

論文96-33B-11-3

# 다중 모델, 제어기, 스위칭을 이용한 비선형 플랜트의 IMC 제어기 설계

## (IMC Design for Nonlinear Plants using Multiple Models, Controllers, and Switching)

吳源根\*, 徐丙高\*

(Won-Geun Oh and Byung Suhl Suh)

### 요 약

본 논문에서는 비선형 플랜트에 대한 Internal Model Control(IMC) 구조의 성질과 제어기 설계 절차에 대해 논하고, 선형 IMC 설계법을 이용하여 비선형 IMC를 구현하는 방법을 제안하였다. 비선형 IMC 제어기는 기본적으로 역 제어(inverse control)이기 때문에 그 설계 원리는 간단하나 비선형성으로 인한 어려움 때문에 구체적인 설계 절차에 대한 연구는 많지 않으며 그것도 복잡한 절차를 거쳐야 한다. 그래서 직접적인 방법으로 비선형 IMC 제어기를 구하는 대신에 여러 개의 선형 모델과 선형 IMC 제어기를 배치하고 이들을 스위칭 함으로써 하나의 비선형 제어기를 대신하는 방법을 제안하였다. 이 방식은 현재 잘 정립되어 있는 선형 IMC 설계법을 그대로 이용할 수 있으며 전역 비선형 모델링이 필요 없는 간편함이 있기 때문에 실제적인 방법이라고 할 수 있다.

### Abstract

In this paper, the properties and the design procedures of the Internal Model Control(IMC) structures are discussed and a new nonlinear IMC(NIMC) strategy is proposed. The IMC controllers are simply 'inverse controller' in principle but the development of a NIMC poses difficulties due to the inherent complexity of nonlinear systems. Existing design methods are a few and not easy to implement. The proposed approach is using multiple linear models, linear IMC controllers, and switching scheme instead of using nonlinear model/controller. The advantages of the new approach are that we can use linear IMC method which are now well established and need not global nonlinear models.

### I. 서 론

IMC 구조는 일반적인 되먹임 시스템의 구조와는 달리 폐루프내에 플랜트의 공칭 모델(nominal model)이 들어 있으며 이의 출력과 플랜트 출력의 차이를 되먹임 한다. 이와 유사한 구조를 사용한 제어법은 몇 가지가 있었으나 IMC에 가장 큰 영향을 준 것은 Zames

[1]의 model-reference 구조이다. 그는 이 구조를 주파수 영역에서 외부 잡음과 플랜트의 불확실성에 대한 감도(sensitivity) 문제를 설명하기 위해서 도입하였으며 후에  $H_{\infty}$  설계법으로 발전시켰다. 그러나 여기에서 플랜트의 공칭 모델은 폐루프내에 실제로 들어가 있는 것은 아니고 수식적인 전개를 위한 가상적인 것이었다. 반면에 IMC 구조는 폐루프 내에 실제로 공칭 모델을 넣은 것으로 이렇게 했을 때의 장점은 제어기의 설계 절차가 단순하게 된다는 것이다. 현재 선형 플랜트에 대한 IMC 는 전달 함수를 이용해서 주파수 영역에서 설계되며 현대 제어 이론의 큰 흐름인 내부 안정성

\* 正會員, 漢陽大學校 電子通信工學科

(Dept. of Electronic Communication Engineering Hanyang Univ.)

接受日字:1996年8月8日, 수정완료일:1996年10月29日

(internal stability), 강인성(robustness),  $H_\infty$ -노움 최소화 등의 개념을 설계시에 간단하게 반영할 수 있는 설계법으로 그 절차가 잘 정립되어 있다<sup>[2]</sup>.

그러나 IMC 구조를 비선형 플랜트의 제어에 적용한 연구는 그렇게 많지 않다. 왜냐하면 IMC 제어기는 기본적으로 역 제어기(inverse controller)이기 때문에 원리는 단순하지만 비선형 플랜트에 대해 이를 구현하려 할 때에는 비선형성에서만 생기는 어려운 점이 많아 구체적인 설계법의 확립이 쉽지 않기 때문이다. 현재까지 연구된 것으로는 Economou 와 Morari<sup>[3]</sup>의 수치 해석법을 이용했것과 Henson 과 Seborg<sup>[4]</sup>의 feedback linearization을 IMC 구조에 적용한 방법등이 있다. 현재까지 연구된 비선형 IMC 는 이 2가지 정도이며 이들은 설계 절차가 복잡하여 실용적인 방법론으로는 부족한 점이 있다. 그래서 본 논문에서는 쉽게 설계할 수 있는 비선형 플랜트에 대한 새로운 IMC 제어기 설계 방법을 제안하였다. 이 방법의 동작 원리는 대략 다음과 같다. 비선형 플랜트가 주로 동작하는 몇 개의 동작점에서 선형 모델을 구하고 각각에 대해 선형 IMC 제어기를 설계한다. 그러면 이 모델/제어기 쌍은 해당 동작점에서만 유효한 것이 아니라 동작점 주변의 일정한 영역에서도 페루프가 잘 동작하게 한다. 이 페루프가 잘 동작하는 영역을 강인성 영역이라고 정의하며, 운전중에는 비선형 플랜트가 현재 어느 강인성 영역에 있는지를 판별하여 해당되는 모델/제어기로 스위칭을 하는 방식으로 동작한다. 이와 같이 다수의 선형 모델 또는 선형 제어기를 사용하고 이를 스위칭하는 아이디어는 적응 제어 분야에서 주로 연구되었으며<sup>[5]</sup><sup>[6]</sup>, 적응 제어가 아닌 경우에는 제한된 수의 동작 모드를 갖는 비선형 프로세스에 대한 supervisor 설계<sup>[7]</sup>에 적용된 바 있다. 또한 이득 계획법(gain scheduling)에도 다수의 선형 모델이나 제어기가 사용되지만 각 모델/제어기를 바꾸는데 스위칭 대신 내삽법(interpolation) 등을 이용한다는 점이 다르다<sup>[8]</sup>.

