

리아프노브 안정성이 보장되는 신경회로망을 이용한 비선형 시스템 제어

Nonlinear System Control Using Neural Network Guaranteed Lyapunov Stability

성 흥 석, 이 쾌 희
(Hong-Seok Seong and Kwae-Hi Lee)

Abstract : In this paper, we describe the algorithm which controls an unknown nonlinear system with multilayer neural network. The multilayer neural network can be used to approximate any continuous function to any desired degree of accuracy. With the former fact, we approximate unknown nonlinear function on the nonlinear system by using of multilayer neural network. The weight-update rule of multilayer neural network is derived to satisfy Lyapunov stability. The whole control system constitutes controller using feedback linearization method. The weight of neural network which is used to implement nonlinear function is updated by the derived update-rule. The proposed control algorithm is verified through computer simulation.

Keywords : multilayer neural network, nonlinear system control, Lyapunov stability

I. 서론

지금까지의 비선형 시스템 제어는 적응 제어, 리아프노브에 기초한 제어, 가변 구조 제어등 세 가지가 대표적인 접근 방법으로 알려져 있다. 특히, 비선형 시스템의 궤환 선형화 기법이 비선형 제어기 설계에 널리 알려져 있다. 그러나, 이는 시스템의 정확한 동력학 방정식을 알고 있어야 한다 [1]-[3].

신경회로망은 학습을 통하여 임의의 함수를 근사화할 수 있고, 병렬 처리와 fault tolerance를 성취시키기가 용이하다. 즉, 정확히 알지 못하는 시스템의 동력학 방정식을 신경회로망을 사용하여 근사화 시킬 수 있다. 제어 관점에서 가장 널리 사용되는 신경회로망 구조는 오차 역전파 알고리즘을 이용하는 다층 신경회로망이다. 역전파 알고리즘을 이용한 3층 신경회로망은 어떤 원하는 정확한 정도까지 비선형 함수를 근사화할 수 있다[4]. 수학적으로 시스템을 정확히 모델링 하는데는 어려움이 많으므로 이를 해결하는 방법으로 다층 신경회로망에 기초한 제어기가 많이 제안되었다 [5]-[7].

신경회로망을 이용한 대부분의 제어 알고리즘은 신경회로망의 가중치를 갱신하는데 그래디언트(gradient) 방법을 기초로 하고 있으나, 이 갱신 법칙의 안정도에 대한 어떤 정보를 제공하고 있지 않다. 최근에 신경회로망을 이용한 제어 시스템의 안정도에 대한 연구가 발표되고 있다. Yesildirek는 로봇 매니플레이터의 동력학 방정식의 성질과 리아프노브 함수로부터 신경회로망의 가중치 갱신 법칙을 얻어 로봇 매니플레이터 제어를 모의 실험하였다[8]. Jin은 신경회로망으로 RBF(radial basis function)이나 CMAC(cerebellar model articulation controller)를 사용하여 원하는 출력과 시스템 출력 사이의 오차가 한정됨을 보였다[9]. Jin은 신경회로망의 가중치 갱신법칙을 dead-zone 함수를 갖는 수정된 역전파 알고리즘을 사용하였으며, 출력 오차가 0으로 수렴함을 보이고, 이를 이용하여 전체 폐루프 시스템이 안정함을 보였다[10][11]. Renders는 RBF 신경회로망을 사용하고, 리아프노브 식에 기초하여 비선형 시스템의 입출력 안정도

를 증명하였다[12]. Seong은 출력층 가중치 갱신 법칙을 리아프노브 안정성이 보장되도록 유도하였으며[13], 본 논문은 이 논문의 확장으로 은닉층 가중치의 갱신 법칙을 리아프노브 안정성이 보장되도록 유도하였다.

본 논문에서는 리아프노브 함수를 정의하여 리아프노브 안정도가 만족되도록 다층 신경회로망의 가중치 갱신 법칙을 유도한다. 전체 제어기는 궤환 선형화 기법을 이용한 제어기로 구성된다. 궤환 선형화 기법을 이용한 제어기에서 비선형 함수는 3층 신경회로망으로 구현되며, 가중치는 유도된 갱신 법칙을 이용하여 갱신한다. 본 논문의 구성은 II절에서 비선형 시스템을 제어하기 위한 궤환 선형화 기법에 대해서 기술하고, III절에서 다층 신경회로망과 가중치 갱신 법칙에 대하여 논의한다. IV절에서 신경회로망을 이용하여 II절에서 기술한 제어기를 어떻게 구현하는지를 설명하고, V절에서 전체적인 제어 시스템 구조와 리아프노브 안정도를 만족하는 신경회로망의 가중치 갱신 법칙을 유도한다. VI절에서는 V절에서 설명한 제어 시스템을 비선형 시스템에 적용하여 알고리즘의 성능을 검증하고, VII절에서 결론을 맺는다.

II. 비선형 시스템

본 절에서는 시스템에 대한 가정보 비선형 시스템의 표준식을 정의하고, 이 시스템을 제어하기 위한 궤환 선형화 기법에 대하여 기술한다. 먼저, 시스템에 대해 다음과 같은 가정을 둔다.

