{e} \quad (26)$$

여기서 Λ 는 스위칭 함수가 안정하도록 결정한다. (26)을 미분하여 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{s}(e) = \Lambda \dot{e}_1 - M^{-1}(n-f-u) - \ddot{q}^d \quad (27)$$

도달 법칙 (13)을 (27)에 대입하여 제어 입력 u 에 대해서 정리하면 다음과 같다.

$$u = -M\{Ks + Q \operatorname{sgn}(s) + \Lambda \dot{e}_1 - \ddot{q}^d\} + n - f \quad (28)$$

여기서 $\Lambda = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2] = \operatorname{diag}[3, 3]$ 으로 선택하고, 벡터 f 는 유계되어 있으며 도달 조건을 위배하지 않는 것으로 가정한다.

앞 장의 퍼지 논리에서 r_1, rd_1 그리고 r_2, rd_2 의 각각에 대한 소속 함수는 그림4와 그림5에서와 같으며, 그림에서 시스템의 상태가 스위칭 평면에서 멀리 떨어져 있어 도달 모드에 존재하는 경우에는 빠르게 슬라이딩 모드에 도달하도록 r 과 rd 를 선택하도록 소속 함수에서 넓은 범위로 정하며, 시스템의 상태가 슬라이딩 모드 근처에 머무르게 되면 rd 의 소속 함수를 더욱 세분화하여 채터링을 줄이도록 함을 알 수 있다.

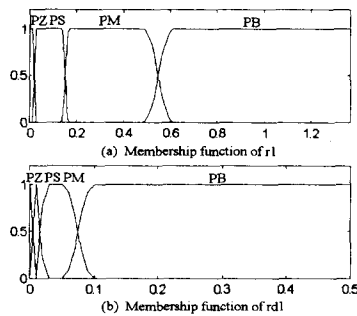


그림 4. r_1 과 rd_1 에 대한 소속 함수.
Fig. 4. Membership functions of r_1 and rd_1 .

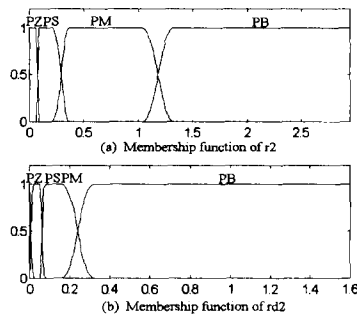


그림 5. r_2 과 rd_2 에 대한 소속 함수.
Fig. 5. Membership functions of r_2 and rd_2 .

퍼지 논리에서 K_1, Q_1 그리고 K_2, Q_2 의 각각에 대한 소속 함수는 그림6과 그림7에서와 같다.

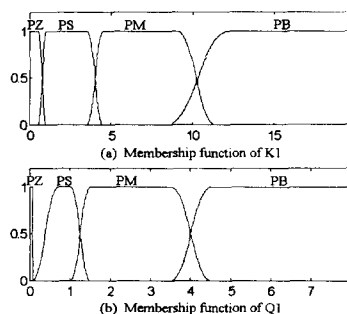


그림 6. K_1 과 Q_1 에 대한 소속 함수.
Fig. 6. Membership functions of K_1 and Q_1 .

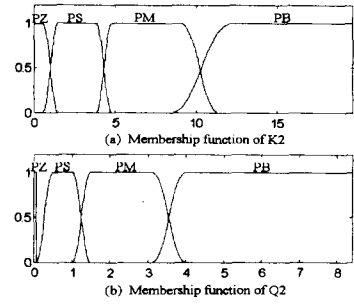


그림 7. K_2 과 Q_2 에 대한 소속 함수.
Fig. 7. Membership functions of K_2 and Q_2 .

