

응답특성이 개선된 강인한 적응제어계의 구성에 관한 연구

On a Configuration of the Improved Robust Adaptive Control Systems

이 순 영, 최 재 석

(Soon Young Lee and Jae Seok Choi)

Abstract : This paper proposes a new adaptive algorithm to improve the performance of a robust adaptive control system. This adaptive algorithm counteracts the effects of disturbances and makes the time derivative of Lyapunov function non-positive, $\dot{V} \leq 0$. As a result, the output error approaches zero as $t \rightarrow \infty$ not only in the presence of bounded disturbances, but also in the ideal case. The effectiveness of this proposed algorithm is demonstrated by the stability analysis and simulation results.

Keywords : adaptive control, robustness, Lyapunov function

I. 서론

강인한 적응제어계를 구성하는 대표적인 방법들로는 Peterson[1]등에 의하여 개발된 사구간(dead zone)이용법, 파라메타 제한법[2] 기존의 적응칙에 새로운 항을 첨가시킨 σ -변형법[3]과 e_1 -변형법[4]등을 들 수 있다. 사구간 이용법은 외란의 최대 크기보다 오차가 작을 경우 적응동작을 멈추어 주는 방법으로서, 외란이나 비모형화 특성의 최대 크기를 알아야 하며 외란이 존재하지 않을 때에도 정상상태 오차가 발생하는 단점이 있다. 파라메타 제한법은 추정된 파라메타의 범위를 강제로 제한시켜주는 방법으로서 외란이 존재하지 않을 때 정상상태 오차는 발생하지 않지만 파라메타의 최대 최소치를 알아야 한다. σ -변형법과 e_1 -변형법은 기존의 적응알고리즘에 각각 σ 항과 e_1 항을 첨가시켜 적응알고리즘의 적분동작을 억제시킴으로써 파라메타 편위를 방지하여 안정한 제어계를 구성하는 방법이다. 이 두 방법은 사구간 이용법이나 파라메타 제한법에 비하여 추가의 정보를 필요로 하지 않는 장점이 있으며, e_1 -변형법의 경우에는 외란이 존재하지 않을 경우 입력이 PE조건을 만족하면 정상상태 오차를 없앨 수 있다.

그러나 이러한 기존의 방법들은 외란 존재시 신호들의 유계만을 보장할 뿐 출력오차가 0으로 되지는 않는다. 더구나 외란이 존재하지 않는 이상적인 계에 대하여도 파라메타 제한법과 e_1 -변형법(입력이 PE조건을 만족할 경우)을 제외하고는 정상상태 오차가 발생하게 된다[5]. 이는 안정도 증명시에 Lyapunov 함수의 도함수가 $\dot{V} \leq 0$ 이 되질 못하고 $\dot{V} \leq c$ (양의 상수)가 되기 때문이다.

이에 본 논문에서는 외란의 존재 여부에 관계 없이 플랜트의 출력과 기준모델의 출력을 일치시킬 수 있는 새로운 적응 알고리즘을 개발하였다. 외란의 영향을 상쇄시켜 $\dot{V} \leq 0$ 이 되도록 할 수 있는 새로운 적응제어 입력을 개발하였으며, 이에따른 적응칙을 유도하였다.

아울러 구성된 적응 시스템에 대한 컴퓨터 시뮬레이션을 행하여, 기존의 대표적인 방법중의 하나인 e_1 변형법과 비교하여 봄으로써 본 논문에서 제안한 적응 알고리즘의 우수성 및 효용성을 입증하였다.

II. 문제 설정

제어대상으로 다음과 같은 n 차의 선형시불변계를 생각한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + b_p u_p + d_p v_1 \\ y_p &= h_p x_p + v_2 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 v_1 과 v_2 는 유한한 크기의 잡음이며 v_2 는 미분가능하다. 플랜트의 전달함수를 다음과 같이 가정한다.

$$W_p(s) = h_p^T (sI - A_p)^{-1} b_p = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \quad (2)$$

$Z_p(s)$ 는 m 차의 monic Hurwitz 다항식이고 $R_p(s)$ 는 n 차의 monic 다항식이다. 또한 k_p 의 부호는 알고 있다고 가정한다.