제안된 방법은 수치 해석이나 Lie 미분 등의 복잡한 과정을 거치지 않고, 현재 잘 정립되어 있는 선형 IMC 제어기 설계법을 이용할 수 있으며 복잡한 비선형 모델링이 필요하지 않다는 장점이 있다.

## II. 기호 및 정의<sup>[9]</sup>

본 논문에서는 시스템의 표현에 입출력 이론을 사용

하고 있다. 여기에서는 입출력 이론에서 사용하는 몇 가지 정의와 기호들을 나타내었다. 입출력 이론에서 신호  $x: [0, \infty) \rightarrow R^n$  의 크기는 다음과 같이 정의되는  $p$ -노움으로 측정한다.

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left[ \int_0^\infty |x(t)|^p dt \right]^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{t \in [0, \infty)} |x(t)|, & p = \infty \end{cases}$$

이때  $L_p^n$  공간은 다음과 같이 유한한  $p$ -노움을 갖는 신호의 집합으로 정의된다.

$$L_p^n := \{x: [0, \infty) \rightarrow R^n \mid \|x\|_p < \infty\}$$

이  $L_p^n$  공간에는 발산하는 신호는 포함되어 있지 않기 때문에 시스템의 안정성 문제를 다룰 수 없다. 그래서 발산하는 신호까지 포함할 수 있도록 이를 확장하기 위해 우선 함수의 절단 연산자(truncation operator)를 다음과 같이 정의한다.

$$x_T(t) := \begin{cases} x(t), & 0 \leq t < T \\ 0, & T < t \end{cases}$$

그리고 확장 공간  $L_{pc}^n$  를 다음과 같이 절단된 신호가 유한한  $p$ -노움을 갖는 신호의 집합으로 정의한다.

$$L_{pc} := \{x: [0, \infty) \rightarrow R \mid x_T \in L_p^n, \forall T \geq 0\}$$

비선형 플랜트는  $L_{pc}^n$  공간에서의 연산자(operator)  $P: L_{pc}^n \rightarrow L_{pc}^n$  로 표현한다. 또한 단위 연산자를  $I$  라 했을 때  $P^{-r}$ ,  $P^{-l}$  는  $P^{-l}P = PP^{-r} = I$  를 만족하는 연산자  $P$  의 우측 역 연산자와 좌측 역 연산자이다. 그리고 연산자 이득(gain) 또는 연산자 노움은 다음과 같이 정의되는 양이다.

$$\gamma_p(P) := \sup \frac{\|(Pu)_T\|_p}{\|u_T\|_p}, \forall u \in L_p, \forall T \geq 0$$

이때 연산자  $P$  의 노움이  $\gamma_p(P) < \infty$  이면  $P$  는  $L_p$ -안정하다고 정의한다.

## III. 비선형 IMC 구조와 제어기 설계

### 1. 구조

비선형 플랜트에 대한 IMC 구조를 그림 1 에 나타내었다. 여기에서 비선형 플랜트  $P$ , 모델  $\hat{P}$ , 제어기

$\tilde{Q}$ , 그리고 필터  $F$  는  $P, \tilde{P}, \tilde{Q}, F: L_{pc} \rightarrow L_{pc}$  인 비선형 연산자이며 전체 폐루프의 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y &= PQe = P\tilde{Q}Fe \\ z &= (P - \tilde{P})Qe \\ r &= e + z \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서  $r, e, u, y, \hat{y}, z \in L_{pc}$  이다. 비선형 IMC 제어기의 설계 목적은 첫째, 모델링 오차가 있는 상황에서 폐루프를 안정시키고 둘째, 출력  $y$  가 기준 입력  $r$  을 잘 추종하도록 하는 것이다. 설계 과정은 크게 두 단계로 나누어진다. 첫 단계인 공칭 제어기 설계 과정에서는 모델링 오차가 없다는 가정하에서 설계 목적을 만족하는 제어기를 구하고, 두 번째 단계인 강인성 필터 설계 과정에서는 이 공칭 제어기가 모델링 오차에도 강인하게 동작하도록 강인성 필터를 설계해서 공칭 제어기에 덧붙인다.

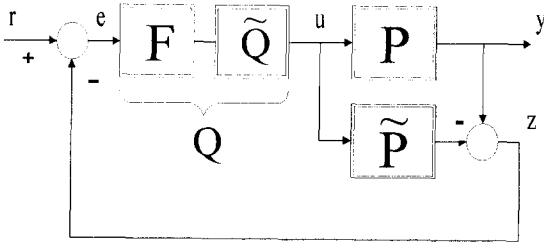


그림 1. IMC 구조  
Fig. 1. IMC structure.