가정 1: $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 유한(bound)하며 $g(x) \neq 0$ 이다.

가정 2: 임의의 compact 영역 R^n 에서 이상적인 출력층 가중치는 알고 있는 양수에 의해 제한된다. 즉, 알고 있는 양수가 w_{fm}, w_{gm} 이면, $\|w_f^*\| < w_{fm}, \|w_g^*\| < w_{gm}$ 이다.

가정 3: 원하는 시스템 상태(desired state)와 그것의 도함수는 유한하다.

하나의 입력과 하나의 출력을 갖는 비선형 시스템은

$$y^{(n)} = f(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) + g(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})u \quad (1)$$

처럼 표현된다. 여기서, y 는 시스템 출력이고 u 는 시스템 입력이며, $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 는 비선형 함수이다. 상태 변수 x 을 아래와 같이 정의하여

$$\begin{aligned} x^T &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n-1)}) \end{aligned} \quad (2)$$

(1)을 상태 공간 모형(state space model)으로 표현하면,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n)u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (3)$$

와 같이 표현된다. 이제, 추적 오차를 $e = y_d - y$ (y_d 는 원하는 시스템 출력이고 y 는 시스템 출력이다.)로 정의하고, 비선형 시스템의 비선형 함수 $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 을 정확히 알고 있다면 (1)의 비선형 시스템이 원하는 출력을 따라 가도록 하는 제어 입력 u 는 다음과 같이 표현할 수 있다[2].

$$u = \frac{-f(x) + y_d^{(n)} + k^T e}{g(x)} \quad (4)$$

이고, 여기서, $k^T = (k_1, \dots, k_n)$ 는 $h(s) = s^n + k_n s^{n-1} + \dots + k_1$ 이 Hurwitz가 되도록 임의로 선택한 벡터이다. 그리고 e 는 (5)처럼 정의된 추적 오차 벡터이다.

$$\begin{aligned} e^T &= (e, e^{(1)}, \dots, e^{(n-1)}) \\ &= (y_d - y, y_d^{(1)} - y^{(1)}, \dots, y_d^{(n-1)} - y^{(n-1)}) \end{aligned} \quad (5)$$

위 (1)에 제어 입력 (4)를 대입하면 다음과 같은 오차 방정식을 얻을 수 있기 때문에

$$e^{(n)} + k_n e^{(n-1)} \dots + k_1 e = 0 \quad (6)$$

k 가 Hurwitz를 만족하도록 선택된 벡터이므로 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 임을 알 수 있다. 즉, (4)와 같은 제어 입력을 사용하면 (1)처럼 표현된 비선형 시스템의 출력은 원하는 시스템 출력을 따라 가게 할 수 있다.

III. 다층 신경회로망 (Multilayer Neural Network)

임의의 비선형 함수는 신경회로망을 이용하여 원하는 정당한 정도까지 근사화 시킬 수 있다. 이와 같은 사실을 다음과 같이 정리할 수 있다[4].

정리 : 가중치가 V_f^* , w_f^* , V_g^* , w_g^* 인 신경회로망 $\hat{f}(x, V_f^*, w_f^*)$, $\hat{g}(x, V_g^*, w_g^*)$ 는 compact영역에서 임의의 정도 ϵ_f, ϵ_g 이내로 연속 함수 $f(x)$, $g(x)$ 를 근사화 시킬 수 있다. 즉,

$$\max | \hat{f}(x, V_f^*, w_f^*) - f(x) | \leq \epsilon_f$$

$$\max | \hat{g}(x, V_g^*, w_g^*) - g(x) | \leq \epsilon_g, \text{ 모든 } x \in C$$

이다. 여기서, C 는 유한 차수의 compact 영역이다.

이 정리를 이용하여 비선형 시스템에서의 비선형 함수를 신경회로망을 이용하여 다음과 같이 구현할 수 있다.

$$\hat{f} = w_f^T s(V_f^T x), \hat{g} = w_g^T s(V_g^T x) \quad (7)$$

여기서, V_f, V_g 는 각각 비선형 함수 $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 을 근사화 하기 위한 다층 신경회로망의 은닉층의 가중치 행렬 ($n_i \times n_h$)이며, w_f, w_g 는 출력층 가중치 벡터 ($n_i \times 1$)이고 n_i 는 입력층의 입력의 수이고 n_h 는 은닉층의 뉴런의 수이다. 그리고 $s(\cdot)$ 는 활성화 함수로 다음과 같은 시그모이드 (sigmoid) 함수를 사용한다.

$$s(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (8)$$

위 (7)과 같이 정의된 다층 신경회로망의 각 가중치는 다음과 같이 갱신한다. 먼저, 은닉층의 가중치는 (9)와 같은 갱신 법칙으로 갱신된다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_f &= -r_f e^T P b w_{f_m} D_{p_x} M_{R_f} \\ \dot{V}_g &= -r_g e^T P b w_{g_m} D_{p_x} M_{R_g} u \end{aligned} \quad (9)$$

여기서, D_{p_x} 는 벡터 p_x 의 성분을 대각선 성분으로 갖는 대각선 행렬로 $D_{p_x} = \text{diag}[p_{x1}, p_{x2}, \dots, p_{xn}]$ 와 같이 표현되며, p_x 는 각 성분이 벡터 x 의 각 성분의 절대값으로 이루어진 벡터로 $p_x = [|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|]^T$ 로 표현된다.