그림6과 그림7에서 시스템의 상태가 스위칭 평면에서 멀리 떨어져 있어 도달 모드에 존재하는 경우에는 시스템 상태를 빠르게 슬라이딩 모드에 도달시키기 위해, K 와 Q 에 대한 소속 함수는 다소 넓은 범위로 정한다. 그리고 시스템의 상태가 슬라이딩 모드 근처에 머무르게 되면 K 는 작은 값으로 시스템 상태를 스위칭 평면으로 흡인시키고, Q 는 아주 작은 값으로 채터링을 줄이도록 하는 세분화된 소속 함수를 사용한다. 그리고 앞 장에서의 표1과 표2에서의 규칙을 사용하여 크리스프한 K_1, Q_1 그리고 K_2, Q_2 를 3차원 그림으로 나타내면 그림 8과 그림9에서와 같다.

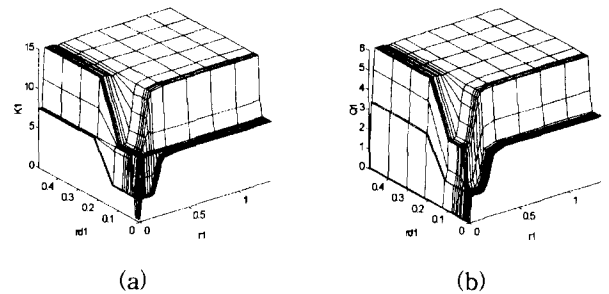


그림 8. r_1 과 rd_1 에 대한 K_1, Q_1 값.
(a) K_1 값 (b) Q_1 값

Fig. 8. K_1, Q_1 versus r_1 and rd_1 .
(a) K_1 values (b) Q_1 values

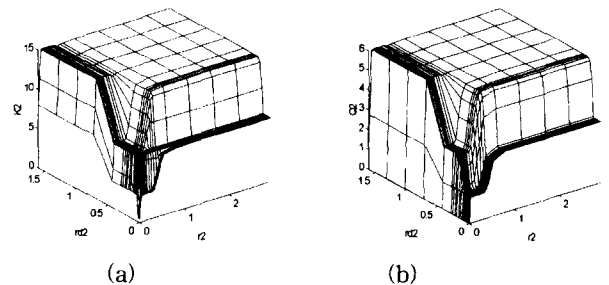


그림 9. r_2 과 rd_2 에 대한 K_2, Q_2 값.
(a) K_2 값 (b) Q_2 값

Fig. 9. K_2, Q_2 versus r_2 and rd_2 .
(a) K_2 values (b) Q_2 values

앞의 퍼지 도달 법칙을 구성하여 2링크 로봇 매니플레이터에 대한 컴퓨터 시뮬레이션은 다음의 세 경우로 나누어 수행하였다.

1. 잡음이 없는 경우
첫 번째로는 잡음이 없는, 즉 $f_1 = f_2 = 0$ 인 경우에 대한

컴퓨터 시뮬레이션으로, 기존의 도달 법칙[3]에 대한 결과와 제안한 퍼지 도달 법칙에 대한 결과를 다음의 그림10에서와 그림11에서 각각 나타내었다. 그림10에서 (a)는 제어 입력, 즉 토크, (b)는 스위칭 평면의 시간 궤적, (c)는 링크 각 θ_1, θ_2 의 오차 e_1, e_2 를 각각 나타낸다.