2. 제어기 설계 절차

가. 1 단계 : 공칭 제어기  $\tilde{Q}$  설계

이 단계에서는 모델과 플랜트가 완전히 동일하다 가정하고 다음과 같이 추종 오차를 최소화하는 제어기  $\tilde{Q}$  을 설계한다.

$$\min_{\tilde{Q}} \|r - \hat{y}\|_p \quad (2)$$

모델링 오차가 없는 경우에  $y = \tilde{P}\tilde{Q}r$ ,  $F = I$  이므로 (2)는

$$\min_{\tilde{Q}} \|(1 - \tilde{P}\tilde{Q})r\|_p \quad (3)$$

이 된다. 이 문제의 해는 다음과 같이  $\tilde{Q}$  를  $\tilde{P}$  의 우측 역 연산자로 즉, 모델의 역으로 선택하면 노옴의 종류에 관계없이 항상 최소가 된다.

$$\tilde{Q} = \tilde{P}^{-1} \quad (4)$$

그러면 전체 폐루프는 다음과 같은 성질을 갖는다.<sup>[3]</sup>

- 1) 역 모델  $\tilde{P}^{-1}$  와 플랜트  $P$  가  $L_p$ -안정하면 전체 폐루프는  $L_p$ -안정하다.
- 2) 이 제어기는  $y=r$  이 되는 완전 제어(perfect control)를 한다.
- 3) 점근적으로 상수 값에 접근하는 입력을 인가했을 때 정상 상태 오차는 0 이다.

이 성질들은 IMC 제어 구조의 장점을 보여주는 것으로 모델링이 완벽하게 이루어지고 그 모델의 안정한 우측 역 연산자가 존재한다면 전체 제어 시스템의 안정성과 성능이 100% 달성될 수 있음을 말하고 있다. 그러나 이렇게 완전 제어를 하는 제어기는 일반적으로 아주 크거나 무한대의 이득을 갖기 때문에 감도(sensitivity)가 매우 크다. 따라서 적은 양의 모델링 오차나 잡음에도 전체 폐루프가 불안정하게 되어 버리기 때문에 현실적으로 모델링 오차가 존재하는 경우에 이 역 모델 제어기는 바로 구현될 수는 없다. 그래서 제어기의 이득을 줄여서 모델링 오차에 대한 강인성을 늘려야 하며 필터  $F$  가 그 역할을 한다.

나. 2 단계 : 강인성 필터  $F$  설계

강인성 필터의 설계 기준을 정하기 위해서는 IMC 구조가 어느 정도의 모델링 오차를 허용하는가를 알아야 한다. 모델링 오차가 있는 경우에 IMC 구조가 안정성을 유지하는 조건은 다음과 같이 주어진다.

(정리 1)  $P$  와  $Q$  가 유한한  $L_p$ -이득을 갖고 다음 부등식을 만족하면 IMC 제어 구조의 전체 폐루프는  $L_p$ -안정하다.

$$\gamma_p(P - \tilde{P})\gamma_p(Q) < 1 \quad (5)$$

(증명) 폐루프가  $L_p$ -안정하기 위해서는  $r \in L_p$  일 때  $z, u, y, \hat{y} \in L_p$  이어야 한다.

$$\begin{aligned} \|z\|_p &= \|(P - \tilde{P})u\|_p = \|(P - \tilde{P})Q(r - z)\|_p \\ &\leq \gamma_p(P - \tilde{P})\gamma_p(Q)\|r\|_p + \gamma_p(P - \tilde{P})\gamma_p(Q)\|z\|_p \\ \Rightarrow \|z\|_p &\leq (1 - \gamma_p(P - \tilde{P})\gamma_p(Q))^{-1}\gamma_p(P - \tilde{P})\gamma_p(Q)\|r\|_p \end{aligned}$$

에서  $\gamma_p(P - \tilde{P})\gamma_p(Q) < 1$  이면  $z \in L_p$  이 성립한다. 또 한 (1)에서

$$\begin{aligned} \|u\|_p &\leq \gamma_p(Q)\|r\|_p + \gamma_p(Q)\|z\|_p \\ \|y\|_p &\leq \gamma_p(P)\|u\|_p \\ \|\hat{y}\|_p &\leq \gamma_p(\tilde{P})\|u\|_p \end{aligned}$$

이므로  $u, y, \hat{y} \in L_p$  이다. 그러므로  $\gamma_p(P - \hat{P}) \gamma_p(Q) < 1$  이면 페루프는  $L_p$ -안정하다. ■

(5)는 IMC 구조에서 성립하는 소 이득 정리(small gain theorem)<sup>[9]</sup> 라고도 볼 수 있으며  $e \rightarrow \hat{y}$  로의 연산자를 고려하고 페루프에 소 이득 정리를 직접 적용해도 얻을 수 있다. 또한 이 정리는 제어기 설계시에 성능과 강인성 사이의 타협(trade-off) 관계를 나타내고 있다. 페루프 안정을 위해서는 모델링 오차와 제어기 이득을 곱한 값을 제한 시켜야 하기 때문에 모델링 오차가 크면 제어기의 이득을 줄여야 하고(그러면 추종 성능이 나빠진다) 반대로 모델링 오차가 작은 경우에는 큰 제어기의 이득이 허용될 수 있다(추종 성능이 좋아진다). 이 사실은 일반적인 구조의 되먹임 시스템에서는 잘 알려진 사실로써 IMC 제어 구조에서도 역시 성립한다는 것을 보여준다.

그러므로 강인성 필터  $F$  는 모델링 오차가 있을 때에 전체 페루프를 안정시키는 역할과 더불어 이와 같은 타협 관계를 조절할 수 있어야 한다. 필터의 안정 조건은 (5)에서 다음과 같이 구할 수 있다<sup>[3]</sup>.

$$\gamma_p(P - \hat{P}) \gamma_p(\hat{Q}F) < 1 \text{ 또는 } \gamma_p(P - \hat{P}) \gamma_p(\hat{Q}) \gamma_p(F) < 1 \quad (6)$$

그리고 운전자가 강인성과 성능 사이의 타협 관계를 조절할 수 있도록 이득을 변화할 수 있는 패러미터가 들어 있어야 한다.

