

論文96-33B-8-1

# 불확정성 선형시스템에 대한 $H_\infty$ 노옴 성능 경계를 만족하는 신뢰성 제어시스템의 설계

## (Design of Reliable Control System Guaranteeing $H_\infty$ -norm Performance Bound for Uncertain Linear Systems)

朴世華\*, 卞增男\*\*

(Se-Hwa Park and Zeungnam Bien)

### 요 약

불확정성 선형시스템에 대한 신뢰성 제어시스템의 설계가 연구된다. 대상으로 하는 불확정성은 상태행렬에 존재하는 경우이고, 불확정성 선형시스템은 두 개의 제어 채널을 가지며, 비집중화 방안으로써, 각각의 제어 채널에 대해 두 개의 관측기를 기반으로 하는 되먹임 제어기를 개발한다. 설계된 두 개의 제어기와 불확정성 시스템으로 이루어지는 폐회로 시스템은 불확정성이 존재할 뿐만 아니라 감지거나 구동기의 고장이 생겨도 규정된  $H_\infty$  노옴 성능 경계와 안정성을 제공한다. 소프트한 형태의 고장은 폐회로 시스템에 대해 또 다른 외인성 입력임을 관측하고, 참고문헌 [1]의 결과를 확장하여 감지거나 구동기의 고장을 허용할 수 있는 신뢰성 제어기를 설계한다.

### Abstract

Design of a reliable control systems is investigated for a class of uncertain linear plants. The uncertainty considered here is for the case of uncertainty in the system matrix. A decentralized control scheme with two observer-based feedback controllers is developed, and it is shown that the resulting closed loop system is reliable in the sense that the control scheme provides guaranteed stability and  $H_\infty$ -norm bounded performance in the event of sensor and/or actuator failures as well as in the presence of parameter uncertainties. We observed that soft type failures were additional exogenous inputs to the closed loop system. As a result, the sensor and/or actuator failures can be tolerated in the design, which is achieved by extending the methodology developed in [1].

### 1. 서 론

플랜트, 감지기 그리고 구동기로 이루어지는 보통의 폐회로 시스템에서 만일 고장이 발생하면 전체 시스템은 불안정하게 되거나 시스템의 성능을 만족하지 못하게 된다. 이러한 의미에서 시스템 내의 고장에 대응하기 위해 여러 가지의 신뢰성 제어 방법이 제안되고 있다<sup>[2] [4]</sup>. 고장을 허용하는 구조에서는 감지거나 구동기 또는 제어기의 고장 시에도 제어기능이나 안정화가 유지되는 것으로써, Siljak<sup>[3]</sup>은 한 선형시스템을 안정

\* 正會員, 生産技術研究院 生産設備開發센터

(Industrial Engineering Technology Center, Korea Academy of Industrial Technology)

\*\* 韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科

(Depart. of Elec. Eng., Korea Advanced Institute of Science and Technology)

接受日字:1995年8月22日, 수정완료일:1996年7月18日

화하기위한 다중의 제어기 구조를 제안하고 안정화 조건을 제시했다. 또한, 인수 분해 방법(factorization methodology)을 이용하여 선형시스템에 대한 여러 가지 안정화 조건을 제시한 연구도 있다([4] - [5] 참조).

그러나, 이들의 설계는 시스템의 동특성(dynamics)을 완전히 안다는 가정 하에서 연구되었으며, 전체 시스템을 평가하는데 중요한 의미를 갖는 시스템의 성능에 대한 보장을 제공하는 문제에 대한 언급은 이루어지고 있지 않다. 그런데,  $H_\infty$  노음은 외란 제거(disturbance rejection), 모델 참조(model reference) 설계 및 강인한(robust) 설계 등을 포함하여 제어기의 성능을 평가하는 특히 유용한 성능 측정(performance measure) 수단으로 주목받고 있는 바, 불확정성이 존재해도 폐회로 시스템의 안정성과  $H_\infty$  노음 감쇄를 보장하는  $H_\infty$  제어 방법이 보고되고 있다<sup>[1]</sup>. 그러나, [1]에서는 제어기의 설계시 불확정성만 고려되고 감지거나 구동기의 고장이 고려되지 않았으므로, 감지거나 구동기의 고장이 발생하면 전체 시스템은 규정된 성능 경계를 만족하지 못하거나 불안정해진다.

따라서, [1]의 결과를 확장하여  $H_\infty$  의미에서 폐회로 시스템(closed-loop system)이 미리 규정된 레벨(prespecified level)의 외란 감쇄(disturbance attenuation)를 보장하며, 불확정성을 갖는 선형시스템을 안정화시키는 되먹임 제어기를 설계하는 것이 본 논문의 목적이다. 이러한 범주 하에서, 제어 규칙(control law)은 파라미터 불확정성뿐만 아니라 감지거나 구동기의 고장이 발생해도 폐회로 시스템에 대해 강인한  $H_\infty$  성능(performance)을 확실히 지키도록 할 것이다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II절에서 대상으로 하는 불확정성 선형시스템과 이에 대한 관측기 기반 되먹임 제어기의 구조를 정의하고, 감지거나 구동기의 고장 시에도 폐회로 시스템의 전달함수 행렬에 대한  $H_\infty$  노음이 규정된 경계를 만족하도록 제어기 파라미터를 결정하는 문제를 설정한다. III절에서 신뢰성 제어기의 파라미터들을 결정하는 방법을 제안하고, IV절에서 예를 보인후 V절에서 결론을 맺는다.

## II. 문제 정의

다음과 같은 형태<sup>[1]</sup>의 외란이 작용하고 불확정성이

있는 선형시스템을 생각해 보자.

$$\dot{x} = (A_0 + \Delta A)x + B_1 u_1 + B_2 u_2 + G w_0, \quad (1a)$$

$$y_1 = C_1 x + w_1, \quad (1b)$$

$$y_2 = C_2 x + w_2, \quad (1c)$$

$$z = \begin{bmatrix} Hx \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (1d)$$

여기서,  $x \in R^n$ 은 상태 변수이고,  $u_1, u_2 \in R^m$ 은 두 개의 제어 입력,  $y_1, y_2 \in R^p$ 은 두 측정된 출력,  $w_0, w_1, w_2$ 은 제곱 적분가능한 외란(square-integrable disturbances), 그리고  $z \in R^{l+2m}$ 은 레귤레이트된 변수(regulated variable)이다.  $H$ 는  $l \times n$  행렬이고,  $A_0, B_1, B_2, G, C_1, C_2$ 는 적절한 차원(dimension)을 갖는 행렬이다.  $A_0$ 은 공칭 모델 행렬(nominal model matrix)이고  $\Delta A$ 은 모르는 시스템 파라미터 불확정성이다.  $Q_0$ 를 알려진 양의 한정(positive definite) 행렬이라고 하고, 불확정성을 다음과 같이 정의하자.

$$\Omega = \{ \Delta A: \Delta A^T \Delta A \leq Q_0, \text{ and } (A_0 + \Delta A, H) \text{ is a detectable pair} \}. \quad (1e)$$

행렬 부등식  $\Delta A^T \Delta A \leq Q_0$ 은  $Q_0 - \Delta A^T \Delta A$ 이 양의 반한정임(positive semi-definite)을 의미한다.

사실, 플랜트 (1)에 대한  $H_\infty$  제어 방법이 [1]에 게재되어 있다. 하지만, [1]에 적용된 방법은 선형시스템에 대한 신뢰성 있는 집중화/비집중화 제어시스템을 설계한 [2]의 방법이 적용된 반면, [1]에서는 감지거나 구동기의 고장이 고려되지 않았었다.

Tan<sup>[5]</sup>은 시스템 파라미터 불확정성이나 외란이 고려되지 않은 플랜트 (1)에 대한 신뢰성 있는 안정화 조건을 제시하기도 했으나, [5]에서는 파라미터 불확정성과 외란이 고려되지 않았다.

이중 구조를 갖는 제어시스템에 관심이 많으므로, 만일 플랜트 (1)에서  $B_1$ 이  $B_2$ 와 같은 행렬이면 구동기에 이중의 리던던시(redundancy)가 있음을 주목할 수 있겠다. 비슷하게  $C_1$ 이  $C_2$ 와 같으면 감지기에 이중의 리던던시가 있는 경우이다.