M_R 은 각 행의 성분이 모두 같은 $n_i \times n_h$ 행렬로 (10)과 같이 표현된다.

$$M_R = \begin{pmatrix} o_{h_1}(1-o_{h_1}) & o_{h_1}(1-o_{h_1}) & \dots & o_{h_1}(1-o_{h_1}) \\ o_{h_2}(1-o_{h_2}) & o_{h_2}(1-o_{h_2}) & \dots & o_{h_2}(1-o_{h_2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o_{h_n}(1-o_{h_n}) & o_{h_n}(1-o_{h_n}) & \dots & o_{h_n}(1-o_{h_n}) \end{pmatrix} \quad (10)$$

이 식에서 o_{h_i} 는 은닉층의 i 번째 뉴런의 출력이다. 출력층의 가중치는 (11)에 의해 갱신할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{w}_f &= -\hat{s}_f e^T P b \\ \dot{w}_g &= -\hat{s}_g e^T P b u \end{aligned} \quad (11)$$

그리고 (9)과 (11)는 V절에서 유도한다.

IV. 신경회로망을 이용한 제어기

II절에서 (1)과 같이 표현되는 비선형 시스템에서의 비선형 함수를 정확히 알고 있다면 제어 입력을 (4)처럼 할 수 있음을 알았다. 그러나, 실제 환경에서는 정확한 비선형 함수를 알 수가 없다. 따라서, 미지의 비선형 함수를 III절에서 정의한 정리를 기초로 하여 다층 신경회로망으로 구현하여 제어 입력 u 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$u = \frac{-\hat{f}(x) + y_d^{(n)} + k^T e}{\hat{g}(x)} \quad (12)$$

여기서, $\hat{f}(\cdot)$, $\hat{g}(\cdot)$ 는 비선형 함수를 다층 신경회로망으로 구현한 것이다.

오차 식을 얻기 위하여 (12)을 (1)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} \dot{e}^{(n)} &= y_d^{(n)} - y^{(n)} \\ &= -k^T e + \{\hat{f}(x) - f(x)\} + \{\hat{g}(x) - g(x)\}u \end{aligned} \quad (13)$$

를 얻을 수 있다. 여기서, 추적 오차 벡터 (5)를 $e^T = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ 와 같이 정의한 오차에 대한 상태 변수로 표현하여 (13)를 상태 방정식(state equation)으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{e} = A e + b[\{\hat{f}(x) - f(x)\} + \{\hat{g}(x) - g(x)\}u] \quad (14)$$

여기서 A, b 는 다음과 같다.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \dots & \dots & -k_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

V. Lyapunov Stability

본 절에서는 리아프노프 안정도를 만족시키는 다층 신경

회로망의 가중치 갱신 법칙((9), (12))을 유도한다. 먼저, 전제적인 페루프 제어 시스템의 블록도는 그림 1과 같다.

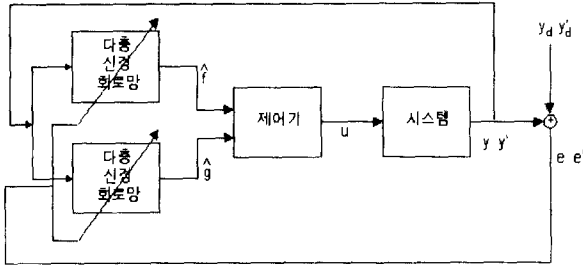


그림 1. 제어 시스템 블록도.
Fig. 1. The block diagram of control system.

다층 신경회로망의 가중치 갱신 법칙의 유도 과정에서 활용하기 위해 시그모이드 함수 $s(x)$ 의 특징에 대해 아래의 Lemma로 정리한다.

Lemma : 시그모이드 함수 $s(x)$ 는 다음과 같은 특성을 갖는다.

(1) 시그모이드 함수 $s(x)$ 는 strictly increasing 하다.

(2) $\frac{ds}{dx} \geq 0$

(3) $\check{s}(x_1, x_2) = s(x_1) - s(x_2) = \left. \frac{ds}{dx} \right|_{x=z} \hat{x}$

증명 :

(1). 아래와 같이 시그모이드 함수의 정의에 의해 자명하다.

$$s(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (16)$$

(2). 시그모이드 함수는 항상 증가 함수이므로 그것의 1차 도함수는 양수이다. 즉,

$$\frac{ds}{dx} \geq 0 \quad (17)$$

이다.