### 3. 설계 절차와 문제점

이상의 설계 절차를 요약하면 다음과 같다.

- (절차 1) 비선형 플랜트의 공칭 모델을 구한다.
  - (절차 2) (4)와 같이 공칭 제어기를 모델의 우측 역연산자로 선택한다.
  - (절차 3) 공칭 제어기에 (6)을 만족하고 이득 조절이 가능한 필터를 덧붙인다.
- 이 절차는 IMC 구조에 대한 제어기를 설계하는 기본적인 원칙이며 선형, 비선형을 막론하고 IMC 설계법은 모두 위의 절차를 따르고 있다. 그러나 이를 이용해서 구체적으로 제어기를 구현하려 할 때에는 다음과 같은 어려움이 있다.
- (D1) 비선형 연산자의 역 모델  $\hat{Q} = \hat{P}^{-1}$  을 구하는 방법.
  - (D2) 강인성 필터  $F$  의 꼴과 패러미터 선정 방법.
  - (D3) 강인성 조건 (5) 점검시에 비선형 연산자의 이득 계산 방법.

기존의 비선형 IMC 방법은 이 같은 점들을 서로 다른 방법으로 해결하려 한 것이라 볼 수 있다. Economou 와 Morari<sup>[3]</sup> 는 역 모델을 구하기 위해 수치 해석법인 Newton 방법을 이용하였고 필터는 선형으로 그 패러미터는 발견적인(heuristic) 방법으로 설정하였다. 이 방법은 수치 해석을 이용하기 때문에 해석적인 형태의 설계 절차를 유도할 수 없으며 필터 설계가 조직적이지 않아 설계시 많은 시간이 걸리며 시뮬레이션에 많이 의존하는 단점이 있다. Henson 과 Seborg<sup>[4]</sup> 의 방법은 feedback linearization(FL) 을 IMC 구조에 적용한 것으로 역 모델과 필터의 설계에 Lie 미분이 사용되었다. 이 방법은 해석적이며 일반성이 있는 방법이지만 FL 이 갖는 한계성인 minimum-phase 시스템에 만 적용 가능한 점, FL이 전역 설계법이기는 하나 실제로는 전체 동작 영역에서 성능이 보장되는 경우는 드물다는 점, 그리고 Lie 미분의 계산이 실제로는 쉽지 않은 경우도 있다는 점등의 단점을 그대로 갖고 있다. 강인성의 검증은 비선형 연산자의 이득 계산이 쉽지 않기 때문에 두 경우 모두 모의 실험만을 통해 검증하였다. 한편 선형 IMC 의 경우에는 (D1)~(D3) 는 선형성을 이용해서 간단하게 해결되기 때문에 현재 그 설계법이 잘 정립되어 있다<sup>[2]</sup>. 다음절에는 이 같은 사실들을 고려해서 비교적 쉽게 설계할 수 있는 여러 개의 선형 IMC를 이용한 비선형 IMC 방법을 제안하였다.

## IV. 다중 모델, 제어기 비선형 IMC

### 1. 구조와 동작 개요

다중 모델/제어기 비선형 IMC (MM-IMC)의 구조를 그림 2 에 나타내었다. 전체적인 구성은 표준 IMC 와 같지만 모델과 제어기가 여러 개로 이루어져 있으며, 이들을 스위칭 하는 함수가 추가되어 있다. 그림에서  $P$  는 제어 대상인 비선형 플랜트이며,  $\hat{P}_M = \{ \hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_N \}$  는 여러 동작점에서 얻은 선형 모델의 집합이고,  $Q_M = \{ q_1, q_2, \dots, q_N \}$  는  $\hat{P}_M$  의 원소 각각에 대해서 설계한 선형 IMC 제어기들의 집합, 그리고  $\Omega = \{ 1, 2, \dots, N \}$  는  $\hat{P}_M, Q_M$  원소의 인덱스의 집합이다. 전체 페루프의 입출력 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z &= (P - \hat{p}_{\sigma}) q_{\sigma} e \\ r &= e + z \\ y &= P q_{\sigma} e \end{aligned} \quad (7)$$

여기에서  $\phi_k$  는 적절한 모델/제어기의 인덱스를 출력하는 스위칭 함수로써 4.3 절에 자세히 기술하였다.

이 시스템이 운전중에는 모델, 제어기 쌍들간에  $(\hat{p}_i, q_i) \rightarrow (\hat{p}_j, q_j) \rightarrow (\hat{p}_k, q_k) \rightarrow \dots$  와 같이 현재의 동작 상황에 가장 적합한 쌍으로 스위칭이 일어난다. 스위칭의 기준은 현재 시간에서 플랜트와 가장 “가까운” 모델을 선택하는 것이며 이 가까움의 정도는 평가 함수에 의해 온라인으로 추정된다. 그리고 실제 스위칭 동작은 채터링 방지를 위해 히스테리시스를 두고 일어난다.

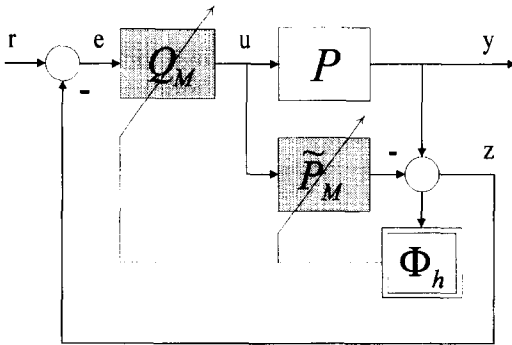


그림 2. 다중 모델/제어기 비선형 IMC 의 구조  
Fig. 2. Multiple models/controllers nonlinear IMC.