[1]에서처럼, 두 개의 제어기가 분리된(decouple) 형태의 경우를 고려하자. 즉, 첫 번째 제어기는  $u_1$ 을 생성하기 위해  $y_1$ 을 이용하고, 두 번째 제어기는  $u_2$ 를 생성하기 위해  $y_2$ 를 이용한다. 그러면, 첫 번째와 두 번째 제어기는 각각 다음과 같이 기술된다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= (A_0 + B_1K_1 + B_2K_2 + \Gamma K_d - L_1C_1) \xi_1 + L_1y_1, \\ u_1 &= K_1\xi_1. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= (A_0 + B_1K_1 + B_2K_2 + \Gamma K_d - L_2C_2) \xi_2 + L_2y_2, \\ u_2 &= K_2\xi_2. \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $K_1, K_2, L_1, L_2, \Gamma$  그리고  $K_d$ 은 결정되어야 할 설계 파라미터이다. 참고로 [1]에서는  $\Gamma$ 가  $G$ 로써 고정되어 있으나, 여기서는 설계의 자유를 더욱 주기 위해서 설계 파라미터로 추가하였다.

폐회로 시스템으로 기술하기 위해 다음과 같이  $x_e$ 와  $w_e$ 를 정의한다.

$$x_e^T = [x^T \quad \xi_1^T - x^T \quad \xi_2^T - x^T], \quad w_e^T = [w_0^T \quad w_1^T \quad w_2^T] \quad (4)$$

그리고 두 제어기를 플랜트 (1)에 적용하면 다음이 얻어진다.

$$\dot{x}_e = (F_{e_0} + F_{e_c})x_e + G_e w_e, \quad z = H_e x_e. \quad (5)$$

여기서

$$F_{e_0} = \begin{bmatrix} A_0 + B_1K_1 + B_2K_2 & B_1K_1 & B_2K_2 \\ \Gamma K_d & A_0 + B_1K_2 + \Gamma K_d - L_1C_1 & -B_2K_2 \\ \Gamma K_d & -B_1K_1 & A_0 + B_1K_1 + \Gamma K_d - L_2C_2 \end{bmatrix},$$

$$F_{e_c} = \begin{bmatrix} \Delta A & 0 & 0 \\ -\Delta A & 0 & 0 \\ -\Delta A & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_e = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ -G & L_1 & 0 \\ 3-G & 0 & L_2 \end{bmatrix}, \quad H_e = \begin{bmatrix} H & 0 & 0 \\ K_1 & K_1 & 0 \\ K_2 & 0 & K_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

정상적인 조건하에서 제어 목표(goal)는 폐회로 시스템의 전달함수 행렬  $T(s) = H_e (sI - F_{e_0} - F_{e_c})^{-1} G_e$  이 미리 규정된  $\alpha > 0$ 에 대해  $\|T\|_\infty \leq \alpha$ 을 만족하도록 자유롭게 설계 파라미터  $K_1, K_2, L_1, L_2, \Gamma$  그리고  $K_d$ 를 설정하는 것이다.

제어기의 설계 단계에서 감지거나 구동기의 고장을 고려하지 않으면 폐회로 시스템은  $H_\infty$  노음 경계를 만족하지 못하거나 어떤 경우에는 불안정해질 수 있음을

주목할 수 있겠다.

[3] [4] 뿐 만 아니라 [2]에서는 하드한 형태의(hard-type) 고장-즉, 고장이 나면 출력이 영이 됨-을 가정하고 설계를 했다. 여기서는 더해지는 소프트한(soft) 형태의 고장(additive fault)을 가정한다. 이러한 소프트한 형태의 고장은 고장 검출/진단(fault detection/diagnostics) 문제<sup>[7]-[9]</sup> 또는 신뢰성 있는 설계 문제<sup>[10]</sup>에서 종종 연구되어 왔다. 그러면, 구동기의 고장에 의해 바뀐 제어입력  $\bar{u}_1$ 과  $\bar{u}_2$ 는 다음과 같이 기술된다.

$$\bar{u}_1 = u_1 + \delta u_1 \neq 0, \quad \bar{u}_2 = u_2 + \delta u_2 \neq 0.$$

여기서,  $\delta u_1$ 과  $\delta u_2$ 는 구동기 고장에 의해 발생하는 값이다. 또한, 마찬가지로 감지기의 고장은 다음과 같이 가정한다.

$$\bar{y}_1 = y_1 + \delta y_1 \neq 0, \quad \bar{y}_2 = y_2 + \delta y_2 \neq 0.$$

마찬가지로  $\delta y_1$ 과  $\delta y_2$ 는 감지기 고장에 의해 발생 되는 값이다. 만일 제어기에서 구동기와 감지기 모두 고장이 나면, (2)와 (3)에 의해 주어진 제어기 동특성은 각각 다음과 같이 바뀌게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\xi}}_1 &= (A_0 + B_1K_1 + B_2K_2 + \Gamma K_d - L_1C_1) \bar{\xi}_1 + L_1y_1 + L_1\delta y_1, \\ \bar{u}_1 &= K_1 \bar{\xi}_1 + \delta u_1. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\xi}}_2 &= (A_0 + B_1K_1 + B_2K_2 + \Gamma K_d - L_2C_2) \bar{\xi}_2 + L_2y_2 + L_2\delta y_2, \\ \bar{u}_2 &= K_2 \bar{\xi}_2 + \delta u_2. \end{aligned} \quad (8)$$

그러면, 시스템 내의 모든 구동기와 감지기의 고장이 발생한 후의 폐회로 시스템은 다음과 같이 기술될 수 있다.

$$\dot{\bar{x}}_e = (F_{e_0} + F_{e_c}) \bar{x}_e + G_e w_e + \widehat{G}_e^S \widehat{w}_e^S + \widehat{G}_e^A \widehat{w}_e^A, \quad z = H_e \bar{x}_e \quad (9)$$

여기서

$$\begin{aligned} \bar{x}_e^T &= [x^T \quad \bar{\xi}_1^T - x^T \quad \bar{\xi}_2^T - x^T], \\ \widehat{G}_e^S &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix}, \quad \widehat{G}_e^A = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ -B_1 & -B_2 \\ -B_1 & -B_2 \end{bmatrix}, \\ \widehat{w}_e^S &= [\delta y_1^T \quad \delta y_2^T]^T, \quad \widehat{w}_e^A = [\delta u_1^T \quad \delta u_2^T]^T. \end{aligned} \quad (10)$$

(9)는 다음과 같은 증가된 형태로 표현될 수 있다.

$$\overline{\dot{x}}_e = (F_{e_0} + F_{e_1})\overline{x}_e + \overline{G}_e \overline{w}_e, \quad z = H_e \overline{x}_e \quad (11)$$

여기서

$$\overline{G}_e = [G_e \quad \widehat{G}_e^S \quad \widehat{G}_e^A], \quad \overline{w}_e^T = [w_e^T \quad \widehat{w}_e^{S^T} \quad \widehat{w}_e^{A^T}]. \quad (12)$$

$\widehat{G}_e^S \widehat{w}_e^S$ 은 감지기의 고장과 관련되어 있으며, 반면에  $\widehat{G}_e^A \widehat{w}_e^A$ 은 구동기의 고장과 관련이 있다. 시스템의 행렬  $F_{e_0}, F_{e_1}$  그리고  $H_e$ 은 고장에 의해 바뀌지 않음을 볼 수 있다. 참고로 하드한 형태의 고장이 허용되면, 즉 구동기의 고장의 경우  $\overline{u}_1 = 0$ 이거나  $\overline{u}_2 = 0$ 이면,  $F_{e_0}$ 이 변화하게 되는 데, 이러한 경우는 설계 시에 고려하지 않는다. 이런 하드한 고장을 허용하는 경우에 대한 연구는 [11]의 부록을 참고한다.

최종적으로 신뢰성 있는 제어의 목표는 시스템 내의 구동기와 감지기의 고장에 대응하는 것이다. 그러므로, 불확정성 선형시스템에 대한 신뢰성 제어시스템의 설계는 폐회로 전달함수 행렬  $\overline{T}(s) = H_e(sI - F_{e_0} - F_{e_1})^{-1} \overline{G}_e$ 이 규정된  $\alpha > 0$ 에 대해 불확정성이 존재할 뿐만 아니라 구동기나 감지기가 고장이 나더라도  $\|\overline{T}\|_\infty \leq \alpha$ 이 만족되도록  $K_1, K_2, L_1, L_2, \Gamma$  그리고  $K_d$ 을 결정하는 것이다.

### III. 주요 결과

[1]에서 볼 수 있는 다음의 보조 정리는 주요 결과를 얻기 위해 필수적인 것이므로 본 논문에서 다시 인용한다.

보조정리 1 [1]  $T(s) = C(sI - A)^{-1}B$ 라 하고,  $(A, C)$ 은 가검출성인 쌍(detectable pair)이며,  $A = A_0 + A_v$ 라 하자. 만일 다음의 부등식

$$A_0^T X + X A_0 + X \left( -\frac{1}{\alpha^2} B B^T + E \right) X + C^T C + A_v^T E^{-1} A_v \leq 0, \quad (13)$$

을 만족하는 양의 반한정 행렬  $X \geq 0$ 와 양의 스칼라 (scalar)  $\alpha$ 와 양의 실수로 이루어진(positive real) 대각 행렬(diagonal matrix)  $E$ 가 존재하면,  $A$ 는 Hurwitz이고  $T(s)$ 는  $\|\overline{T}\|_\infty \leq \alpha$ 을 만족한다.