(3). 위의 (16)과 같이 정의된 $s(x)$ 는 모든 x 에 대해 연속이고 연속인 1차 도함수를 갖는다. 따라서, 평균치 정리에 의해

$$\check{s}(x_1, x_2) = s(x_1) - s(x_2) = \left. \frac{ds}{dx} \right|_{x=z} (x_1 - x_2) \quad (18)$$

이다. 여기서, z 는 x_1 과 x_2 사이의 임의의 점이다. 따라서,

$$\check{s}(x_1, x_2) = \left. \frac{ds}{dx} \right|_{x=z} \hat{x} \quad \blacksquare$$

이제 다음과 같은 이론을 정의할 수 있다.

정리 : 가정 1 ~ 가정 3하에, 다층 신경회로망의 가중치를 (9)와 (11)로 갱신하면 제어 입력 (12)은 추적 오차를 0 근처로 제한시킨다.

증명 : 먼저, 앞에서 얻었던 오차 (14)를 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\dot{e} = A e + b[\{\hat{f}(x) - \check{f}(x)\} + \{\hat{g}(x) - \check{g}(x)\}u + \varepsilon] \quad (19)$$

여기서, $\hat{f}(\cdot)$, $\hat{g}(\cdot)$ 는 최적의 다층 신경회로망 가중치를 사용했을 때 비선형 함수 값이고, $\check{f}(\cdot)$, $\check{g}(\cdot)$ 는 현 시점의 다층 신경회로망 가중치를 사용했을 때 비선형 함수 값이다. ε 은 아래 (20)와 같이 정의되며, (20)에서 $f(\cdot)$,

$g(\cdot)$ 는 비선형 함수 실제 값이다. ε 은 최적의 가중치를 사용했을 때의 신경회로망의 출력 값과 실제 비선형 함수 값의 차이이므로 III절에서 정리한 이론에 의해 ε 값은 무시할 정도로 작은 값이 된다.

$$\varepsilon = \{\hat{f}(x) - f(x)\} + \{\hat{g}(x) - g(x)\}u \quad (20)$$

이제, 아래와 같은 리아프노브 함수(Lyapunov function)를 정의하자.

$$V = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2} \tilde{w}_f^T \tilde{w}_f + \frac{1}{2} \tilde{w}_g^T \tilde{w}_g + \frac{1}{2} \frac{1}{r_f} \text{tr}[\tilde{V}_f^T \tilde{V}_f] + \frac{1}{2} \frac{1}{r_g} \text{tr}[\tilde{V}_g^T \tilde{V}_g] \quad (21)$$

여기서, \tilde{w} 는 현 시점의 다층 신경회로망의 출력층 가중치와 최적의 출력층 가중치 사이의 차이($\tilde{w} = w - w^*$)이며 \tilde{V} 는 현 시점의 다층 신경회로망의 은닉층 가중치와 최적의 은닉층 가중치 사이의 차이($\tilde{V} = V - V^*$)이다.

(21)을 미분하여 정리하면

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{e}^T P e + \frac{1}{2} e^T P \dot{e} + \tilde{w}_f^T \dot{\tilde{w}}_f + \tilde{w}_g^T \dot{\tilde{w}}_g + \frac{1}{r_f} \text{tr}[\tilde{V}_f^T \dot{\tilde{V}}_f] + \frac{1}{r_g} \text{tr}[\tilde{V}_g^T \dot{\tilde{V}}_g] \quad (22)$$

와 같이 된다. 이 식에 앞에서 구한 오차 (19)을 대입하여 정리하면 아래와 같은 식을 얻는다.

$$\dot{V} = \frac{1}{2} e^T (A^T P + P A) e + e^T P b \varepsilon + e^T P b [\{\hat{f} - \check{f}\} + \{\hat{g} - \check{g}\}u] + \tilde{w}_f^T \dot{\tilde{w}}_f + \tilde{w}_g^T \dot{\tilde{w}}_g + \frac{1}{r_f} \text{tr}[\tilde{V}_f^T \dot{\tilde{V}}_f] + \frac{1}{r_g} \text{tr}[\tilde{V}_g^T \dot{\tilde{V}}_g] \quad (23)$$

이제, 리아프노브 방정식(Lyapunov Equation)을 아래 (24)와 같이 정의 하고

$$A^T P + P A = -Q \quad (24)$$

(23)중에서 $\hat{f} - \check{f}$ 을 아래 (25)와 같이 변형하고,

$$\begin{aligned} \hat{f} - \check{f} &= w_f^T \hat{s}_f(V_f^T x) - w_f^{*T} s_f^*(V_f^{*T} x) \\ &= w_f^T \hat{s}_f - w_f^{*T} s_f^* + w_f^{*T} \hat{s}_f - w_f^{*T} \hat{s}_f \\ &= (w_f - w_f^*)^T \hat{s}_f + w_f^{*T} (\hat{s}_f - s_f^*) \\ &= \tilde{w}_f^T \hat{s}_f + w_f^{*T} \tilde{s}_f \end{aligned} \quad (25)$$

$\hat{g} - \check{g}$ 도 (25)와 비슷하게 변형할 수 있다.

$$\hat{g} - \check{g} = \tilde{w}_g^T \hat{s}_g + w_g^{*T} \tilde{s}_g \quad (26)$$