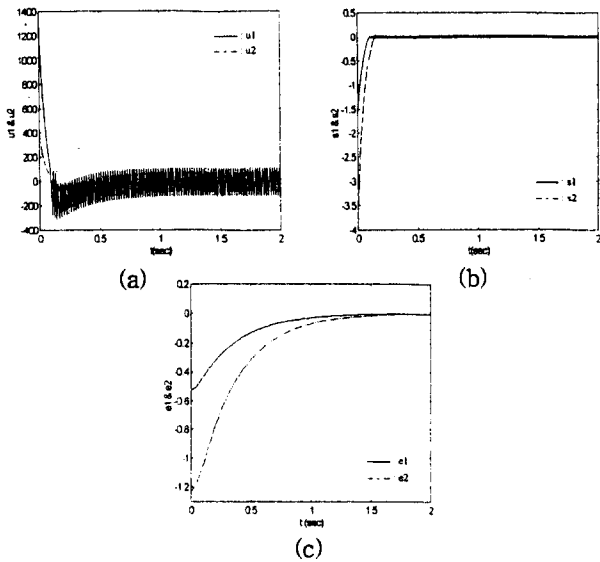


그림 10. 로봇 매니퓰레이터에 대한 기존의 도달 법칙을 가지는 가변구조 제어: 잡음이 없는 경우. (a) 제어 입력 u_1, u_2 , (b) 스위칭 평면의 시간 궤적 s_1, s_2 , (c) 각도 오차 e_1, e_2 .
 Fig. 10. VSC with conventional reaching law for robot manipulator: no disturbances. (a) Control input u_1, u_2 , (b) Time trajectory of switching surfaces s_1, s_2 , (c) angle errors e_1, e_2 .

그림10에서 기존의 도달 법칙을 가지는 가변구조 제어는 도달 모드에서 도달 시간을 감소시킬 수는 있으나 슬라이딩 모드에 도달하여 채터링이 심하게 발생함을 알 수 있다. 다음으로 제안한 퍼지 도달 법칙의 초기 조건은 같은 값을 사용하여 시뮬레이션 하였다. 그림 11에서 (a)는 제어 입력, 즉 토크, (b)는 스위칭 평면의 시간 궤적, (c)는 링크 각 θ_1, θ_2 의 오차 e_1, e_2 , (d)와 (e)는 퍼지 규칙을 가지는 K_1, K_2 , 그리고 Q_1, Q_2 를 각각 나타낸다.

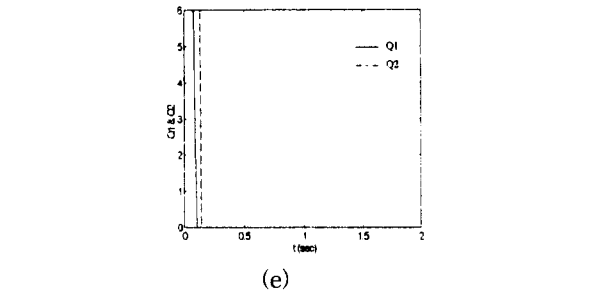
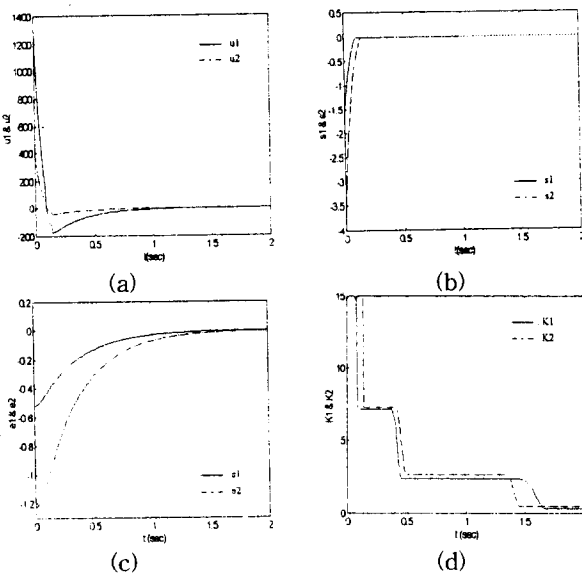