위의 보조정리 1을 기반으로 하여 다음의 정리 1에

의해 구동기와 감지기 모두의 고장이 허용되도록 제어기의 파라미터를 결정할 수 있겠다.

정리 1.  $\Delta A \in \mathcal{Q}$ 이고,  $\alpha$ 는 양의 스칼라라고 하자.  $\varepsilon_1 > 0$ 이고  $\varepsilon_2 > 0$ 에 대해 다음의 등식

$$\begin{aligned} RX &\equiv A_0^T X + X A_0 + X \left( -\frac{1}{\alpha^2} G G^T + \varepsilon_1 I_n \right) X \\ &- \left( 1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) X (B_1 B_1^T + B_2 B_2^T) X + \\ &H^T H + \left( \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{2}{\varepsilon_2} \right) Q_0 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

을 만족하는  $X \geq 0$ 이 존재하면

$$\begin{aligned} K_1 &= -B_1^T X, \quad K_2 = -B_2^T X, \quad \Gamma = [G \ B_1 \ B_2], \\ K_d &= -\frac{1}{\alpha^2} \Gamma^T X \end{aligned} \quad (15)$$

이고, 여기서  $A_0 + B_1 K_1 + B_2 K_2 + \Gamma K_d$ 은 Hurwitz 이고  $A_0 + \Gamma K_d$ 은  $j\omega$ 축에 고유치(eigenvalue)를 갖지 않는다.

또한  $L_1 = \frac{1}{2} W_{11} C_1^T, L_2 = \frac{1}{2} W_{22} C_2^T$  이고, 여기서  $W > 0$ 인 다음의 Riccati-like 대수식(algebraic equation)을 만족한다고 가정하자.

$$\begin{aligned} RW &\equiv W A_c^T + A_c W + \frac{1}{\alpha^2} W K_c^T K_c W - \frac{1}{2} W C_c^T C_c W \\ &+ G_c G_c^T + B_c B_c^T + \frac{1}{2} (W - W_D) C_c^T C_c (W - W_D) \\ &+ \alpha^2 \varepsilon_2 I_{2n} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

여기서

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}, \quad W_D = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{bmatrix}, \\ A_c &= \begin{bmatrix} A_0 + B_2 K_2 + \Gamma K_d & -B_2 K_2 \\ -B_1 K_1 & A_0 + B_1 K_1 + \Gamma K_d \end{bmatrix}, \\ K_c &= \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}, \\ C_c &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix}, \quad G_c = \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} \end{aligned}$$

그러면, 관측기 기반 되먹임 제어기 (2)와 (3)은 플랜트 (1)을 안정화시키고  $\overline{w}_e$ 로부터  $z$ 까지의 폐회로 전달함수 행렬  $\overline{T}(s) = H_e (sI - F_{e_0} - F_{e_1})^{-1} \overline{G}_e$ 은  $\|\overline{T}\|$

$\infty \leq \alpha$ 을 만족한다. 여기서,  $w_e, F_{e_0}, F_{e_c}, \bar{G}_e, H_e$  그리고  $\bar{w}_e$ 은 (6)과 (12)에서 주어져 있다.

증명. [1] 에서와 같은 방식으로

$$X_e = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & \alpha^2 W^{-1} \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 I_n & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 I_{2n} \end{bmatrix}$$

라고  $X_e \geq 0$ 과  $E > 0$ 을 정의하자.

그리고 (6)과 (12)에 의해 주어질  $F_{e_0}, F_{e_c}, H_e$  그리고  $\bar{G}_e$ 을 (13)에 적용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{R}(X_e) &= F_{e_0}^T X_e + X_e F_{e_0} + X_e \left( \frac{1}{\alpha^2} G_c G_c^T + E \right) X_e \\ &\quad + H_e^T H_e + F_{e_c}^T E^{-1} F_{e_c} \\ &\equiv \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서

$$\begin{aligned} T_{11} &= (A_0 + B_1 K_1 + B_2 K_2) X + X (A_0 + B_1 K_1 + B_2 K_2) \\ &\quad + X \left( \frac{1}{\alpha^2} (G G^T + B_1 B_1^T + B_2 B_2^T) + \varepsilon_1 I_n \right) X \\ &\quad + H^T H + K_1^T K_1 + K_2^T K_2 + \left( \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{2}{\varepsilon_2} \right) \Delta A^T \Delta A, \\ T_{12} &= X [ B_1 K_1 \ B_2 K_2 ] + \alpha^2 [ (FK_d^T \ (FK_d^T) W^{-1} + X [ -GG^T \ -GG^T ] W^{-1} \\ &\quad X [ B_1 B_1^T + B_2 B_2^T \ B_1 B_1^T + B_2 B_2^T ] W^{-1} + [ K_1^T K_1 \ K_2^T K_2 ] ), \\ T_{21} &= T_{12}^T, \\ T_{22} &= \alpha^2 W^{-1} \begin{bmatrix} \alpha \alpha A_0 + B_2 K_2 + FK_d - L_1 C_1 & B_2 K_2 \\ B_1 K_1 & A_0 + B_1 K_1 + FK_d - L_2 C_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \alpha^2 \begin{bmatrix} (A_0 + B_2 K_2 + FK_d - L_1 C_1^T) & (B_1 K_1^T) \\ - (B_2 K_2^T) & (A_0 + B_1 K_1 + FK_d - L_2 C_2^T) \end{bmatrix} W^{-1} \\ &\quad + \alpha^2 W^{-1} \begin{bmatrix} GG^T + 2L_1 L_1^T + \alpha^2 \varepsilon_2 I_n & GG^T \\ GG^T & GG^T + 2L_2 L_2^T + \alpha^2 \varepsilon_2 I_n \end{bmatrix} W^{-1} \\ &\quad + \alpha^2 W^{-1} \begin{bmatrix} B_1 B_1^T + B_2 B_2^T & B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ B_1 B_1^T + B_2 B_2^T & B_1 B_1^T + B_2 B_2^T \end{bmatrix} W^{-1} + \begin{bmatrix} K_1^T K_1 & 0 \\ 0 & K_2^T K_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(14)와 (16)을 (17)에 적용하고 단순한 대수 조작에 의해서 다음을 얻을 수 있다.

$$R(X_e) = \begin{bmatrix} \left( -\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{2}{\varepsilon_2} \right) (-Q_0 + \Delta A^T \Delta A) & 0 \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} \leq 0$$

위의  $r_{22}$ 가 널행렬임을 보이기 위해 증명 과정을 좀 더 기술하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\alpha^2} W T_{22} W - R W &= -W L_c C_c^T - L_c C_c W + 2L_c L_c^T \\ &\quad + 0.5 W C_c^T C_c W \\ &\quad - 0.5 (W - W_D) C_c^T C_c (W - W_D) \\ &= 0.5 (W C_c^T - 2L_c) (W C_c^T - 2L_c)^T \\ &\quad - 0.5 (W - W_D) C_c^T C_c (W - W_D) \\ &= 0. \end{aligned}$$

그리고 나서, [1]과 같은 방법으로,  $\Delta A \in Q$ 이고,  $A_0 + B_1 K_1 + B_2 K_2 + FK_d$ 이 Hurwitz이며  $A_0 + FK_d$ 가  $j\omega$ 축에 고유치를 갖지 않는다는 조건하에서 ( $F_{e_0} + F_{e_c}, H_e$ )이 가검출성인 쌍임을 보여줄 수 있다. 그러므로,  $\bar{T}(s) = H_e (sI - F_{e_0} - F_{e_c})^{-1} \bar{G}_e$ 은  $\| \bar{T} \|_\infty \leq \alpha$ 를 만족한다. ■

정리 1의 증명에 적용된 절차는 [1]에서의 그것과 같다. [1]과 비교하여 다른 것은  $G_c$ 와  $w_e$  대신에 각각  $\bar{G}_e$ 와  $\bar{w}_e$ 을 사용한 것이며, [1]에서는  $G$ 로 고정되었던 추가된 설계 변수  $\Gamma$ 를 도입하여 결과가 유도되었다. 만일  $\Gamma$ 를  $G$ 로 고정시킨 경우에는  $R(X_e) < 0$ 을 만족하는  $X_e$ 를 찾을 수 없었다. 또한,  $F_{e_0}, F_{e_c}$  그리고  $H_e$ 이 파라미터 불확정성만 고려된 보통의 설계에 비해서 신뢰성 있는 설계 시에도 바뀌지 않으므로 증가된 시스템 (11)의 가검출성은 증명 시에 그대로 유지된다.