2. 다중 모델, 제어기 비선형 IMC 설계  
다음과 같은 비선형 플랜트를 고려하자.

$$P: \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), \theta(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t), \theta(t)) \end{aligned} \quad (8)$$

여기에서  $x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p, \theta \in R^q$  는 각각 플랜트의 상태 벡터, 입력, 출력, 그리고 플랜트의 패러미터를 의미하며, 이 비선형 플랜트가 동작하는 전체 동작 공간  $R(P)$  를 다음과 같이 정의하기로 한다. (그림 3)

$$R(P) := R^n \times R^m \times R^p \times R^q$$

그러면  $P$  의 동작은  $R(P)$  의 원소인  $\omega = (x, u, y, \theta)$  라는 하나의 벡터로 표현될 수 있다. 그리고  $P$  가 입력이나 출력에 대해서 상수 동작점을 갖는다고 할 때 이 동작점은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E_i = \{(x_i^0, u_i^0, y_i^0, \theta_i^0) \in R(P) | f(x_i^0, u_i^0) = 0, y_i^0 = h(x_i^0, u_i^0)\} \quad (9)$$

동작점  $E_i$  에서 선형화한 모델  $\hat{p}_i = M(E_i)$  는 다음과

같다.

$$\begin{aligned} \hat{p}_i: \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_i^0, u_i^0)[x(t) - x_i^0] + \frac{\partial f}{\partial u}(x_i^0, u_i^0)[u(t) - u_i^0] \\ x(0) - x_i^0 &= x_0 \\ y(t) &= \frac{\partial h}{\partial x}(x_i^0, u_i^0)[x(t) - x_i^0] + \frac{\partial h}{\partial u}(x_i^0, u_i^0)[u(t) - u_i^0] \end{aligned} \end{aligned} \quad (10)$$

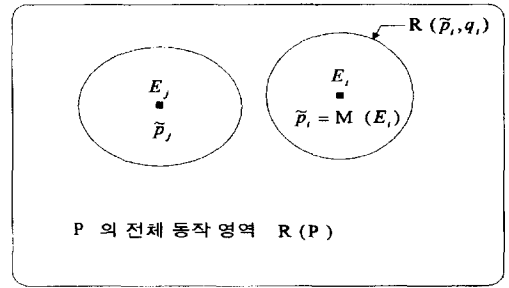


그림 3. 동작 공간과 강인성 영역  
Fig. 3. Operation space and robustness regions.

이 선형화된 모델 각각에 대해서 일반적인 선형 IMC 제어기 설계법을 써서 선형  $q_i$  를 구한다. 이때 절차는 선형의 경우와 동일하지만 설계 사양인 주파수 영역에서의 불확실성 정보  $|\bar{A}(\omega)|$  의 설정이 쉽지 않다. 왜냐하면 비선형 플랜트의 경우 공칭 모델 주변의 불확실성은 보통 시간 영역에서 표현되는데 이 값을 직접 주파수 영역의 양으로 나타내는 것이 곤란하기 때문이다. 그래서 비선형 불확실성 대신에 동일한 에너지 증폭량 즉, 동일한  $L_2$ -이득을 갖는 선형 불확실성을 고려하여 간접적인 방법으로 비선형 섭동의 주파수 영역에서의 크기를 구하였다.  $P_i$  를 동작점  $i$  근처에서 비선형 플랜트  $P$  의 실제 동역학이라고 하고, 선형 모델  $\hat{p}_i$  와는 다음과 같은 관계를 갖는다고 가정한다.

$$P_i = (1 + \Delta p) \hat{p}_i \quad (11)$$

$\Delta p$  는  $|( \Delta p u(t) | \leq \rho | u(t) |$  인 conic sector 조건을 만족한다고 하면 이 비선형 섭동  $\Delta p$  와 동일한  $L_2$ -이득을 갖는 선형 오차는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sup_{\omega} |\Delta \mathcal{L}_m(j\omega)| = \rho = \gamma_2(\Delta p) \quad (12)$$

그러므로 주파수 영역에서의 오차의 최대값을 비선형 불확실성의 시간 영역에서의 이득과 같게 놓으면 둘은 동일한  $L_2$ -이득 즉, 동일한 에너지를 갖게 된다. 그러

나 이 정리는 선형 오차의 최대값만을 알려줄 뿐 구체적인 형상에 대한 정보는 주지 못한다. 일반적인 선형 오차는 저주파 영역에서는 작고 고주파로 갈수록 커지는 형상을 하고 있으나 이 경우는 원래 플랜트가 비선형이므로 꼭 그렇다고는 할 수 없다. 물론 전 주파수 영역에서  $\bar{Z}(\omega) \geq \rho$  를 만족하도록 불확실성 영역을 설정하면 되겠지만 이렇게 하면 conservatism 이 커지기 때문에 실제로는 최대값만을 맞춰 주고 정확한 형상은 선형 불확실성과 비슷하게 설정한다.