플랜트가 추종해야할 기준모델을 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= A_m x_m + b_m r \\ y_m &= h_m x_m \end{aligned} \quad (3)$$

이 기준모델의 전달함수는 다음과 같다.

$$W_m(s) = \frac{y_m}{r} = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \quad (4)$$

$R_m(s)$ 와 $Z_m(s)$ 는 각각 n 과 m 차의 monic Hurwitz 다항식이고 $r(t)$ 는 크기가 제한된 기준 입력이다. 제어의 목적은 플랜트의 출력 $y_p(t)$ 가 기준모델의 출력 $y_m(t)$ 를 추종하도록 하는 제어입력 $u_p(t)$ 및 적응칙을 구하는 것이다. 이러한 제어입력은 단지 입, 출력 정보만을 이용하여 구성되어야 하며, 전체 계통을 안정화시킬 수 있어야 한다. 이러한 $u_p(t)$ 를 구하기 위하여 다음과 같이 플랜트의 입력과 출력을 필터링한 신호들을 사용한다.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= F\omega_1 + g u_p \\ \omega_2 &= F\omega_2 + g y_p \\ \omega^T &= [r \ \omega_1^T \ y_p \ \omega_2^T] \quad \theta^T = [k \ \theta_1^T \ \theta_0 \ \theta_2^T] \end{aligned} \quad (5)$$

θ 는 $2n$ 차의 가변파라메터 벡터이며 $\theta = \theta^*$ 이면 플랜트의 전달함수와 기준모델의 전달함수는 일치된다. F 는 $n-1$ 차의 안정한 행렬이고 (F, g) 는 가제어쌍이다. 또한 $\det(sI - F)$ 는 $Z_m(s)$ 를 포함한다. 본 연구의 목적은 외란의 존재 여부에 관계없이 플랜트의 출력과 기준모델의 출력을 가능한한 일치시킬 수 있는 새로운 적응 알고리즘을 개발하는데 있다.

III. 강인한 적응제어 알고리즘 개발

1. 플랜트 분모 분자의 상대차수 $n^* = 1$ 일경우 새로운 제어입력 및 적응칙을 다음과 같이 제안한다.

Control Law:

$$u_p = \theta^T \omega - u_1 \quad (6)$$

접수일자 : 1995. 8. 30., 수정완료 : 1996. 2. 16.

이순영, 최재석 : 경상대학교 전기공학과

* 본 연구는 1994년 한국전력공사(기초전력공학공동연구소 과제번호 94-009)의 연구비 지원에 의하여 수행된 연구의 일부임.

$$u_1 = \begin{cases} \frac{2\psi e_1}{1 + |e_1|} & |e_1| \geq 1 \\ \psi & 0 \leq e_1 < 1 \\ \frac{-2\psi}{1 + |e_1|} & -1 < e_1 \leq 0 \end{cases}$$

여기서 $e_1 (= y_p - y_m)$ 은 출력오차이다.

Adaptive Law:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= -\text{sgn}(k_p)e_1\omega \\ \dot{\psi} &= |e_1| \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $\phi (= \theta - \theta^*)$ 는 파라메타 오차, ψ 는 가변파라메타이다. 제어입력 u 는 직접적용제어입력항($\theta^T\omega$)에 새로운 입력항(u_1)을 더하여 구성하였는데 이 u_1 은 외란의 영향을 상쇄시키기 위하여 도입하였다.