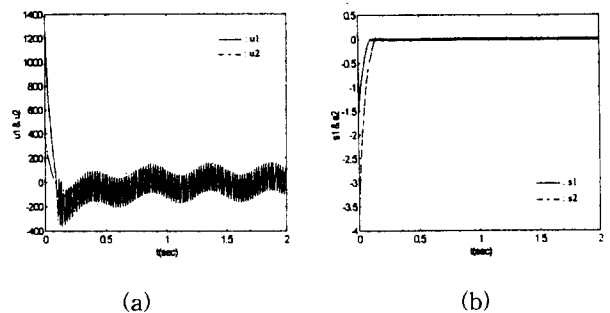
그림 11. 로봇 매니퓰레이터에 대한 퍼지 도달 법칙을 가지는 가변구조 제어: 잡음이 없는 경우. (a) 제어 입력 u_1, u_2 , (b) 스위칭 평면의 시간 궤적 s_1, s_2 (c) 각도 오차 e_1, e_2 (d) 도달 법칙의 계수 $K=[K_1 K_2]^T$ 의 시간 궤적 (e) 도달 법칙의 계수 $Q=[Q_1 Q_2]^T$ 의 시간 궤적.

Fig. 11. VSC with fuzzy reaching law for robot manipulator: no disturbances. (a) Control input u_1, u_2 (b) Time trajectory of switching surfaces s_1, s_2 (c) angle errors e_1, e_2 (d) Time trajectory of coefficients $K=[K_1 K_2]^T$ of reaching law (e) Time trajectory of coefficients $Q=[Q_1 Q_2]^T$ of reaching law

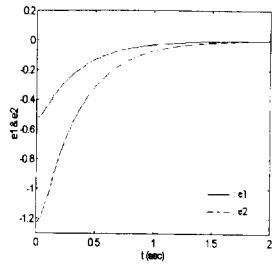
그림 11에서와 같이 도달 법칙은 표시점의 r 과 rd 를 퍼지 입력 변수로 사용하여 적절한 퍼지 규칙에 따른 도달계수 K 와 Q 를 가짐을 알 수 있다. 도달 모드에서의 제안한 퍼지 도달 법칙은 큰 값의 K 와 Q 로 인해 도달 시간을 줄일 수 있고, 슬라이딩 모드에서는 특히 Q 를 아주 작은 값으로 유지하여 채터링을 없앨 수 있음을 확인할 수 있다. 그러므로 Gao 등[3]이 제안한 도달 법칙이 일정한 도달계수를 가짐으로 인해 시스템 상태의 도달 시간을 개선할 수는 있어도 슬라이딩 모드에서의 채터링이 항상 존재하는 문제점을 가진데 비해서 제안한 퍼지 도달 법칙은 도달 시간에 크게 영향을 끼치는 K 와 채터링에 크게 영향을 끼치는 Q 를 시스템의 상태에 따라 적절히 가변할 수 있어 이러한 문제점을 개선할 수 있음을 확인할 수 있다.

2. 잡음이 존재하는 경우

두 번째 경우는 잡음이 존재하는 시스템에 대한 시뮬레이션으로 $f_1 = f_2 = 50\sin(4\pi t)$ 의 주기적인 잡음을 고려한다 [3]. 이 경우 잡음 f_1, f_2 는 각각 ± 50 으로 유계되어 있다. 컴퓨터 시뮬레이션으로 기존의 도달 법칙에 대한 결과와 제안한 퍼지 도달 법칙에 대한 결과를 다음의 그림12에서와 그림13에서 각각 나타내었다. 그림12에서 (a)는 제어 입력, 즉 토크, (b)는 스위칭 평면의 시간 궤적, (c)는 링크 각 θ_1, θ_2 의 오차 e_1, e_2 를 각각 나타낸다.



(a) (b)



(c)

그림 12. 로봇 매니퓰레이터에 대한 기존의 도달 법칙을 지는 가변구조 제어:

잡음; $f_1 = f_2 = 50 \sin(4\pi t)$

(a) 제어 입력 u_1, u_2 . (b) 스위칭 평면의 시간 궤적 s_1, s_2 (c) 각도 오차 e_1, e_2

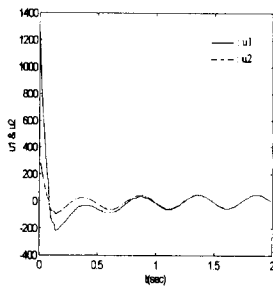
Fig. 12. VSC with conventional reaching law for robot manipulator:

disturbances; $f_1 = f_2 = 50 \sin(4\pi t)$.