그리고 (24) - (26)을 (23)에 대입하여 정리하면 (27)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2} e^T Q e + e^T P b \varepsilon \\ &+ e^T P b (w_f^{*T} \hat{s}_f + w_g^{*T} \hat{s}_g u) \\ &+ \tilde{w}_f^T (\tilde{w}_f + \hat{s}_f e^T P b) \\ &+ \tilde{w}_g^T (\tilde{w}_g + \hat{s}_g e^T P b u) \\ &+ \frac{1}{r_f} \text{tr}[\tilde{V}_f^T \dot{\tilde{V}}_f] + \frac{1}{r_g} \text{tr}[\tilde{V}_g^T \dot{\tilde{V}}_g] \end{aligned} \quad (27)$$

여기서, P , Q 는 Positive Definite Symmetric Matrix이다. 이제, \hat{s} 를 변형하기 위해 다음 변수를 정의한다.

$$y_i = v_i^T x, \quad y_i^* = v_i^{*T} x \\ v_i = (v_{i1} \ v_{i2} \ \dots \ v_{in_i})^T, \quad i = 1, \dots, n_k \quad (28)$$

앞의 Lemma의 특성 (3)에 의해 \hat{s} 는 다음과 같이 변형

된다.

$$\begin{aligned} \hat{s}_i &= \hat{s}_i(y_i) - \hat{s}_i^*(y_i^*) \\ &= \frac{d\hat{s}_i}{dy} \Big|_{y=z_i} (v_i^T x - v_i^{*T} x) \\ &= \frac{d\hat{s}_i}{dy} \Big|_{y=z_i} \tilde{v}_i^T x \end{aligned} \quad (29)$$

여기서, z_i 는 y_i 와 y_i^* 사이의 임의의 점이다. 그리고 (29)을 (27)의 $e^T Pb w^{*T} \tilde{s} + \frac{1}{r} \text{tr}[\tilde{V}^T \tilde{V}]$ 에 대입하여 정리하면 (30)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} e^T Pb w^{*T} \tilde{s} + \frac{1}{r} \text{tr}[\tilde{V}^T \tilde{V}] \\ = \sum_{i=1}^{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} \tilde{v}_{ji} \left(\frac{1}{r} \hat{v}_{ji} + e^T Pb \frac{d\hat{s}_i}{dy} \Big|_{y=z_i} w_{jm}^* x_j \right) \end{aligned} \quad (30)$$

Lemma의 특성 (2)와 가정 1에 의해 위 식은

$$\begin{aligned} e^T Pb w^{*T} \tilde{s} + \frac{1}{r} \text{tr}[\tilde{V}^T \tilde{V}] \\ \leq \sum_{i=1}^{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} \tilde{v}_{ji} \left(\frac{1}{r} \hat{v}_{ji} + e^T Pb \frac{d\hat{s}_i}{dy} \Big|_{y=z_i} w_m(x_j) \right) \end{aligned} \quad (31)$$

와 같이 표현된다. 따라서, (27)에 (31)를 대입해서 정리하면 (32)을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{1}{2} e^T Qe + e^T Pbe \\ &+ \tilde{w}_f^T (\tilde{w}_f + \hat{s}_f e^T Pb) \\ &+ \tilde{w}_g^T (\tilde{w}_g + \hat{s}_g e^T Pbu) \\ &+ \sum_{i=1}^{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} \tilde{v}_{ji} \left(\frac{1}{r_f} \hat{v}_{ji} + e^T Pb \frac{d\hat{s}_i}{dy} \Big|_{y=z_i} w_{fm}^* x_j \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} \tilde{v}_{gji} \left(\frac{1}{r_g} \hat{v}_{gji} + e^T Pb \frac{d\hat{s}_i}{dy} \Big|_{y=z_i} w_{gm}^* x_j \right) \end{aligned} \quad (32)$$

위의 식으로부터 마지막 4개 항을 0으로 하면 신경회로망의 가중치 갱신 법칙을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{w}}_f &= -\hat{s}_f e^T Pb \\ \dot{\tilde{w}}_g &= -\hat{s}_g e^T Pbu \\ \dot{\hat{v}}_{ji} &= -r_f e^T Pb \frac{d\hat{s}_i}{dy} \Big|_{y=z_i} w_{fm}^* x_j \\ \dot{\hat{v}}_{gji} &= -r_g e^T Pb \frac{d\hat{s}_i}{dy} \Big|_{y=z_i} w_{gm}^* x_j, \quad i=1 \dots n_h, \quad j=1 \dots n_h \end{aligned} \quad (33)$$

따라서, (33)을 \dot{V} 에 적용하면 아래 식과 같이 된다.