정리 1에 대해서 몇 가지 살펴보면 다음과 같다.

첫째로, 폐회로 시스템에서 만일 고장이 허용되지 않는다면, 두 개의 Riccati like 대수식 (14)와 (16)은 아래와 같이 약간 변형이 되어 설계 파라미터를 설정할 수 있다.

$$R X = -\frac{1}{\alpha^2} X (B_1 B_2^T + B_2 B_2^T) X = 0, \quad (18)$$

$$R W = \frac{1}{2} W C_c^T C_c W + \frac{1}{2} (W - W_D) C_c^T C_c (W - W_D) - B_c B_c^T = 0, \quad (20)$$

그리고,  $\Gamma = G, L_1 = W_{11} C_1^T, L_2 = W_{22} C_2^T$ 이며, 다른 설계 파라미터는 그대로 적용된다.

위의 결과는, 증명 시에, 증가된 형태인  $\bar{G}_e$ 과  $\bar{w}_e$  대신에 각각  $G_c$ 와  $w_e$ 을 이용하여 얻게 된다<sup>[11]</sup>. 고장이 허용되지 않은 위의 경우와 기존의 결과 [6]에

대한 주석은 [1]에서 볼 수 있다.

둘째로, 구동기의 고장만 허용되면, (16)이 다음과 같이 변경된다.

$$RW - \frac{1}{2} WC_c^T C_c W + \frac{1}{2} (W - W_0) C_c^T C_c (W - W_0) = 0, \quad (20)$$

그리고  $L_1 = W_{11} C_1^T$ ,  $L_2 = W_{22} C_2^T$ 이고, (14)와 다른 설계 파라미터는 그대로 이용이 된다.

셋째로, 단지 감지기의 고장만 허용이 되는 경우는 (14)와 (16)이 아래와 같이 변경되어 설계 파라미터를 구할 수 있다.

$$RX - \frac{1}{a^2} X(B_1 B_2^T + B_2 B_2^T)X = 0, \quad (21)$$

$$RW - B_c B_c^T = 0, \quad (22)$$

그리고  $\Gamma = G$ 이고 다른 설계 파라미터는 그대로 적용된다. 이것은  $G_e$ 과  $\bar{w}_e$  대신에  $[G_e \bar{G}_e^S]$ 과  $[w_e \bar{w}_e^S]$ 이 증명에서 이용된다.

마지막으로, 만일  $R_0(X_e)$ 을

$$R_0(X_e) \equiv F_e^T X_e + X_e F_e + X_e \left( \frac{1}{a^2} G_e G_e^T + E \right) X_e + H_e^T H_e + F_e^T E^{-1} F_e, \quad (23)$$

와 같이 정의하면 다음의 사항을 관측할 수 있다. 즉, 만일 구동기와 감지기의 고장을 고려한 경우인 (14)와 (16)의 해를 구할 수 있다면 부등식  $R_0(X_e) \leq \bar{R}(X_e) \leq 0$ 이 성립되는 사실을 통해 (18)과 (19)의 해가 구해질 수 있다. 같은 이치가 구동기만 혹은 감지기만의 고장을 허용하는 경우에도 적용된다. 그리고, 위의 Riccati-like 대수식을 푸는 방법은 참고 문헌 [11]에 나와 있다.

#### IV. 예제

다음과 같이 파라미터 불확정성을 갖는 플랜트<sup>[11]</sup>를 고려해보자.

$$A_0 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 31 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad C_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0], \quad H = [1 \ 0 \ -1 \ 0], \quad (24)$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

공칭 모델  $A_0$ 의 고유치는 0.1906, -2.5585, -1.316  $\pm j$  2.9194 이다.

##### (1) 구동기 고장의 허용

표 1에서, 폐회로 전달함수 행렬의  $H_\infty$  값이 일곱 가지의 경우에 대해서 비교되었다. 처음의 (A-1)에서 (A-4)까지의 네 경우에서 제어기는 플랜트의 모델이 정확하다는 가정 하에서 설계된다. 즉, 고장이 고려되지 않은 경우 이용되는 (18)과 (19)에서  $Q_0$ ,  $\epsilon_1$ 과  $\epsilon_2$ 가 모두 영이라고 놓은 후 제어기 파라미터를 결정한다. 첫 번째 경우는 실제적으로 파라미터 불확정성과 구동기의 고장이 없을 시의  $H_\infty$  노음이다. 그 다음의 경우는 파라미터 불확정성은 없지만 실제적으로 구동기의 고장이 발생한 경우이다. 세 번째는 실제적으로 파라미터 불확정성이 있으며 반면에 구동기의 고장은 없는 경우이다. 네 번째의 경우는 파라미터 불확정성과 구동기의 고장이 모두 있는 경우이다. 여기서,  $\Delta A$ 를 위와 같이 일정한 상수 행렬로 가정했으며, 구동기의 고장은 첫 번째 제어기에서 일어난 것으로 해서  $H_\infty$  노음을 계산했다.

(A-5)와 (A-6)의 경우는 (18)과 (19)를 이용하여 제어기의 파라미터를 구했으므로, 파라미터 불확정성은 고려했으나 구동기의 고장은 고려하지 않았다. 다섯 번째 경우는  $\Delta A \neq 0$ 이고 구동기의 고장이 발생하지 않은 경우이며, 여섯 번째의 경우는 실제로  $\Delta A \neq 0$ 이고 구동기의 고장이 발생한 경우이다. 최종적으로 일곱 번째 경우는 (14)과 (16)을 이용하여 설계함으로써 파라미터 불확정성과 구동기의 고장을 모두 고려하였다. 각각의 경우에 대한  $H_\infty$  노음의 계산에서  $\epsilon_1$ 과  $\epsilon_2$ 의 값은  $H_\infty$  노음이 작은 값을 갖도록 선택했다. (A-1) 경우의  $H_\infty$  노음은  $F_{e_0}$ ,  $H_e$  그리고  $G_e$ 로부터 계산된다. 비슷

하계 (A-2) 경우의  $H_\infty$  노옴은  $F_{e_0}$ ,  $H_e$  그리고  $[G_e, \widehat{G}_e^*]$  로부터 계산된다. 이러한 규칙은 다른 경우에서  $H_\infty$  노옴 계산 시에도 적용된다. 그리고 상수의 파라미터 불확정성  $\Delta A$ 는 주어진 바운드  $Q_0$ 에서 시스템의 성능을 가장 나쁘게 만든다.

표 1에서 (A-2) (A-4)와 (A-6)의 경우, 파라미터 불확정성과 구동기의 고장이 설계 시에 고려되지 않았으므로  $H_\infty$  노옴 성능이 만족되지 않거나 폐회로 시스템이 불안정해짐을 보여준다. (A-7)의 경우에서 보듯이  $H_\infty$  노옴이 만족된다.

표 1에서  $\alpha < 3.07$ 이면, (18)과 (19)의 해를 찾을 수 없었다. 결론적으로, 파라미터 불확정성과 구동기의 고장을 고려하려면 더 큰  $H_\infty$  노옴 경계가 요구됨을 알 수 있겠다. 또한, (A-6)의 경우  $\alpha \geq 3.07$ 이면, 구동기의 고장을 설계 시에 고려하지 않더라도  $H_\infty$  성능 경계를 만족하기도 한다. 이것은  $H_\infty$  접근 방법(approach)의 자연적인 적응 성질(natural adaptation property)에 기인된 결과이다.

$H_\infty$ -norm

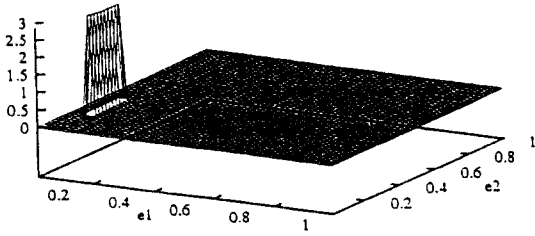


그림 1. 구동기의 고장을 고려한 설계에서  $\epsilon_1$ 과  $\epsilon_2$ 의 존재범위에 따른  $H_\infty$  노옴( $\alpha = 3.07$ )  
Fig. 1.  $H_\infty$  norm according to the existence ranges of the  $\epsilon_1$  and  $\epsilon_2$  in the design considering the actuator failures( $\alpha = 3.07$ ).