안정도 해석:

위의 제어기를 포함한 전체 시스템은 다음과 같이 표현된다[4].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b(\phi^T\omega + k^*r) + bv - bu_1 \\ y_p &= h^T x \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, $x^T = [x_p^T \ \omega_1^T \ \omega_2^T]$

$$A = \begin{bmatrix} A_p + b_p\theta_0^*h_p^T & b_p\theta_1^* & b_p\theta_2^* \\ g\theta_0^*h_p^T & F + g\theta_1^* & g\theta_2^* \\ gh_p^T & 0 & F \end{bmatrix}$$

$$b^T = [b_p \ g \ 0] \quad h^T = [h_p \ 0 \ 0]$$

또한 v 는 v_1 과 v_2 에 의하여 발생하는 유한한 크기의 ($|v_i| \leq \delta$ (δ 는 임의의 상수)) 외란이다[4].

만일 $\theta(t) = \theta^*$ 이면 (8)의 전달함수는 $W_m(s)$ 가 되므로 기준모델은 다음과 같이(3n-2)차로 실현된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{mn} &= Ax_{mn} + bk^*r \\ y_{mn} &= h^T x_{mn} \\ x_{mn} &= [x_p^{*T} \ \omega_1^{*T} \ \omega_2^{*T}]^T \\ h^T(sI - A)^{-1}b &= (k_p/k_m)W_m(s) \end{aligned} \quad (9)$$

위의 모델과 (8)로 부터 다음과 같은 상태오차 ($e = x - x_{mn}$)식이 구해진다.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ae + b\phi^T\omega + bv - bu_1 \\ e_1 &= y_p - y_m = h^T e \end{aligned} \quad (10)$$

이제 안정도 해석을 위하여 다음과 같은 함수 $V(e, \phi, \psi)$ 를 생각한다.

$$V(e, \phi, \psi) = e^T P e + \phi^T \phi + (\psi - \delta)^2 \quad (11)$$

그런데 $W_m(s)$ 가 SPR이고 A 는 안정한 행렬이므로 다음을 만족하는 $Q = Q^T > 0$ 와 $P = P^T > 0$ 가 존재한다[6].

$$\begin{aligned} A^T P + P A &= -Q \\ P b &= h \end{aligned} \quad (12)$$

위의 관계식과 (7)의 적응칙을 사용하여 $\dot{V}(e, \phi, \psi)$ 를 구하면,

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -e^T Q e + 2|e_1||\psi| - 2\delta|e_1| \\ & + 2\psi|e_1| - 2u_1 e_1 \end{aligned} \quad (13)$$

이고, u_1 을 대입하여 정리하면,

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \begin{cases} -e^T Q e + 2\psi|e_1| - 4\psi e_1^2 / (1 + |e_1|) & ; |e_1| \geq 1 \\ -e^T Q e + 2\psi|e_1| - 2\psi e_1 & ; 0 \leq e_1 < 1 \\ -e^T Q e + 2\psi|e_1| + 4\psi e_1 / (1 + |e_1|) & ; -1 < e_1 \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

이다. 따라서

$$\dot{V} \leq -e^T Q e \leq -e_1^2 \lambda_{\min} \leq 0 \quad (15)$$

여기서 λ_{\min} 은 Q 의 최소고유치를 나타낸다.

이로부터 ϕ, e, ψ 는 유계이고 (10)으로 부터 e 도 유계가 됨을 알 수 있다. 위의 식을 적분하면,

$$\int_{t_0}^{\infty} e_1^2 dt \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} (V(t_0) - V(\infty)) < \infty \quad (16)$$

그러므로 $e_1 \in \mathcal{L}^2$ 이다. 위로부터 $e_1 \in \mathcal{L}^2 \cap \mathcal{L}^\infty$ 이고 $\dot{e}_1 \in \mathcal{L}^\infty$ 이므로 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$ 가 된다.

따라서 잡음이 존재할 경우에도 다른 방법들과는 달리 출력오차가 0이 됨을 알 수 있다. 또한 외란이 존재하지 않는 이상적인 계에 대하여도 위의 식은 성립되므로 기준모델의 출력과 플랜트의 출력은 일치되게 된다.