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} e^T Qe + e^T Pbe \quad (34)$$

이 식으로부터 앞에서 언급했듯이 신경회로망에 의한 비선형 함수의 근사화 오차(ϵ)가 대단히 작은 값이므로 두 번째 항은 무시할 수 있다. 그러므로, $\dot{V} \leq 0$ 이 되어 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 이 된다. 따라서, (1)과 같이 표현되는 비선형 시스템에 (12)를 제어 입력으로 사용하고, (33)처럼 신경회로망의 가중치를 갱신하면 구성된 페루프 시스템의 출력은 원하는 출력을 따라 간다. ■

위의 (33)의 마지막 두식에서 $\frac{d\hat{s}_i}{dy} \Big|_{y=z_i}$ 는 갱신법칙에서 상수로 작용함으로 $\frac{d\hat{s}_i}{dy} \Big|_{y=z_i}$ 를 $\frac{d\hat{s}_i}{dy} \Big|_{y=y_i}$ 로 대체시킬 수 있다. 그리고 모든 y 에 대해 $\frac{d\hat{s}_i}{dy} \Big|_{y=y_i}$ 은 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial \hat{s}_i}{\partial y} \Big|_{y=y_i} = o_{h_i}(1 - o_{h_i}) \geq 0 \quad (35)$$

여기서, o_{h_i} 는 y_i 일때 은닉층의 활성화 함수의 출력 값이다. 따라서 (33)의 마지막 두 식은 (36)와 같이 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}}_{ji} &= -r_f e^T Pb o_{h_i}(1 - o_{h_i}) w_{jm}^* x_j \\ \dot{\hat{v}}_{gji} &= -r_g e^T Pb o_{h_i}(1 - o_{h_i}) w_{gm}^* x_j u, \\ & \quad i=1 \dots n_h, \quad j=1 \dots n_h \end{aligned} \quad (36)$$

위 (36)를 행렬식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_f &= -r_f e^T Pb w_{fm} D_{p_i} M_{R_f} \\ \dot{V}_g &= -r_g e^T Pb w_{gm} D_{p_i} M_{R_g} u \end{aligned} \quad (37)$$

VI. 모의 실험

앞에서 기술한 제어 구조와 신경회로망의 가중치 갱신 법칙을 Inverted Pendulum System에 적용하여 컴퓨터 모의 실험을 통하여 성능을 검증하였다. 사용한 시스템의 동력학 방정식은 다음과 같다[14].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin x_1 - \frac{m l x_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c + m}}{\left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m} \right)} \\ &+ \frac{\cos x_1}{m_c + m} u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (38)$$

여기서, $g=9.8m/s^2$, $m_c=1kg$, $m=0.1kg$, $l=0.5m$ 이다. 그리고, $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 을 독립적으로 학습시키기 위해 두 개의 3층 신경회로망을 사용하였으며, 시스템이 2차이므로 입력이 2개이고, 은닉층은 20개의 뉴론(neuron)을 사용하였다. 가중치의 초기 값은 $[-0.1, 0.1]$ 사이의 난수로 하였다. 제어기를 구성하기 위한 각종 인수들의 값은 $k^T = [6.0 \ 8.0]$ 이고, 출력층 가중치의 한계값인 w_{fm} 과 w_{gm} 은 각각 5와 100 두가지 경우에 대해 모의 실험을 하였다. 다층 신경회로망의 학습률은 0.4로 하였다. 제어기의 샘플링 시간은 10msec로 하였다. 시스템의 초기 상태 변수 값은 $(-\frac{\pi}{60}, 0)$ 으로 하였다. 시스템과 제어기의 컴퓨터 모의 실험을 위하여 4차 Runge-Kutta 적분 방법을 사용하였다. 원하는 시스템의 출력은 $y_d = \frac{\pi}{30} \sin(\frac{2\pi}{6} t)$ 로 하였다.

그림 2는 출력층 가중치의 상한값이 $w_{fm}=w_{gm}=5$ 인 경우 처음 25초간의 모의 실험을 통해 얻는 시스템 출력과 원하는 출력 및 추적 오차를 나타내고 있다. 그림에서 알 수 있듯이 점점 추적 오차가 줄어들어 시스템 출력이 원하는 출력에 점차 접근함을 볼 수 있다. 그림 3 원하는 출력의 도함수 값과 시스템 추력의 도함수 값 그리고 추적 오차를 나타내고 있다. 도함수 값들도 점차 접근함을 볼 수 있다. 즉 도함수의 추적 오차도 작아짐을 알 수 있다. 그림 4는 그때의 시스템에 인가 되는 제어 입력을 나타내고 있다. 제어 입력은 chattering없이 smooth하게 변하고 있음을 알 수 있다.

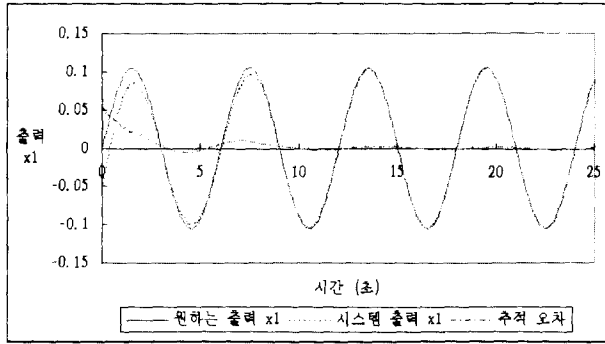


그림 2. 원하는 출력과 시스템 출력 및 추적 오차 ($w_{fm} = w_{gm} = 5$).