그림 1은  $\alpha = 3.07$ 인 경우, 폐회로 전달함수의  $H_\infty$  노옴과,  $\epsilon_1$ 과  $\epsilon_2$ 에 대한 (14)와 (20)의 해의 존재 범위를 나타낸 것이다. 그림에서,  $\epsilon_1$ 와  $\epsilon_2$ 에 대한 (14)와 (20)의 해를 찾을 수 없는 경우에는  $H_\infty$  노옴 값을 영으로 했다. 그리고, 그림 2는  $\alpha = 6$ 인 경우에 대한 것이다. 따라서, 그림 1과 그림 2에서 볼 수 있듯이  $\alpha$ 가

크면 클수록  $\epsilon_1$ 와  $\epsilon_2$ 에 대한 (18)과 (19)의 해가 더욱 많이 존재하게 된다. 그림 3은  $\alpha = 6$ 인 경우, 구동기 고장이 일어났을 시의 여러 경우에 대한 singular 값의 주파수 관계를 나타낸 것이다. 그림 3의 (a) 경우는 불확정성과 구동기 고장이 고려되지 않고 설계되었다가 구동기 고장이 발생한 경우 0 [rad/sec] 근처에서  $H_\infty$  노옴 값이 상당히 커져 불안정해 짐을 볼 수 있으며, 그림 3의 (b), (c)의 경우는 모두 구동기 고장이 발생하더라도 singular 값이 6이내에 존재함을 볼 수 있다.

$H_\infty$ -norm

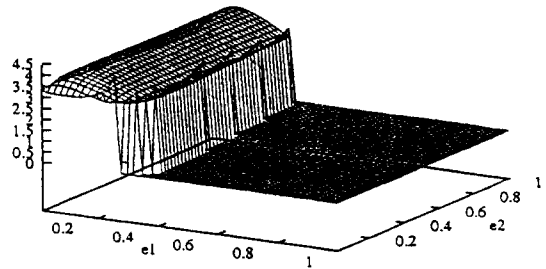
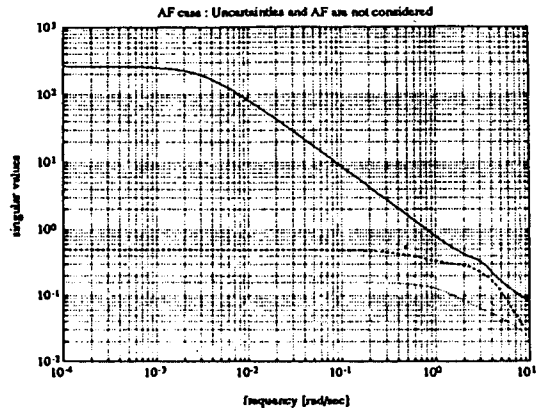


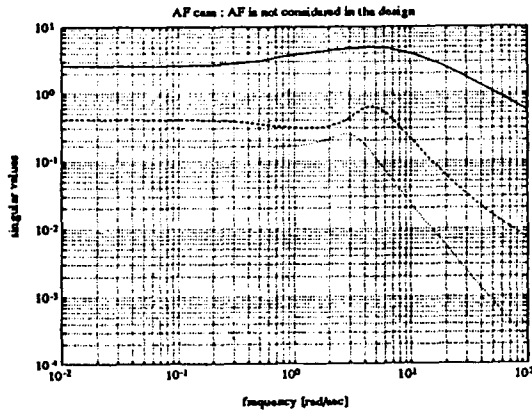
그림 2. 구동기의 고장을 고려한 설계에서  $\epsilon_1$ 과  $\epsilon_2$ 의 존재범위에 따른  $H_\infty$  노옴( $\alpha = 6$ )  
Fig. 2.  $H_\infty$  norm according to the existence ranges of the  $\epsilon_1$  and  $\epsilon_2$  in the design considering the actuator failures( $\alpha = 6$ ).

(2) 구동기와 감지기 모두의 고장 허용

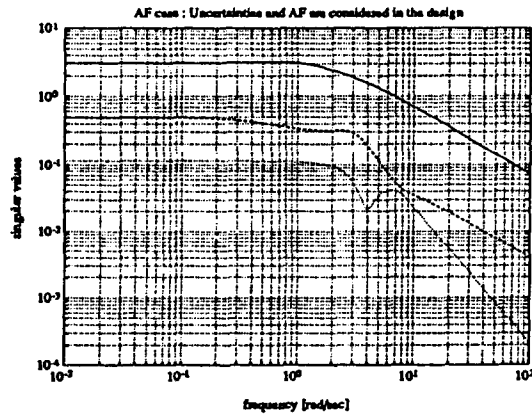
같은 불확정성이 있는 플랜트 (24)에 대해서 세 가지의 경우에 대한  $H_\infty$  노옴 값을 표 2에서 볼 수 있다.



(a)



(b)



(c)

그림 3. 구동기 고장시의 singular 값 ( $\alpha = 6$ )  
 (a) 불확정성과 구동기의 고장이 설계에서 고려되지 않은 경우 : (A-4)인 경우  
 (b) 구동기의 고장은 설계에서 고려되지 않은 경우 : (A-6)인 경우  
 (c) 불확정성과 구동기의 고장이 설계에서 고려된 경우 : (A-7)인 경우

Fig. 3. Singular values in case of AF ( $\alpha = 6$ )  
 (a) Uncertainties and AF are not considered in the design : case (A-4)  
 (b) AF is not considered in the design : case (A-6)  
 (c) Uncertainties and AF are considered in the design : case (A-7)

첫 번째 경우 (H-1)에서, 파라미터 불확정성만 고려된 (18)과 (19)을 이용하여 제어기를 설계된다. 두 번째 경우 (H-2)에서는 파라미터 불확정성과 구동기의 고장을 고려한 (14)와 (20)을 이용하여 설계되고, 마지막으로 세 번째의 경우 (H-3)은 파라미터 불확정성, 구동

기의 고장과 감지기의 고장이 모두 고려된 정리 1의 결과를 이용하여 설계된다.

표 1. 여러 경우에 대한 폐회로 전달 함수의  $H_\infty$  노음(1)

Table 1.  $H_\infty$  norm of closed loop transfer function for several cases(1).

실제의 경우	설계 조건	$\alpha=2$	$\alpha=2.65$	$\alpha=3.307$	$\alpha=5$	$\alpha=6$
(A-1) $\Delta A=0$ AF가 없음	$\Delta A=0$ 이고 AF가 없다는 가정하에 AF가 없음	1.995	2.491	2.716	3.244	3.364
(A-2) $\Delta A=0$ AF가 없음	이와 AF가 없다는 가정하에 AF가 없음	2.597	3.242	3.534	4.217	4.372
(A-3) $\Delta A \neq 0$ AF가 없음	이와 AF가 없다는 가정하에 AF가 없음	3.511	7.037	10.54	95.19	불안정
(A-4) $\Delta A \neq 0$ AF	이와 AF가 없다는 가정하에 AF가 없음	4.517	9.047	13.54	122.14	불안정
(A-5) $\Delta A \neq 0$ AF가 없음	불확정성 해를 얻은 것만 고려했	2.460	2.819	3.755	4.917	
(A-6) $\Delta A \neq 0$ AF	불확정성 해를 얻은 것만 고려했	2.460	2.819	3.755	4.917	
(A-7) $\Delta A \neq 0$ AF	불확정성 해를 얻은 것만 고려했	2.460	2.819	3.755	4.917	

\*\*\*AF : Actuator failure, 구동기의 고장  
 \*\*\*괄호안의 숫자는 각각  $\epsilon_1$ 과  $\epsilon_2$ 를 의미

표 2. 여러 경우에 대한 폐회로 전달 함수의  $H_\infty$  노음(2)

Table 2.  $H_\infty$  norm of closed loop transfer function for several cases(2).

실제의 경우	설계 조건	$\alpha=2.65$	$\alpha=3.07$	$\alpha=3.86$	$\alpha=6$
(H-1) $\Delta A \neq 0$ SF/AF이 없음	(18)과 (19)을 이용하여 설계	2.460	2.819	3.150	4.917
(H-2) $\Delta A \neq 0$ AF	(14)와(20)을 이용하여 설계	3.058	3.058	3.243	
(H-3) $\Delta A \neq 0$ SF와 AF	정리 1을 이용하여 설계	3.538	3.538	4.164	

\*\*\*AF : 구동기의 고장, SF : 감지기의 고장

표 2에서, 각각의 경우에 대해, 설계 조건이 만족되



면  $H_\infty$  성능 경계를 만족함을 볼 수 있다. 또한,  $\alpha < 3.86$ 인 경우, (14)와 (16)의 해를 찾을 수 없었는데, 여기서 우리는 파라미터 불확정성과 구동기 및 감지기의 고장을 모두 허용하기 위해서는 더 큰  $H_\infty$  노음 경계가 요구됨을 결론지을 수 있겠다.

(3) 고장에 대한 시스템의 동특성

이번 절에서는 제3장에서 제시한 신뢰성 있는 관측기를 기반으로 하는 제어기의 파라미터를 구하는 절차를 체계적으로 살펴보고, 불확정성과 고장이 고려되지 않고 설계된 제어기의 경우와 정리 1을 이용하여 이들 모두 고려하고 설계된 신뢰성 있는 제어기에 대한 동특성을 비교하고자 한다.