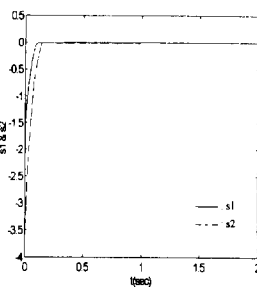
(a) Control input u_1, u_2 (b) Time trajectory of switching surfaces s_1, s_2 (c) angle errors e_1, e_2 .

그림12에서 기존의 도달 법칙을 가지는 가변구조 제어는 잡음이 존재하는 경우 슬라이딩 모드에 도달하여 채터링이 심하게 발생함을 알 수 있다. 다음으로 제안한 퍼지 도달 법칙의 초기 조건을 같은 값을 가지도록 설정하여 시뮬레이션 하였다. 그림 13에서 (a)는 제어 입력, 즉 토오크, (b)는 스위칭 평면의 시간 궤적, (c)는 링크 각 θ_1, θ_2 의 오차 e_1, e_2 , (d)와 (e)는 퍼지 규칙을 가지는 K_1, K_2 , 그리고 Q_1, Q_2 를 각각 나타낸다.

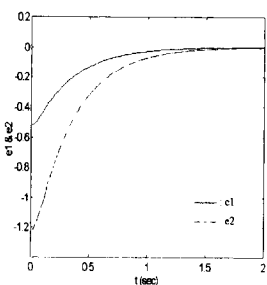
그림13에서 유계의 잡음이 존재하는 시스템의 경우에도 기존의 도달 법칙에 비해 퍼지 도달 법칙을 가지는 가변구조 제어는 슬라이딩 모드에서 채터링을 매우 줄일 수 있으며, 전체 시스템에서의 건설 안정한 응답을 얻을 수 있음을 보였다. 제안된 퍼지 도달 법칙은 유계의 잡음을 가지는 시스템에 대해서도 적용가능함을 확인할 수 있다.



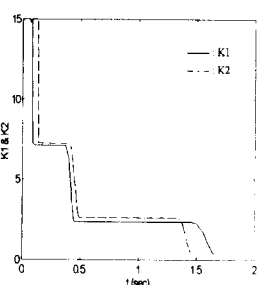
(a)



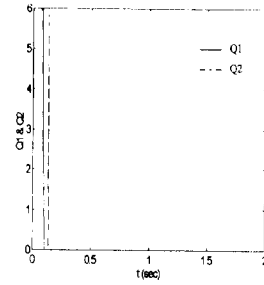
(b)



(c)



(d)



(e)

그림 13. 로봇 매니퓰레이터에 대한 퍼지 도달 법칙을 가지는 가변구조 제어:

잡음; $f_1 = f_2 = 50 \sin(4\pi t)$.

(a) 제어 입력 u_1, u_2 . (b) 스위칭 평면의 시간 궤적 s_1, s_2 (c) 각도 오차 e_1, e_2 (d) 도달 법칙의 계수 $K=[K_1 K_2]^T$ 의 시간 궤적 (e) 도달 법칙의 계수 $Q=[Q_1 Q_2]^T$ 의 시간 궤적.

Fig. 13. VSC with fuzzy reaching law for robot manipulator:

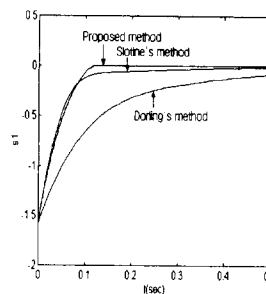
disturbances; $f_1 = f_2 = 50 \sin(4\pi t)$.