Fig. 2. The desired output and the system output and the tracking error ($w_{fm} = w_{gm} = 5$).

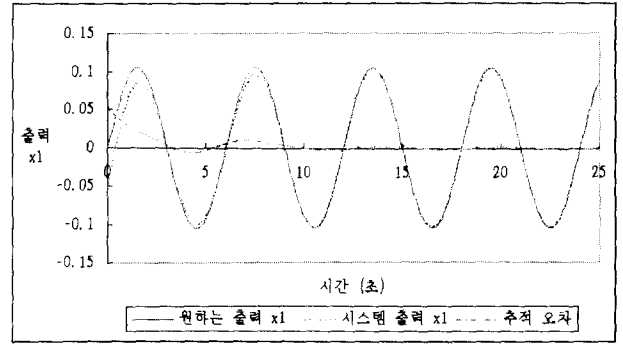


그림 5. 원하는 출력과 시스템 출력 및 추적 오차 ($w_{fm} = w_{gm} = 100$).

Fig. 5. The desired output and the system output and the tracking error ($w_{fm} = w_{gm} = 100$).

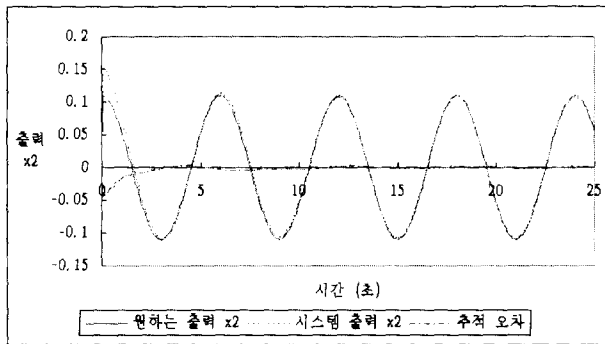


그림 3. 원하는 출력의 도함수와 시스템 출력의 도함수 및 추적 오차 ($w_{fm} = w_{gm} = 5$).

Fig. 3. The desired output derivative and the system output derivative and the tracking error ($w_{fm} = w_{gm} = 5$).

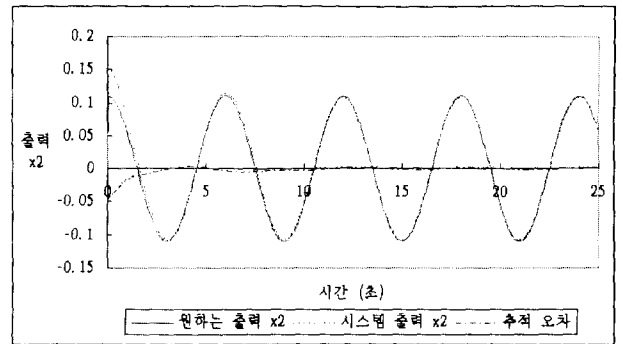


그림 6. 원하는 출력의 도함수와 시스템 출력의 도함수 및 추적 오차 ($w_{fm} = w_{gm} = 100$).

Fig. 6. The desired output derivative and the system output derivative and the tracking error ($w_{fm} = w_{gm} = 100$).

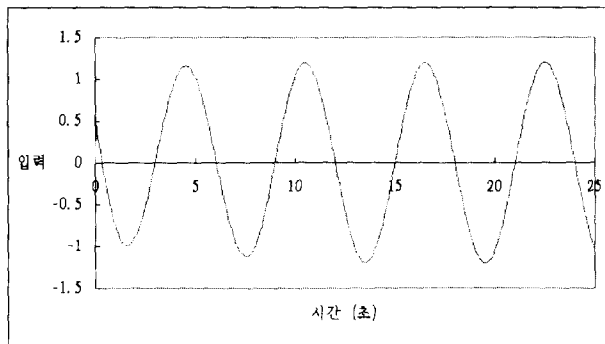


그림 4. 제어 입력 ($w_{fm} = w_{gm} = 5$).

Fig. 4. The control input ($w_{fm} = w_{gm} = 5$).

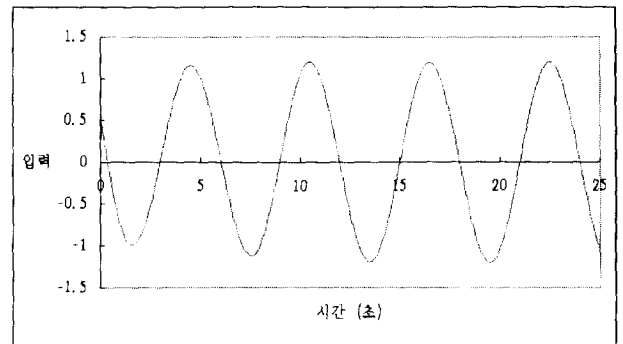


그림 7. 제어 입력 ($w_{fm} = w_{gm} = 100$).

Fig. 7. The control input ($w_{fm} = w_{gm} = 100$).