플랜트 (24)에서 우선, 불확정성과 고장을 무시하고 제어기를 설계해 보자.

제어기는 (18)과 (19)에서  $\varepsilon_1$ 과  $\varepsilon_2$ 을 영(0)으로 하고,  $Q_0$ 를 널 행렬로 놓고 해를 구하여 설계한다.  $\alpha$ 는 6으로 두자. 그러면,  $\varepsilon_1$ 과  $\varepsilon_2$ 을 영(0)으로 하고,  $Q_0$ 를 널 행렬(null matrix)로 놓은 (18)의 해인  $X$ 는 다음과 같다.

$$X = \begin{bmatrix} 0.4026 & 0.2908 & 0.0045 & 0.2463 \\ 0.2908 & 0.4046 & 0.2408 & 0.1941 \\ 0.0045 & 0.2408 & 0.3279 & 0.0915 \\ 0.2463 & 0.1941 & 0.0915 & 0.2983 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

그리고,

$$K1 = -B_1^T X = [ -0.2908 \quad -0.4046 \quad -0.2408 \quad -0.1941 ], \quad (27)$$

$$K2 = -B_2^T X = [ -0.2463 \quad -0.1941 \quad -0.0915 \quad -0.2983 ], \quad (28)$$

$$K_d = \frac{1}{\alpha^2} G^T X = [ 0.0113 \quad 0.0148 \quad 0.0092 \quad 0.0094 ]. \quad (29)$$

$A_0 + B_1 K_1 + B_2 K_2 + G K_d$ 의 고유치는  $\{-0.2329, -2.5425, -1.4535 \pm j 2.9786\}$  이다. 따라서,  $A_0 + B_1 K_1 + B_2 K_2 + G K_d$ 은 Hurwitz이다.  $A_0 + G K_d$ 의 고유치는  $\{0.2090, -2.5582, -1.3151 \pm j 2.9186\}$ 이므로  $j\omega$  축에 고유치를 갖지 않는다.

또한,  $\varepsilon_1$ 과  $\varepsilon_2$ 를 영(0)으로 하고,  $Q_0$ 를 널 행렬(null matrix)로 놓은 (19)의 해인  $W$ 는 다음과 같다.

$$W = \begin{bmatrix} 0.787 & 1.215 & 0.842 & -0.711 & 0.482 & 0.751 & 0.423 & -0.350 \\ 1.215 & 2.366 & 1.470 & -1.467 & 0.613 & 1.450 & 0.636 & -0.751 \\ 0.842 & 1.470 & 1.050 & -0.917 & 0.405 & 0.807 & 0.439 & -0.394 \\ -0.711 & -1.467 & -0.917 & 0.949 & -0.300 & -0.840 & -0.347 & 0.447 \\ 0.482 & 0.613 & 0.405 & -0.300 & 0.681 & 0.934 & 0.655 & -0.538 \\ 0.751 & 1.450 & 0.807 & -0.840 & 0.934 & 1.77 & 1.007 & -1.060 \\ 0.423 & 0.636 & 0.439 & -0.347 & 0.655 & 1.007 & 0.743 & -0.630 \\ -0.350 & -0.751 & -0.394 & 0.447 & -0.538 & -1.060 & -0.630 & 0.680 \end{bmatrix} \quad (30)$$

그리고,

$$L_1 = W_{11} C_1^T = [ 0.7868 \quad 1.2152 \quad 0.8420 \quad -0.7112 ]^T. \quad (31)$$

$$L_2 = W_{22} C_2^T = [ 0.6545 \quad 1.0070 \quad 0.7432 \quad -0.6302 ]^T. \quad (32)$$

그러므로, 첫 번째 제어기는 아래와 같다.

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -2.7755 & 1.0148 & 1.0092 & 1.0094 \\ 1.4940 & -0.4046 & -0.2408 & 1.8059 \\ -1.8307 & 0.0148 & -1.9908 & -2.9906 \\ -1.5350 & -1.1941 & 1.9085 & -1.2983 \end{bmatrix} \xi_1 + \begin{bmatrix} 0.7868 \\ 1.2153 \\ 0.8420 \\ -0.7112 \end{bmatrix} y_1. \quad (33)$$

$$u_1 = [ -0.2908 \quad -0.4046 \quad -0.2408 \quad -0.1941 ] \xi_1.$$

그리고, 두 번째 제어기는

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} -1.9887 & 1.0148 & 0.3547 & 1.0094 \\ 2.7092 & -0.4046 & -1.2479 & 1.8059 \\ -0.9887 & 0.0148 & -2.7340 & -2.9906 \\ -2.2463 & -1.1941 & 2.5388 & -1.2983 \end{bmatrix} \xi_2 + \begin{bmatrix} 0.6545 \\ 1.0070 \\ 0.7432 \\ -0.6302 \end{bmatrix} y_2. \quad (34)$$

$$u_2 = [ -0.2463 \quad -0.1941 \quad -0.0915 \quad -0.2983 ] \xi_2.$$

다음에 신뢰성 있는 제어기를 설계해 보자.

제어기는 정리 1을 이용하며,  $\varepsilon_1 = 0.032$ ,  $\varepsilon_2 = 0.032$  이고  $\alpha = 6$ 으로 두었다. 그러면, (14)의 해인  $\bar{X}$ 는 다음과 같다.

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 0.8703 & 0.8422 & 0.1543 & 0.3790 \\ 0.8422 & 1.2695 & 0.5325 & 0.4849 \\ 0.1543 & 0.5325 & 0.7096 & 0.2163 \\ 0.3790 & 0.4849 & 0.2163 & 0.7800 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

그리고,

$$\bar{K}_1 = [ -0.8422 \quad -1.2695 \quad -0.5325 \quad -0.4829 ], \quad (36)$$

$$\bar{K}_2 = [ -0.3790 \quad -0.4849 \quad -0.2163 \quad -0.7800 ], \quad (37)$$

$$\bar{K}_d = \begin{bmatrix} 0.0285 & 0.0382 & 0.0240 & 0.0165 \\ 0.0234 & 0.0353 & 0.0148 & 0.0135 \\ 0.0105 & 0.0135 & 0.0060 & 0.0217 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

$A_0 + B_1 \bar{K}_1 + B_2 \bar{K}_2 + G \bar{K}_d$ 의 고유치는  $\{ -0.8526, -2.7193, -1.6841 \pm j3.0725 \}$ 이다. 따라서,  $A_0 + B_1 \bar{K}_1 + B_2 \bar{K}_2 + G \bar{K}_d$ 은 Hurwitz이다.  $A_0 + \bar{\Gamma} \bar{K}_d$ 은  $\{ 0.2776, -2.5543, -1.3070 \pm j2.9126 \}$ 이므로  $j\omega$  축에 고유치를 갖지 않는다.

또한, (16)의 해인  $\bar{W}$ 은 다음과 같다.

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} 5.363 & 11.694 & 7.026 & -6.909 & 2.174 & 8.209 & 1.919 & -3.186 \\ 11.694 & 26.644 & 15.015 & -15.412 & 4.646 & 18.874 & 4.181 & -7.476 \\ 7.026 & 15.015 & 10.146 & -9.445 & 2.390 & 10.159 & 2.457 & -4.050 \\ -6.909 & -15.412 & -9.445 & 9.950 & -2.355 & -10.334 & -2.401 & 4.381 \\ 2.174 & 4.646 & 2.390 & -2.355 & 3.144 & 7.274 & 3.088 & -4.067 \\ 8.209 & 18.874 & 10.159 & -10.334 & 7.274 & 23.456 & 7.081 & -11.315 \\ 1.919 & 4.181 & 2.457 & -2.401 & 3.088 & 7.081 & 4.380 & -4.815 \\ -3.186 & -7.476 & -4.050 & 4.381 & -4.067 & -11.315 & -4.815 & 7.182 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

그리고

$$\bar{L}_1 = [ 2.8163 \quad 5.8468 \quad 3.5132 \quad -3.4544 ]^T. \quad (40)$$

$$\bar{L}_2 = [ 1.5439 \quad 3.5407 \quad 2.1900 \quad -2.4076 ]^T. \quad (41)$$

결과적으로 첫 번째 제어기는 다음과 같다.

$$\xi_1'' = \begin{bmatrix} -4.7879 & 1.0382 & 1.0240 & 1.0165 \\ -3.6657 & -1.2342 & -0.5177 & 1.5285 \\ -4.4847 & 0.0382 & -1.9760 & -2.9835 \\ 1.0859 & -1.4715 & 1.7897 & -1.7583 \end{bmatrix} \xi_1'' + \begin{bmatrix} 2.8163 \\ 5.8468 \\ 3.5132 \\ -3.4544 \end{bmatrix} y_1.$$

$$u_1 = [ -0.8422 \quad -1.2695 \quad -0.5325 \quad -0.4829 ] \xi_1''. \quad (42)$$