(a) Control input u_1, u_2 (b) Time trajectory of switching surfaces s_1, s_2 (c) angle errors e_1, e_2 (d) Time trajectory of coefficients $K=[K_1 K_2]^T$ of reaching law (e) Time trajectory of coefficients $Q=[Q_1 Q_2]^T$ of reaching law.

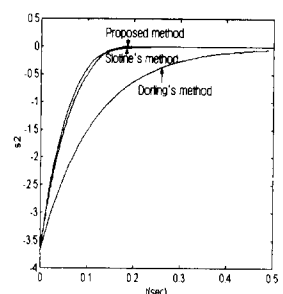
3. 채터링을 없애는 방법들과의 비교

채터링을 없애는 방법에는 Slotine[10]의 포화 함수와 유계층을 사용한 연속 근사화 방법, 즉 (13)의 도달 법칙에서 $\text{sgn}(s)$ 대신 $s/(\|s\| + \delta)$ 를 사용한 것과 Dorling 등[11]의 개선된 단위 벡터 형태의 연속 근사화 방법, 즉 $\text{sgn}(s)$ 대신 $\text{sat}(s/\epsilon)$ 를 사용한 것이 있는데, 이러한 방법들과 제안한 퍼지 도달 법칙 방법을 서로 비교하여 보면 다음의 그림14에서와 같다.

여기서 그림(a)와 (b)는 링크1과 2에 대한 스위칭 함수의 시간 궤적을 각각 나타내며, 그림(c)와 (d)는 링크1과 2의 상태가 미리 설정된 스위칭 평면에 도달하는 궤적을 각각 나타낸다. 연속 근사화 방법들은 각각의 ϵ 과 δ 에 의해 채터링은 없앨 수 있으나 이러한 값들로 인하여 스위칭 평면에 도달하는 시간이 느려지고 또한 정확성이 감소함을 알 수 있다. 그리고 연속 근사화에 사용된 방법 보다는 퍼지 도달 법칙을 사용하여 도달 계수를 변화시킴으로써 더욱 좋은 결과를 얻을 수 있음을 확인하였다.



(a)



(b)

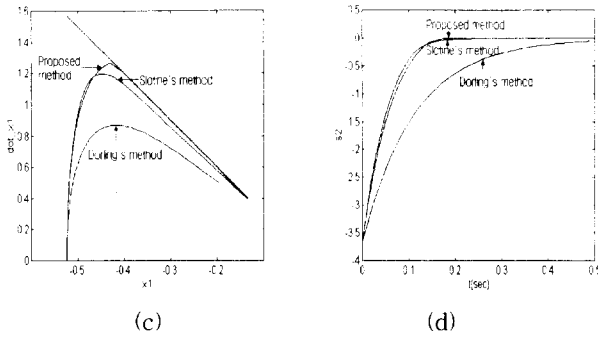


그림 14. 연속 근사화 방법들과 제안한 퍼지 도달 법칙 방법과의 비교.
 (a) 스위칭 평면의 시간 궤적 s_1 , (b) 스위칭 평면의 시간 궤적 s_2 , (c) 위상 평면 x_1, \dot{x}_1
 (d) 위상 평면 x_2, \dot{x}_2 .

Fig. 14. Comparison of continuous approximation methods and proposed fuzzy reaching law method.
 (a) Time trajectories of switching surface s_1 , (b) Time trajectories of switching surface s_2 , (c) Phase planes of x_1 and \dot{x}_1 ,
 (d) Phase planes of x_2 and \dot{x}_2 .