그림 5는 출력층 가중치의 상한값이 $w_{fm} = w_{gm} = 100$ 일때의 출력과 추적 오차이고 그림 6은 출력의 도함수 값과 그것의 추적 오차이고 그림 7은 제어 입력을 나타내고 있다. 출력층 가중치의 상한값이 100인 경우에도 상한값이 5인 경우와 비슷한 결과를 얻었다. 즉, 은닉층의 가중치를 바꾸는 식에서 출력층의 가중치의 상한값이 사용되지만 제어 입력 신호를 발생시키는 데는 출력층의 상한값이 거의 무관하게 작용함을 알 수 있다. 따라서 본 모의 실험을 통해 (1)과 같이 표현되는 비선형 시스템은 다층 신경회로망을 이용하여 그것의 가중치를 제한된 갱신 법칙으로 갱신하여 제어 입력을 얻어 시스템에 인가함으로써 시스템의 출력이 원하는 출력을 따라 가도록 제어할 수 있다.

VII. 결론

현재까지 시스템 제어 응용에 많은 사람들이 신경회로망을 이용하였으나 제어 문제의 근본이라 할 수 있는 안정성, 수렴성 등에 대한 수학적인 해결에는 미미한 점이 많았다. 본 논문에서는 이러한 문제를 분석하고 해석하고자 다층 신경회로망을 이용하고 신경회로망의 가중치 갱신 법칙을 유도하였으며 이를 비선형 시스템의 모의 실험을 통하여 성능을 고찰해 보았다. 즉, 신경회로망의 가중치를 매 샘플링 시간마다 갱신함으로써 비교적 빠른 시간 내에 시스템의 출력이 원하는 출력을 따라감을 보였다. 제한된 제어기로 동력학 방정식을 정확히 알지 못하는 비선형 시스템에 대한 출력의 추적 문제를 어느 정도 해결할 수 있을 것으로 본다.

본 논문에서는 신경회로망의 출력이 하나인 경우에 대해 가중치 갱신 법칙을 유도하였는데 이를 여러개의 출력을 갖는 신경회로망으로 확장할 수 있을 것이고 이것을 이용하여 다입력 다출력(MIMO) 시스템에 적용할 수 있을 것이다. 이를 향후 연구 과제로 들 수 있다.

참고문헌

- [1] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems: An Introduction*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2ed, 1989.
- [2] J.-J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall International, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [3] M. Vidaysagar, *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice Hall International, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [4] K. Hornik, M. Stinchcombe and H. White, "Multilayer feedforward networks are universal approximators," *Neural Networks*, vol. 2, pp. 359-366, 1989.
- [5] D. Psaltis, A. Sideris and A. A. Yamamura, "A multilayered neural network controller," *IEEE Control System Magazine*, vol. 8, no. 2, pp. 17-21, Apr., 1988.
- [6] F. C. Chen, "Back-propagation neural networks for nonlinear self tuning adaptive control," *IEEE Control System Magazine*, vol. 10, no. 2, pp. 44-48, Apr., 1990.
- [7] F. C. Chen and H. K. Khalil, "Adaptive control of nonlinear systems using neural networks—a dead-zone approach," *Proc. of the American Control Conference*, vol. 1, pp. 667-672, 1991.
- [8] A. Yesildirek and F. L. Lewis, "A neural net controller for robots with hebbian tuning and guaranteed tracking," *Proc. of the American Control Conference*, vol. 4, pp. 2784-2789, Jun., 1995.
- [9] Y. Jin, G. Pipe and A. Winfield, "Stable neural control of discrete systems," *Proc. of the 1993 International Symposium of Intelligent Control*, pp. 110-115, Aug., 1993.
- [10] L. Jin, P. N. Nikiforuk and M. M. Gupta, "Adaptive tracking of SISO nonlinear systems using multi-layered neural networks," *Proc. of the American Control Conference*, vol. 1, pp. 56-60, 1992.
- [11] L. Jin, P. N. Nikiforuk and M. M. Gupta, "Direct adaptive output tracking control using multilayered neural networks," *IEE Proceedings-D*, vol. 140, no. 6, pp. 393-398, Nov., 1993.
- [12] J. M. Renders, M. Saerens and H. Bersini, "Adaptive neurocontrol of MIMO systems based on stability theory," *IEEE International Conference on Neural Network*, vol. 4, pp. 2476-2481, 1994.
- [13] 성홍석, 이쾌희, "신경회로망을 이용한 비선형 시스템 제어", *전자공학회 논문지*, 제33권 제7호, pp. 32-39, 1996.
- [14] Li-in Wang, *Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and Stability Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.



성 홍 석

1986년 2월 서강대 전자공학과 졸업. 동대학원 석사(1998). 1988년 2월 ~ 1993년 3월 한국전자통신연구소 근무. 1993년 3월 ~ 현재 서강대학교 대학원 전자공학과 박사과정. 관심분야는 신경회로망, 비선형 시스템 제어.



이 쾌 희

1971년 2월 서울대 전기공학과 졸업. 동대학원 석사(1973). 1983년 2월 미국 남가주대학교 전기공학과 공학박사. 1983년 3월 ~ 현재 서강대학교 전자공학과 교수. 관심분야는 자동제어, 신호처리.