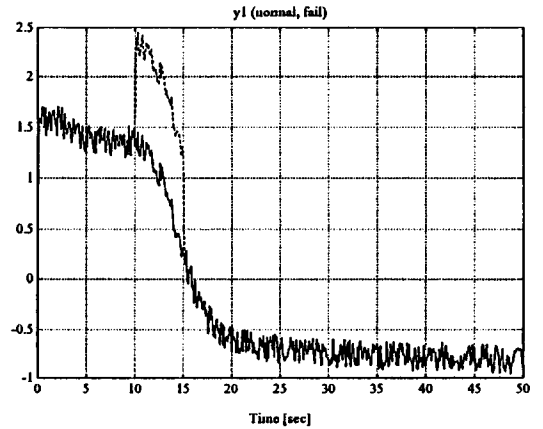
그리고 두 번째 제어기는 다음과 같다.

$$\xi_2'' = \begin{bmatrix} -1.9715 & 1.0382 & -0.5199 & 1.0165 \\ 2.1812 & -1.2342 & -4.0584 & 1.5285 \\ -0.9715 & 0.0382 & -4.1660 & -2.9835 \\ -2.3685 & -1.4715 & 4.1973 & -1.7583 \end{bmatrix} \xi_2'' + \begin{bmatrix} 1.5439 \\ 3.5407 \\ 2.1900 \\ 3 - 2.4076 \end{bmatrix} y_2.$$

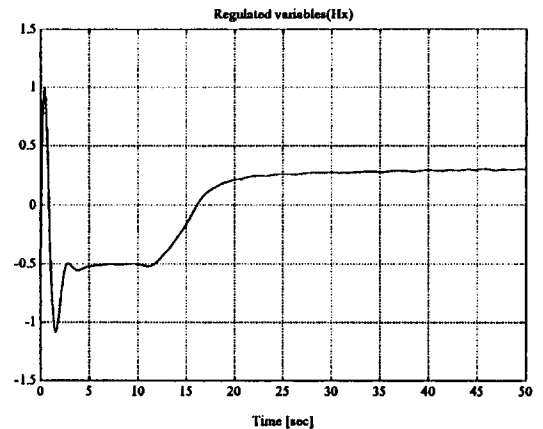
$$u_2 = [ -0.3790 \quad -0.4849 \quad -0.2163 \quad -0.7800 ] \xi_2''. \quad (43)$$

설계된 제어기를 이용한 모의 실험(simulation)에서 외인성 입력은  $-0.15$ 와  $0.15$  사이의 임의의 신호(random signal)라 가정한다. 참고 문헌 [12]에서 보인 여러 가지의 고장 모의 실험예 중에서 10초와 15초 사이의 바이어스(bias) 고장의 경우를 살펴보기로 한다. 이 경우에서, 감지기의 고장이 발생 시에는  $y_1$ 이  $y_1+1$ 로 된다. 같은 방식이 구동기의 고장 시에도 적용되었으며, 플랜트의 초기 상태는  $x(0) = [1 \ 3 \ 2 \ 1]^T$ 으로 한다.

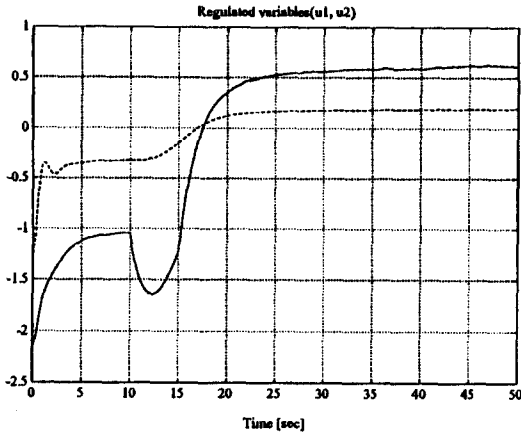
그림 4는 전자에 의해 설계된  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ 를 상태로 갖는 제어기 (33)와 (34)에서 플랜트에 불확정성과 감지기의 고장이 발생한 경우의 레귤레이티드 변수의 동특성을 나타낸 것으로, 불안정해져서 제어기로서의 기능을 상실함을 볼 수 있다.



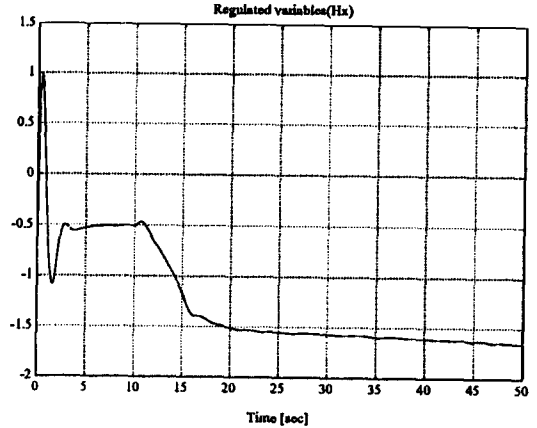
(a)



(b)



(c)

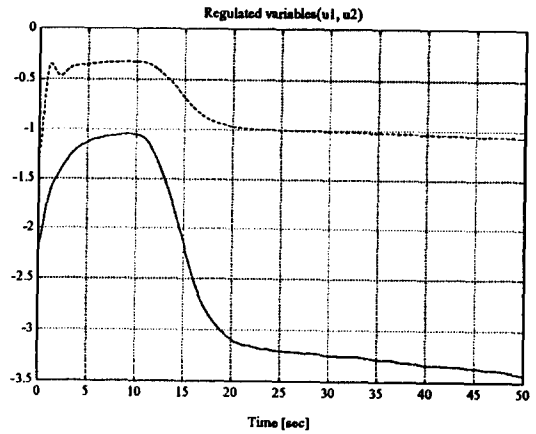


(b)

그림 4. 불확정성과 고장이 설계에서 고려되지 않은 경우의 동특성 : 실제로  $\Delta A \neq 0$  이고 감지기의 고장이 발생 (a)  $y_1$ , (b)  $Hx$ , (c)  $u_1, u_2$

Fig. 4. Time responses when uncertainties and failures are not considered in the design : actually  $\Delta A \neq 0$  and sensor failures occur (a)  $y_1$ , (b)  $Hx$ , (c)  $u_1, u_2$

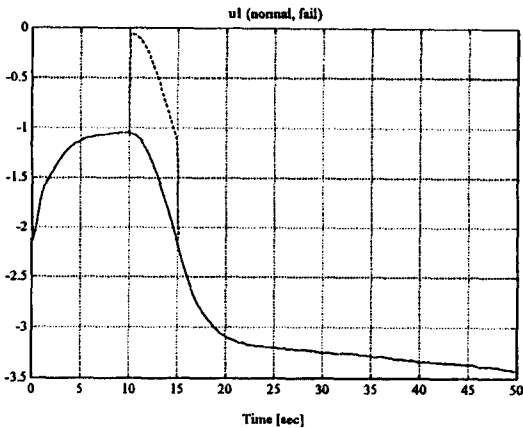
그림 5는 비슷하게 구동기의 고장시의 동특성이다. 그림 6은 후자에 의해 설계된  $\xi^{H_1}$ ,  $\xi^{H_2}$ 를 상태로 갖는 제어기 (42)와 (43)에서 플랜트에 불확정성과 감지기의 고장이 발생한 경우이고 그림 7은 구동기에 고장이 발생한 경우의 레귤레이티드 변수의 동특성을 나타낸 것이다.  $H_\infty$  설계는 기본적으로 주파수 영역에서 설계한 것이므로, 설계된 제어기의 시간 동특성을 분명하게 비교하기는 어려우나, 그림 4, 5, 6을 통해 대략적인 특성을 이해할 수 있겠다.