3. 스위칭 함수

각 동작점에서 선형 모델을 이용해서 설계한 제어기는 정확하게 동작점에서만 제어 목적을 달성하는 것이 아니라 동작점 주위의 일정한 영역에서도 유효하게 동작한다는 것은 잘 알려진 사실이다. 즉, 모델과 제어기의 쌍  $(\hat{p}_i, q_i)$  는 동작점  $E_i$  근방의 일정한 범위 안에서는 전체 페루프를 강인하게 동작시킬 수 있으며 이를 강인성 영역이라 정의한다. 그러나 이렇게만 정의하는 것은 너무 추상적이어서 실제 측정의 기준으로 사용하는데 어려움이 있으므로 근사적으로 동작점과 현재 동작벡터와의 거리나, 모델과 플랜트와의 거리를 측정하는 방법을 사용하고 있다<sup>[7]</sup>. 비선형 IMC의 경우에 강인성 영역을 정의하는 데는 후자가 적합하며 (5)를 이용하면 강인성 영역은 다음과 같이 구할 수 있다.(그림 3)

$$R_i := R(\hat{p}_i, q_i) = \{\omega \in R(P) | \gamma_2(P - \hat{p}_i) < \gamma_2^{-1}(q_i)\} \quad (13)$$

그리고 이 부분 강인성 영역의 합은 다음과 같이 비선형 플랜트의 전체 동작 영역을 덮는다고 가정한다.

$$R(P) = \bigcup_{i=1}^N R_i \quad (14)$$

이 식은 비선형 플랜트의 모든 동작 영역에 대해서 비선형 플랜트를 안정하게 제어하는 적어도 하나의 모델/제어기 쌍이 존재한다는 것을 의미하며 그렇지 않은 경우에는 모델/제어기의 수를 늘림으로써 이 가정은 만족될 수 있다.

스위칭 함수는 플랜트가 현재 어느 강인성 영역  $R_i$  에 있는지를 판별해서 해당되는 모델/제어기의 쌍  $(\hat{p}_i, q_i)$  로 스위칭을 하는 역할을 한다. 현재 동작 영역의 판별은 각 모델에 대해서 직접 (13)을 계산하면 구할 수 있지만, 비선형 연산자의 이득은 계산 과정이

간단하지 않을 뿐만 아니라 실시간, 온라인 계산이 불가능하기 때문에 취할 수 있는 방법이 아니다. 판별 절차는 직접 이득을 구할 필요 없이 간단하게 온라인 실시간으로 적용될 수 있어야 하며, 이러한 요구 조건을 만족하는 판별 절차를 다음과 같이 구하였다. 먼저 비선형 플랜트가 동작점  $E_i$  근방에서만 동작할 때 플랜트와 각 모델들 간의 관계를 구해 보면 다음과 같다.

(정리 2) 비선형 플랜트에 대한 IMC 구조에서  $\omega \in R_i$  이면 각 모델들 사이에는 다음 식이 성립한다.

$$\gamma_2(P - \hat{p}_i) \leq \gamma_2(P - \hat{p}_j), \quad i, j \in \Omega \quad (15)$$

(증명)  $\omega \in R_i$  일 때  $P = P_i = (1 + \Delta p) \hat{p}_i$  이며 이때  $\Delta p$  를 동일한  $L_2$ -이득을 갖는 선형 섭동  $\Delta_m$  으로 바꾸면  $\sup_{\omega} |\Delta_m(j\omega)| \leq |\bar{Z}(\omega)|$  가 성립한다. 여기에서  $|\bar{Z}(\omega)|$  는  $R_i$  영역의 경계이며 각 강인성 영역은 같은 크기를 갖는다고 가정한다. 따라서  $|\hat{p}_i(j\omega) - \hat{p}_j(j\omega)| = 2\bar{Z}(\omega), \forall \omega$  이다. 이와같은 가정하에서 플랜트와 모델간의 관계는

$$\gamma_2(P_i - \hat{p}_i) = \gamma_2(\tilde{p}_i \Delta p) = \sup_{\omega} |\hat{p}_i(j\omega) \Delta_m(j\omega)| \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2(P_i - \hat{p}_j) &= \gamma_2(\hat{p}_i - \hat{p}_j + \hat{p}_i \Delta p) \\ &= \sup_{\omega} |\hat{p}_i(j\omega) - \hat{p}_j(j\omega) + \hat{p}_i(j\omega) \Delta_m(j\omega)| \end{aligned} \quad (17)$$

에서 (17)의 우변이 최대가 되는 주파수를  $\omega_1$  이라 했을 때

$$\begin{aligned} &|\hat{p}_i(j\omega_1) - \hat{p}_j(j\omega_1) + \hat{p}_i(j\omega_1) \Delta_m(j\omega_1)| \\ &\geq |\hat{p}_i(j\omega_1) \Delta_m(j\omega_1)| = \sup_{\omega} |\hat{p}_i(j\omega) \Delta_m(j\omega)| \end{aligned} \quad (18)$$

이 성립한다면  $\sup_{\omega} |\hat{p}_i(j\omega) - \hat{p}_j(j\omega) + \hat{p}_i(j\omega) \Delta_m(j\omega)| \geq \sup_{\omega} |\hat{p}_i(j\omega) \Delta_m(j\omega)|$  을 만족하게 된다. (18)을 복소 평면상에 벡터로 표시하고 크기를 비교하면 식이 성립함을 알 수 있다. ■

즉, 플랜트와 가장 가까운 모델은 차이의  $L_2$ -이득이 가장 작기 때문에 스위칭의 기준으로 절대적인 이득값을 계산하지 않고 상대적인 크기만을 비교해서 동작 영역을 판별할 수 있다. 그러나 (15)는 플랜트가 초기 시간부터 현재까지 계속 한 영역에만 머물러 있을 때 성립하는 식이다. 플랜트의 동작 영역이 시간에 따라 바뀌는 경우에 동작 영역을 판별하기 위해서는 현재 시간에서 이득을 계산할 필요가 있다. 그리고 연산자의

이득은  $z_i = y_i - \hat{y}_i$  를 이용하면 간접적으로 측정이 가능하기 때문에 다음과 같이 변형된  $L_2$ -노름 형태의 평가 함수를 통해 시간  $t$  에서 모델과 플랜트의 거리를 측정한다.