컴퓨터 시뮬레이션 및 검토

시뮬레이션에 사용한 플랜트 및 기준모델의 전달함수는 다음과 같다.

$$W_p(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+3} \quad W_m(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

또한 ω_1 과 ω_2 를 다음과 같이 가정하였다.

$$\dot{\omega}_1 = -\omega_1 + u_p \quad \dot{\omega}_2 = -\omega_2 + y_p$$

그림 1과 그림 2는 외란이 없는 이상적인 계에 대한 시뮬레이션 결과로서 본 알고리즘에 의하여 오차가 0이 됨을 확인할 수 있다. 그러나 e_1 변형법의 경우 정상상태오차가 발생됨을 볼 수 있다. 그림 3 및 그림 4는 외란이 가해진 경우에 대한 시뮬레이션 결과이다. 이 경우에도 e_1 변형법과는 다르게 출력 오차가 0이 됨을 알 수 있다.

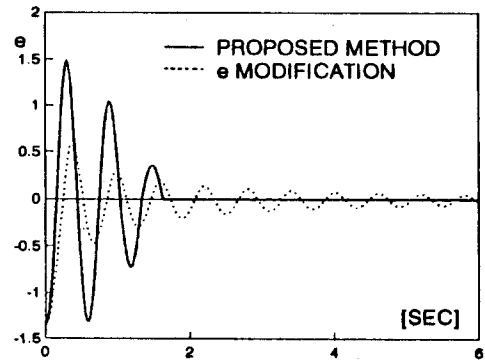


그림 1. $v_1 = v_2 = 0, r = 10$ 일 경우의 오차.

Fig. 1. Error when $v_1 = v_2 = 0, r = 10$.

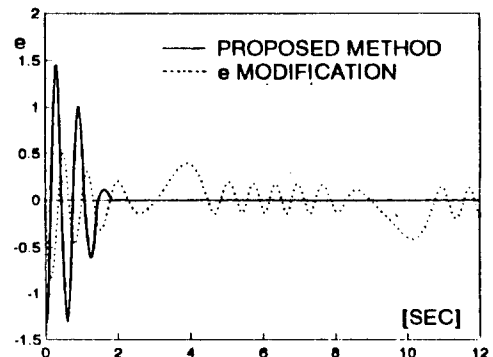


그림 2. $v_1 = v_2 = 0, r = 10 \cos 0.5t$ 일 경우의 오차.

Fig. 2. Error when $v_1 = v_2 = 0, r = 10 \cos 0.5t$.

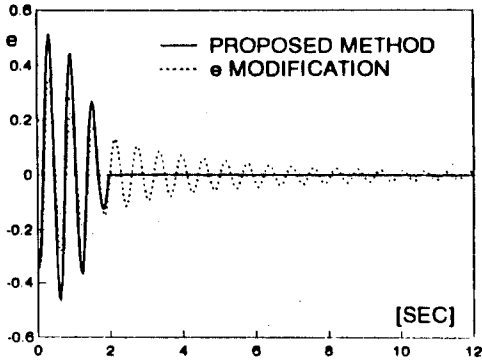


그림 3. $v_1 = 3 \sin 0.2t, v_2 = \cos 0.3t, r = 10$ 일 경우의 오차.

Fig. 3. Error when $v_1 = 3 \sin 0.2t, v_2 = \cos 0.3t, r = 10$.

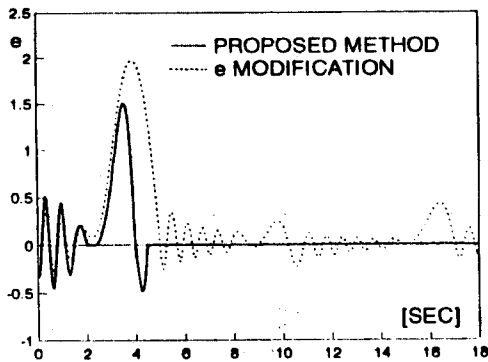


그림 4. $v_1 = 3 \sin 0.2t, v_2 = \cos 0.3t, r = 10 \cos 0.5t$ 일 경우의 오차

Fig. 4. Error when $v_1 = 3 \sin 0.2t, v_2 = \cos 0.3t, r = 10 \cos 0.5t$.