(c)

그림 5. 불확정성과 고장이 설계에서 고려되지 않은 경우의 동특성 : 실제로  $\Delta A \neq 0$  이고 구동기의 고장이 발생 (a)  $u_1$ , (b)  $Hx$ , (c)  $u_1, u_2$

Fig. 5. Time responses when uncertainties and failures are not considered in the design : actually  $\Delta A \neq 0$  and actuator failures occur (a)  $u_1$ , (b)  $Hx$ , (c)  $u_1, u_2$



(a)

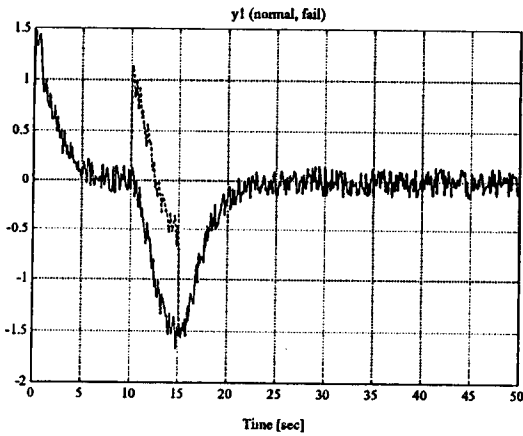
## V. 결론

본 논문에서는, 구동기 및 감지기의 고장을 허용하는 불확정성 선형시스템을 위한 신뢰성 제어시스템의 설계 문제를 다루었다. 고장에 대한 해석에 있어서, 구동기 및 감지기의 고장은 폐회로 시스템에 대한 또 다른 외인성 입력으로 처리되었으며, [1]의 결과를 확장 적용하였다. 예제에서 볼 수 있듯이 결과적으로 설

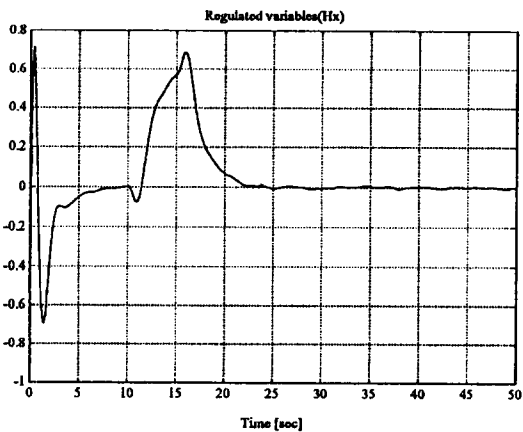
계된 폐회로 시스템은 파라미터 불확정성뿐만 아니라 구동기 및 감지기의 고장이 발생하더라도  $H_\infty$  노음 성능 경계를 만족한다. 또한, 신뢰성 있는 운용을 위해서 구동기 및 감지기의 고장이 허용되는 경우에는 그렇지 않을 때보다 더 큰  $H_\infty$  노음 성능 경계가 설정되어야 함을 주목할 수 있겠다.

폐회로 시스템 내에서 전체 시스템의 성능을 저하시키는 요인을 외부에서 볼 때는 파라미터의 불확정성이나 구동기 또는 감지기의 고장에 의한 것의 구별이 분명하게 되지 않으므로, 기존 연구 결과를 소프트웨어 고장의 경우까지만 약간의 변경을 통해 확장 적용하여 신뢰성 제어를 설계하였다.

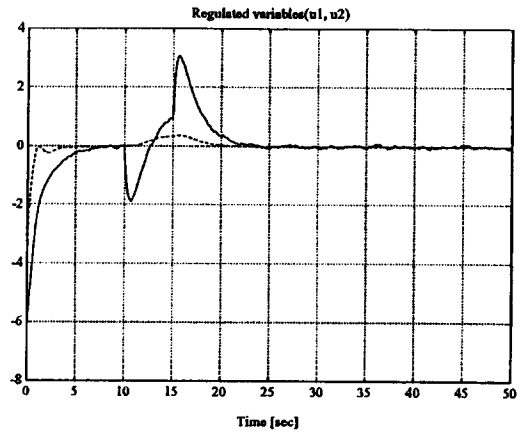
한편, 본 연구의 결과는 고장의 허용에 초점을 두고 이루어졌으나, 추후 연구과제로써 시스템 내의 고장 탐지(fault detection)나 인식(fault identification) 문제와 결합을 한 연구가 이루어질 필요가 있다고 본다.



(a)



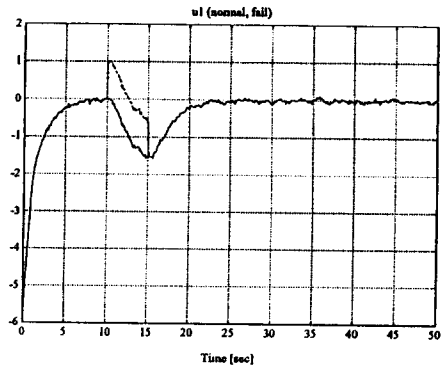
(b)



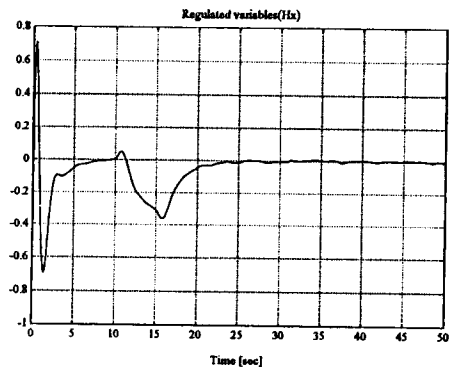
(c)

그림 6. 불확정성과 고장이 설계에서 고려된 경우의 동특성 : 실제적으로  $\Delta A \neq 0$  이고 감지기의 고장이 발생 (a)  $y_1$ , (b)  $Hx$ , (c)  $u_1, u_2$

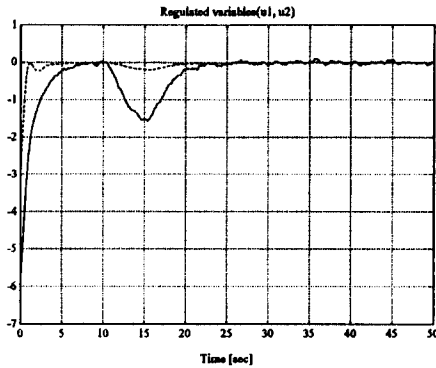
Fig. 6. Time responses when uncertainties and failures are considered in the design : actually  $\Delta A \neq 0$  and sensor failures occur (a)  $y_1$ , (b)  $Hx$ , (c)  $u_1, u_2$



(a)



(b)



(c)

그림 7. 불확정성과 고장이 설계에서 고려된 경우의 동특성 : 실제로  $\Delta A \neq 0$  이고 구동기의 고장이 발생 (a)  $u_1$ , (b)  $Hx$ , (c)  $u_1, u_2$

Fig. 7. Time responses when uncertainties and failures are considered in the design : actually  $\Delta A \neq 0$  and actuator failures occur (a)  $u_1$ , (b)  $Hx$ , (c)  $u_1, u_2$ .

참 고 문 헌

[1] S. H. Park and Z. Bien, " $H_\infty$  control with performance bound for a class of uncertain linear systems," *Automatica*, vol. 30, no. 12, pp. 2009-2012, 1994.

[2] R. J. Veillette, J. V. Medanic and W. R. Perkins, "Design of reliable control systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 37, pp. 290-304, 1992.

[3] D.D. Siljak, "Reliable control using multiple control systems," *Internat. J. Control*, vol. 31, pp. 303-329, 1980.

[4] M. Vidjasagar and N. Viswanadham, "Reliable stabilization using a multicontroller configuration," *Automatica*, vol. 21, pp. 599-602, 1985. *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 37, pp. 1786-1791, 1992.

[6] R. J. Veillette, J. V. Medanic and W. R. Perkins, "Robust stabilization and disturbance rejection for uncertain systems by decentralized control," In D. Hinrichsen and B. Martensen(Ed.), *Control of Uncertain Systems*, Birkhauser Publishing Company, pp. 309-327, 1990.

[7] R. Isermann, "Process fault detection based on modeling and estimation methods - A survey," *Automatica*, vol. 20, pp. 387-404, 1984.

[8] J. J. Gertler, "Survey of model-based failure detection and isolation in complex plants," *IEEE Control System Magazine*, pp. 3-11, Dec., 1988.

[9] P. M. Frank, "Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy - A survey and some new results," *Automatica*, vol. 26, pp. 459-474, 1990.

[10] Y.J. Cho and Z. Bien, "Reliable control via an additive redundant controller," *Internat. J. Control*, vol. 50, pp. 385-398, 1989.

[11] 박세화, "불확정성 선형시스템에 대한  $H_\infty$  노음 성능 경계를 만족하는 신뢰성 제어시스템의 설계," 한국과학기술원 박사학위 논문, 1995

[12] Saif, Y and Y. Guan, "A new approach to robust fault detection and identification' *IEEE Trans. Aero. and Elec. Systems*, vol. 29, no. 3, July, pp. 685-695, 1993.

## 저 자 소 개



朴世華(正會員)

1965년 7월 23일생, 1988년 2월 ~ 서울대학교 공과대학 전기공학과 졸업(학사). 1990년 2월 ~ 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(석사). 1995년 2월 ~ 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업

(박사). 1995년 3월 ~ 현재 ~ 생산기술연구원 생산설비개발센터 선임연구원. 주관심 분야는 제어이론, 고급 제어 이론의 산업계 응용, 중소형 규모의 자동화, 고장진단, 실시간 제어, 분산제어 시스템 개발 등임.

卞增男(正會員) 第33卷 B編 第3號 參照

현재 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 교수