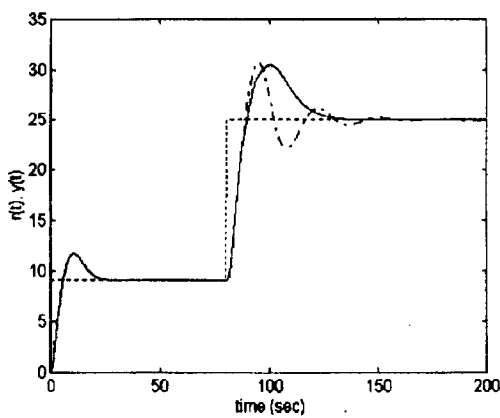
$$J_i(t) = a \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} z_i^2(\tau) d\tau + \beta z_i^2(t) \quad (19)$$

여기에서  $a, \beta, \lambda \geq 0$  이며 각각 현재 오차와 과거 오차 간의 가중치, 그리고 과거 오차의 중요도가 감소하는 비율을 나타낸다. 이 값이 가장 작은 모델의 첨자를  $m$  이라 하면  $\hat{p}_m$  은 시간  $t$  에서 플랜트와 가장 가까운 모델이며 플랜트는 현재 영역  $R_m$  에서 동작한다고 판

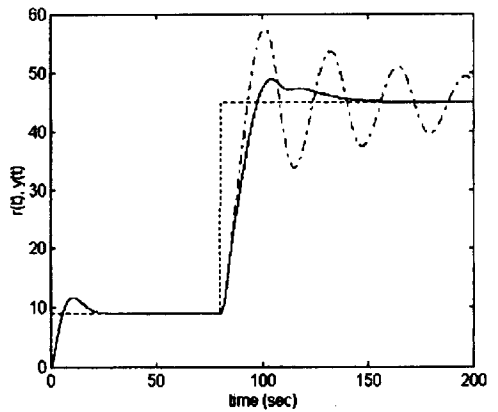
별한다. 스위칭은 원칙적으로 평가 함수의 값이 가장 작은 모델, 제어기로 일어난다. 그러나 바로 스위칭을 하는 것은 조그마한 잡음에도 채터링(chattering)이 일어날 수 있으며 이로 인해 페루프가 불안정하게 될 수 있으므로 히스테리시스 스위칭 알고리즘<sup>[5] [6]</sup>을 이용한다.  $\Phi_h(t)$  는 시간  $t$  에서 스위칭 되어야 할 모델과 제어기의 첨자를 출력하는 함수로 다음과 같이 정의된다.

$$\Phi_h(t) = \begin{cases} i, & \text{if } J_i(t) \leq J_j(t) + h \\ j, & \text{if } J_i(t) > \min_{j, i \neq j} J_j(t) + h \end{cases} \quad (20)$$

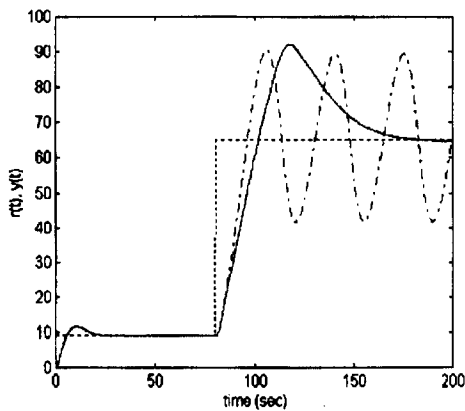
여기에서  $h$  는 히스테리시스 상수이다.



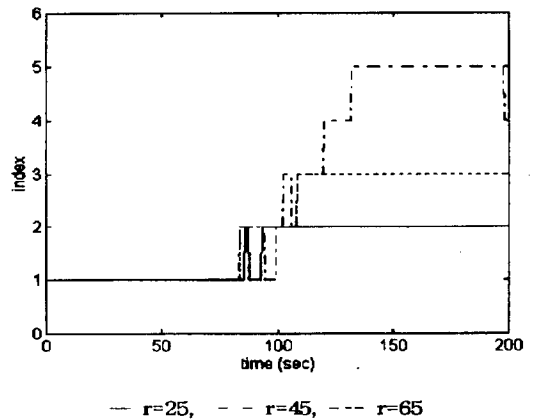
(a)



(b)



(c)



(d)

그림 4. 기준 입력 변화에 따른 출력

(a) 9에서 25로 변화시 (b) 9에서 45로 변화시 (c) 9에서 65로 변화시 (d)스위칭 인덱스의 변화

Fig. 4. Responses for set point changes.