2. 플랜트 분모 분자의 상대차수 $n^* \geq 2$ 일 경우

플랜트 전달함수의 분모 분자의 상대차수 n^* 가 2 이상인 경우에는 기준모델을 더 이상 SPR인 계로 선정할 수 없다. 이 경우 (10)의 오차식만 가지고는 적응제어를 구성할 수 없으므로 다음과 같은 보조오차 신호를 발생시킨다[7].

$$\begin{aligned}
 e_2 &= \theta^T \zeta - W(s)\theta^T \omega \\
 \zeta &= W(s)I\omega \\
 \bar{\zeta} &= W(s)I\bar{\omega} \\
 \eta &= k_1 - k_p/k_m \\
 \epsilon_1 &= e_1 + \bar{W}(s)[k_1 e_2 - \epsilon_1 \bar{\zeta}^T \bar{\zeta}] \quad (17)
 \end{aligned}$$

여기서 $\bar{W}(s) = W_m(s)W^{-1}(s)$ 는 SPR이고 $\bar{\omega} = [\omega_1^T \ y_2^T]^T$ 이다.

다음과 같은 제어입력 과 제어칙을 생각한다.

Control Law:

$$\begin{aligned}
 u_p &= \theta^T \omega - u_1 \quad (18) \\
 u_1 &= \begin{cases} \frac{2\psi\epsilon_1}{1 + |\epsilon_1|} & |\epsilon_1| \geq 1 \\ \psi & 0 \leq \epsilon_1 < 1 \\ \frac{-2\psi}{1 + |\epsilon_1|} & -1 < \epsilon_1 \leq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Adaptive Law:

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi} &= -\text{sgn}(k_p)\epsilon_1\omega \\
 \dot{\eta} &= -\epsilon_1 e_2 \quad (19) \\
 \dot{\phi} &= |\epsilon_1|
 \end{aligned}$$

안정도 해석

제어입력과 (17)의 확장오차로부터 다음식이 구해진다.

$$\begin{aligned}
 \dot{\epsilon} &= A\epsilon + b((k_p/k_m)\phi^T \zeta + \eta e_2 - \epsilon_1 \bar{\zeta}^T \bar{\zeta}) + bv - bu_1 \\
 \dot{\epsilon}_1 &= h^T \epsilon \quad (20)
 \end{aligned}$$

여기서 $h^T(sI - A)^{-1}b = \bar{W}(s)$ 이다.

이제 다음과 같은 함수 $V(\epsilon, \phi, \psi, \eta)$ 를 생각한다.

$$V(\epsilon, \phi, \psi, \eta) = \epsilon^T P\epsilon + (|k_p/k_m|\phi^T \phi + (\psi - \delta)^2 + \eta^2 \quad (21)$$

(19)의 적응칙을 사용하여 $\dot{V}(\epsilon, \phi, \psi, \eta)$ 를 구하면,

$$\begin{aligned}
 \dot{V} \leq & -\epsilon^T Q\epsilon - 2\epsilon_1^2 \bar{\zeta}^T \bar{\zeta} + 2|\epsilon_1| \eta - 2\delta|\epsilon_1| \\
 & + 2\psi|\epsilon_1| - 2u_1\epsilon_1 \quad (22)
 \end{aligned}$$

u_1 을 대입하여 정리하면,

$$\dot{V} \leq \begin{cases} -\epsilon^T Q\epsilon + 2\psi|\epsilon_1| - 4\psi\epsilon_1^2/(1 + |\epsilon_1|) & ; |\epsilon_1| \geq 1 \\ -\epsilon^T Q\epsilon + 2\psi|\epsilon_1| - 2\psi\epsilon_1 & ; 0 \leq \epsilon_1 < 1 \\ -\epsilon^T Q\epsilon + 2\psi|\epsilon_1| + 4\psi\epsilon_1/(1 + |\epsilon_1|) & ; -1 < \epsilon_1 \leq 0 \end{cases} \quad (23)$$