V. 결론

본 논문에서는 비선형 시스템에 대한 가변구조 제어를 퍼지 도달 법칙 방법을 사용하여 설계하였다. 제안된 퍼지 도달 법칙 방법은 시스템의 초기상태를 스위칭 평면으로 흡인하는 도달 모드에서와 시스템의 상태가 스위칭 평면 근처에서 슬라이딩 운동을 유지하는 슬라이딩 모드에서 각각 도달 시간과 채터링을 감소시킬 수 있다. 기존의 도달 법칙이 임의의 고정된 도달계수를 가지므로 고정된 도달 시간 및 채터링을 가지는 단점을 가지고 있는데 반해, 제안된 퍼지 도달 법칙을 도달 시간에 매우 큰 영향을 끼치는 도달계수 K 값과 채터링에 매우 큰 영향을 끼치는 도달계수 Q 값을 가변할 수 있도록 퍼지 추론을 도입하여 설계함으로써 도달 시간과 채터링의 문제점을 개선할 수 있음을 살펴 보았다. 그리고 2링크 로봇 매니플레이터에 대한 컴퓨터 시뮬레이션에서 잡음이 없는 경우와 유계의 주기적인 잡음이 있는 경우에 대한 결과를 통하여 기존의 도달 법칙을 가지는 가변구조 제어와 제안한 퍼지 도달 법칙을 가지는 가변구조 제어의 특성과 타당성을 제어 입력과 스위칭 평면의 시간 궤

적 및 시스템 오차의 변화를 통하여 살펴보았다. 마지막으로 채터링을 없애는 문제에 대하여 기존의 포화 함수와 유계층을 사용한 방법과 개선된 벡터 형태를 사용한 연속 근사화 방법들과 비교하여 제안한 퍼지 도달 법칙 방법의 우수성과 타당성을 확인하였다.

참고문헌

- [1] V. I. Utkin, *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer-Verlag, 1992.
- [2] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, "Variable structure control: A survey," *IEEE Trans. Industr. Electron.*, vol. 40, pp. 2-27, 1993.
- [3] W. Gao and J. C. Hung, "Variable structure control of nonlinear systems: a new approach," *IEEE Trans. Industr. Electron.*, vol. 40, pp. 45-55, 1993.
- [4] M. Jamshdi, N. Vadiiee and T. J. Ross, *Fuzzy Logic and Control*, Prentice-Hall, 1993.
- [5] L. -X. Wang, *Adaptive Fuzzy Systems and Control*, Prentice-Hall, 1994.
- [6] S. -C. Lin and C. -C. Kung, "A linguistic fuzzy-sliding mode controller," *Proceedings of ACC, 1992, Chicago*, pp. 1904-1905.
- [7] A. Meystel, Y. Nisenzon and R. Nawathe, "Merger of rule based and variable structure controller," *IEEE conference on Control Applications*, pp. 735-740, Sep., 1993.
- [8] R. Palm, "Robust control by fuzzy sliding mode," *Automatica*, vol. 30, no. 9, pp. 1429-1437, 1994.
- [9] Y. -R. Hwang and M. Tomizuka, "Fuzzy smoothing algorithms for variable structure systems," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 2, no. 4, Nov., 1994.
- [10] J.-J. E. Slotine, "Sliding controller design for non-linear systems," *Int. J. Control*, vol. 40, no. 2, pp. 421-434, 1984.
- [11] C. M. Dorling and A. S. I. Zinober, "Two approaches to hyperplane design in multivariable variable structure systems," *Int. J. Control*, vol. 44, no. 1, pp. 65-82, 1986.



사공성대

1986년 경북대 전자공학과 졸업, 연세대 대학원 석사(1989), 1996년 ~ 현재 경북대 대학원 박사과정, 영동공과대학교 전자공학부 전임강사. 관심 분야는 비선형제어, 가변구조제어 및 응용, 퍼지제어 및 응용.



이연정

1984년 한양대 전자공학과 졸업, 한국과학기술원 석사(1986), 동대학원 박사(1994), 1986년 ~ 1989년 한국기계연구원 연구원, 1994년 ~ 1995년 한국과학기술원 정보전자연구소 연수연구원, 1996년 현재 ~ 경북대학교 전자전기공학부 전임강사. 관심분야는 퍼지제어, 학습제어 및 보행로봇 제어.

최봉열

제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지 제 1 권 제 2 호 82쪽 참조