(a) to 25 (b) to 45 (c) to 65 (d) changes of switching index

## V. 모의실험

다음의  $n$  개의 서로 간섭이 없는 탱크의 유량 제어에 제안된 방법을 적용하였다<sup>[10]</sup>.

$$\begin{aligned} \dot{h}_1(t) &= -\frac{c}{A} h_1^{1/2}(t) + \frac{1}{A} u(t) \\ \dot{h}_j(t) &= -\frac{c}{A} h_j^{1/2}(t) + \frac{c}{A} h_{j-1}^{1/2}(t), \quad j=2, \dots, n \\ y(t) &= h_n(t) \end{aligned} \quad (21)$$

여기에서  $u(t)$  는 첫 번째 탱크로의 유입량,  $y(t)$  는  $n$  번째 탱크의 수위,  $h_j(t)$  는  $j$  번째 탱크의 수위이며  $A>0$  는 탱크의 단면적, 그리고  $c>0$  는 유출 저항으로  $A=0.5, c=1, n=3$  인 경우에 대해 모의실험 하였다. 동작점  $E_i$  는 임의로 선택한 상수 입력  $u^0 = 3, 5, 7, \sqrt{70}, 9, 10, \sqrt{110}$  으로 구성하고 각 동작점에서 (21)을 선형화해서  $\hat{p}_i$  를 구한 다음 각각에 대해 선형 IMC 제어기 설계법을 써서  $q_i$  를 얻었다. 모델/제어기쌍의 첨자는  $u^0$  가 3일 때 1, 5일 때 2 와 같은 식으로 붙였다. 모의 실험 결과를 그림 4 에 나타내었다. 기준입력  $r(t)$  를 9 에서 25, 45, 65 로 변화시키면서  $u^0$  가 3 일 때 설계한 선형 IMC 제어기를 하나만 사용했을 때와 제안된 MM-IMC 를 사용할때의 출력을 비교하였다. 입력의 변화량이 커짐에 따라 하나의 제어기를 사용한 경우는 출력이 진동해버리지만 제안된 방법은 입력을 잘 추종하는 것을 보이고 있다. (a),(b),(c)는  $r(t) = 9$ 에서 각각 25, 45, 65 로 변화했을때의 출력이며 (d)는 스위칭 되는 인덱스의 변화이다. 계단 입력이 인가된 직후 모델/제어기간에 스위칭이 몇 번 일어나다가 수렴해 가는 것을 볼 수 있다.

## VI. 결 론

다수의 선형 모델과 선형 IMC 제어기 그리고 스위칭을 이용한 비선형 IMC 설계법을 제안하였다. IMC 제어기는 먼저 공칭 모델에 대한 역 제어기를 설계한 다음 거기에 강인성을 보강하기 위한 필터를 덧붙이는 과정을 거치기 때문에 그 원리는 단순하지만 실제 구현은 비선형성으로 인한 어려움 때문에 쉽지 않다. 현재까지 연구된 비선형 IMC 방법은 수치 해석, Lie 미분 등을 이용하기 때문에 실용성이 떨어진다고 볼 수 있다.

제안된 방법은 각 동작점에서 얻은 선형 모델에 대

해 선형 IMC 설계법을 적용해서 모델/제어기 쌍을 구한 다음 플랜트의 동작 영역에 해당되는 쌍으로 스위칭을 해준다. 이를 위해 강인성 영역을 정의하였으며 플랜트가 현재 어느 강인성 영역에 속해 있는지를 판별하는 방법을 제시하였다. 실제 스위칭 동작은 채터링 방지를 위해서 히스테리시스 알고리즘을 이용해서 수행하였다. 제안된 방법이 큰 set point 의 변화를 잘 추종하는 것을 모의 실험을 통해 보였다. 향후 연구 과제로는 평가 함수와 히스테리시스 값의 최적 선택 방법과, 제안한 스위칭 구조가 수렴하는 것은 많은 모의 실험을 통해서 확인할 수 있었지만 이를 해석적으로 증명하는데 대한 연구가 필요하다.

## 참 고 문 헌

- [1] G.Zames, "Feedback and Optimal Sensitivity : Model Reference Transformation, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 26, no. 2, pp. 301-320, April, 1981.
- [2] M.Morari and E.Zafiriou, *Robust Process Control*, Prentice Hall, 1989.
- [3] C.G.Economou and M.Morari, "Internal Model Control. 5. Extension to Nonlinear Systems," *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 25, pp. 403-411, 1988.
- [4] M.A.Henson and D.E.Seborg, "An Internal Model Control Strategy for Nonlinear Systems," *AICHE Journal*, Vol. 37, No. 7, pp. 1065-1081, July, 1991.
- [5] A.S. Morse, D.Q. Mayne, and G.C. Goodwin, "Application of Hysteresis Switching in Parameter Adaptive Control," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol.37, no. 9, pp. 1343-1354, September, 1992.
- [6] K.S. Narendra, J.Balakrishnan, and M.K. Ciliz, "Adaptation and Learning Using Multiple Models, Switching, and Tuning," *IEEE Control Systems*, pp. 37-51, June, 1995.
- [7] R.A. Hilhorst, J.V. Amerongen, P.Löhnberg, and H.J.A.F. Tulleken, "A Supervisor for Control of Mode-switch Process," *Automatica*, vol. 30, no. 8, pp. 1319-1331,



- 1994.
- [8] W.J. Rugh, "Analytical Framework for Gain Scheduling," *IEEE Control Systems*, pp. 79-84, January, 1991.
- [9] G.Zames, "On the Input-Output Stability of Time-Varing Nonlinear Feedback Systems Part I," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 11, no. 2, pp. 228-238, April, 1966.
- [10] W.J.Rugh, "Design of Nonlinear PID Controllers," *AIChE Journal*, vol. 33, no. 10, pp. 1738-1742, October, 1987.

---

 저 자 소 개
 

---



吳源根(正會員)

1967년 10월 6일생. 1989년 한양대학교 전자통신공학과 졸업. 1992년 한양대학교 대학원 전자통신공학과 졸업(석사). 1992년 ~ 현재 동 대학원 박사과정 재학 중. 주요 관심 분야는 비선형 제

어, 신경 회로망, 선형 제어이론 및 강인성 연구등임.

徐丙高(正會員) 第33卷第3號參照

현재 한양대학교 전자통신공학과 교수