이로부터,

$$\dot{V} \leq -\epsilon^T Q\epsilon \leq -\epsilon_1^2 \lambda_{\min} \leq 0 \quad (24)$$

따라서 $\epsilon, \phi, \psi, \eta$ 는 유계이고 $e_1 \in \mathcal{L}^2$ 가 된다. 또한 (17)과 (20)로부터 $\epsilon_1 \in \mathcal{L}^2 \cap \mathcal{L}^\infty, \epsilon_1 \in \mathcal{L}^\infty$ 이므로 $\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon_1(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$ 가 된다. 아울러 이상적인 계에 대하여도 위의 식은 성립하게 된다. 그러므로 외란의 존재 여부에 관계없이 $n^* = 1$ 일 경우와 마찬가지로 플랜트의 출력과 기준모델의 출력이 일치됨을 알 수 있다.

컴퓨터 시뮬레이션 및 검토

플랜트 및 모델의 전달함수는 다음과 같이 가정하였다.

$$W_p(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \quad W_m(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

ω_1, ω_2 는 앞절과 같이 가정하였으며, $W^{-1}(s) = s + 1$ 로 가정하였다.

앞 절의 결과와 마찬가지로, 본 논문에서 제안한 알고리즘에 의하여는 외란의 존재 여부에 관계없이 출력오차가 0이 되는 반면 e_1 변형법의 경우 정상상태오차가 발생됨을 확인할 수 있다.

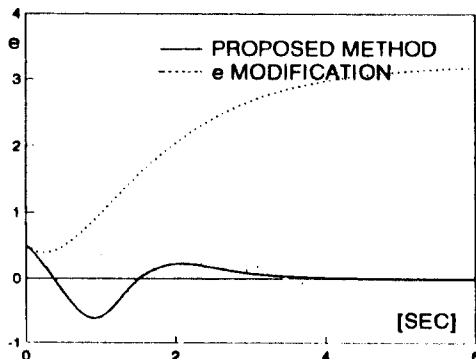


그림 5. $v_1 = v_2 = 0, r = 10$ 일 경우의 오차.

Fig. 5. Error when $v_1 = v_2 = 0, r = 10$.

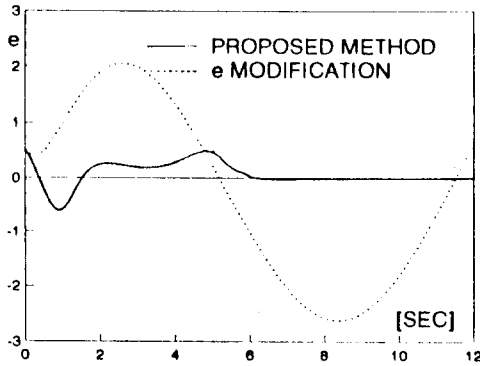


그림 6. $v_1 = v_2 = 0, r = 10 \cos 0.5t$ 일경우의 오차.
Fig. 6. Error when $v_1 = v_2 = 0, r = 10 \cos 0.5t$.

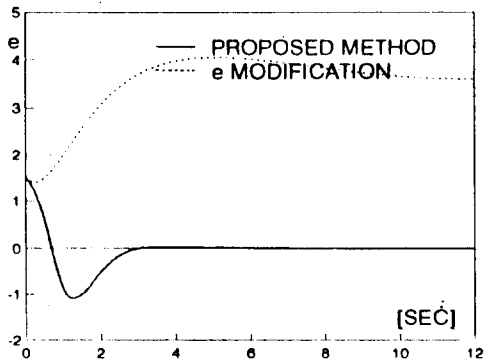


그림 7. $v_1 = 3 \sin 0.2t, v_2 = \cos 0.3t, r = 10$ 일경우의 오차.
Fig. 7. Error when $v_1 = 3 \sin 0.2t, v_2 = \cos 0.3t, r = 10$.

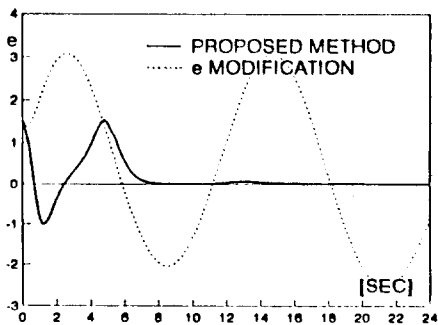


그림 8. $v_1 = 3 \sin 0.2t, v_2 = \cos 0.3t, r = 10 \cos 0.5t$ 일경우의 오차.
Fig. 8. Error when $v_1 = 3 \sin 0.2t, v_2 = \cos 0.3t, r = 10 \cos 0.5t$.

IV. 결론

본 논문에서는 이상적인 계 뿐만 아니라 외란이 존재하는 계에 대하여도 출력오차를 0으로 하여 플랜트의 출력과 기준모델의 출력을 일치시킬 수 있는 새로운 적응 알고리즘을 개발하였다. 외란의 영향을 상쇄시켜 $\dot{V} \leq 0$ 이 되도록 할 수 있는 새로운 적응제어 입력을 개발하였으며, 이에 따른 적응칙을 유도하였다. 또한 구성된 시스템에 대한 안정도를 증명하였으며 외란의 존재 여부에 관계없이 출력오차가 0이 됨을 입증하였다.

아울러 구성된 적응 시스템에 대한 컴퓨터 시뮬레이션을 행하여 본 논문에서 제안한 적응 알고리즘의 효용성 및 타당성을 입증하였다.

참고문헌

- [1] B. B. Peterson and K. S. Narendra, "Bounded error adaptive control," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 27, pp. 1161-1168, Dec. 1982.
- [2] G. Kreisselmeier and K. S. Narendra, "Stable model reference adaptive control in the presence of bounded disturbances," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 27, pp. 1169-1175, Dec. 1982.
- [3] P. A. Ioannou and K. Tsakalis, "A robust direct adaptive controller," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 31, pp. 1033-1043, Nov. 1986.
- [4] K. S. Narendra and A. M. Annaswamy, "A new adaptive law for robust adaptive control without persistent excitation," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 32, pp. 134-145, Feb. 1987.
- [5] 이순영, "유한 잡음이 인가된 시스템의 강인한 적응제어계 구성," 대한전기학회 논문지, 42권, 3호, pp. 71-76, 1993년 3월.
- [6] K. S. Narendra, Y. H. Lin and L. S. Valavani, "Stable adaptive controller design- Part 2: Proof of stability," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 25 pp. 440-448, June 1980.
- [7] K. S. Narendra and A. M. Annaswamy "Stable adaptive systems," Prentice Hall, 1989.



이 순 영
1958년 12월 27일생. 한양대학교 전기공학과(학사 1980, 석사 1982, 박사 1985). 1990년 8월 ~ 1991년 7월 Yale 대학교 방문교수. 1986년 ~ 현재 경상대학교 전기공학과 부교수. 경상대 자동화및컴퓨터연구소 연구원.



최 재 석
1958년 4월 29일생. 고려대학교 전기공학과(학사 1981년, 석사 1984년, 박사 1990년). 1991년 ~ 현재 경상대학교 전기공학과 조교수. 경상대 자동화및컴퓨터연구소 연구원.