

論文96-33B-7-12

# 벡터 양자화에서 시간 평균 왜곡치의 수렴 특성 I. 대수 법칙에 근거한 이론

## (The Convergence Characteristics of The Time-Averaged Distortion in Vector Quantization: Part I. Theory Based on The Law of Large Numbers)

金 東 植

(Dong Sik Kim)

## 요 약

어떤 부호책(codebook)이 주어졌을 때 이 부호책으로 확률 함수  $F$ 를 가지는 신호를 벡터 양자화한다고 하자. 이때, 평균 왜곡치(average distortion)는 함수  $F$ 를 사용하여 수학적 평균(mathematical average) 방법으로 구해진다. 그러나 일반적으로 입력 신호의 확률 함수는 잘 모르기 때문에, 그대신  $F$ 로부터 얻은 표본 벡터(sample vector)들의 집합으로부터 일종의 시간 평균(time-average)을 취해서 평균 왜곡치의 근사치를 얻는다. 이때 표본 집합의 크기는  $F$ 를 충실히 나타내기 위해서 충분히 커야 한다고 알려져 있다. 그러나 이러한 시간 평균 왜곡치에 대한 이론적 고찰은 빈약하다. 따라서 시간 평균을 통한 근사치가 정확한가에 대한 여부는 불분명하며, 이에 대한 특별한 검증없이 혼돈되어 사용되고 있다. 본 논문에서는 이러한 시간 평균 왜곡치의 수렴 특성이 표본 집합의 크기 또는 부호책의 크기가 커짐에 따라 어떻게 되는지를 이론적으로 분석하였다. 분석을 통해서 만일 부호책의 크기가 큰 경우에는 표본 집합의 크기가 그리 크지 않아도 근사치를 구할 수 있다는 사실이 증명되었다. 합성 데이터에 대한 모의실험도 아울러 행하였다.

## Abstract

The average distortion of the vector quantizer is calculated using a probability function  $F$  of the input source for a given codebook. But, since the input source is unknown in general, using the sample vectors that is realized from a random vector having probability function  $F$ , a time-average operation is employed so as to obtain an approximation of the average distortion. In this case the size of the sample set should be large so that the sample vectors represent true  $F$  reliably. The theoretical inspection about the approximation, however, is not performed rigorously. Thus one might use the time-average distortion without any verification of the approximation. In this paper, the convergence characteristics of the time-average distortions are theoretically investigated when the size of sample vectors or the size of codebook gets large. It has been revealed that if codebook size is large enough, then small sample set is enough to obtain the average distortion by approximation of the calculated time-averaged distortion. Experimental results on synthetic data, which are supporting the analysis, are also provided and discussed.

## I. 서론

벡터 양자화(vector quantization: VQ)는 높은 압축율이 요구되는 영상 및 음성 데이터 부호화에 사용되는 기법으로, 최근에 이를 이용한 많은 연구가 수행되고 있다<sup>[4]</sup>. 그러나 VQ를 실용화하는 데 있어서 부호화 과정에서의 계산량이 많이 요구되므로 VQ 과정을 실시간으로 구현하기 위한 기법 또는 VLSI 구조 등이 연구되고 있다. 또한 입력되는 신호의 특성에 가장 부합되는 부호책(codebook)의 설계도 문제가 되었는데, 특히 부호책의 설계에 있어서는 훈련 벡터 집합(training set: TS)을 이용한 방법이 그의 우수한 성능으로 인하여 흔히 사용되고 있다<sup>[4], [6]</sup>. 이는 일반적으로 양자화하려는 신호의 통계적 특성이 잘 알려져 있지 않고 안다고 해도 다차원 공간에서의 최적 또는 준최적 부호책을 찾는다는 것은 거의 불가능하기 때문에, 양자화하려는 신호의 표본(sample)을 직접 이용하여 군집화(clustering) 방법에 의해 부호책을 설계하는 기법이다. 이렇게 설계된 부호책으로 어떠한 입력 신호를 양자화할 때 양자화 왜곡치(quantization distortion)를 구한다. 그런데 일반적으로 입력 신호의 통계적 특성을 모르므로 확률 분포 함수(probability distribution function)에 의해 벡터 양자화의 평균 왜곡치(average quantizer distortion)를 구하는 대신 충분히 많은 표본 벡터(sample vector)들로부터 시간 평균(time average)을 구해서 평균 왜곡치의 근사치를 얻는다. 대수 법칙(the law of large numbers)에 의하면, 충분히 많은 표본 벡터가 있을 경우 실제 평균 왜곡치에 가까운 값은 시간 평균을 통해서 얻을 수 있다고 추론할 수가 있다. 그러나 이러한 시간 평균 왜곡치(time-averaged distortion)가 참값에 대해 바이어스(bias)되어 있지 않은가에 대한 이론적 고찰은 그리 충분하지 않다. [4, Ch.10]에 의하면 시간 평균 왜곡치가 어떠한 조건하에서 확률 1로 수렴한다고 하지만 자세히 묘사되어 있지는 않다. 대개는 시간 평균에 의한 근사화의 정확도를 잘 모르는 상태에서 사용하므로 훈련된 부호책(trained codebook)의 검증<sup>[6]</sup>이나 비트 할당(bit allocation)시 구하는 양자화 왜곡치의 신뢰성은 떨어지며, 그로 인한 그릇된 분석 및 양자기 설계가 발생할 수도 있다.

본 논문에서는 이러한 VQ의 시간 평균 왜곡치에 대한 정확한 이해를 위해서, 그의 수렴 특성이 먼저 표본

집합(sample set) 크기가 증가함에 따라 어떻게 되는지를 이론적으로 고찰하였다. 또한 부호책의 크기가 증가함에 따라 왜곡치의 점근적 특성(asymptotic characteristics)이 어떻게 되는지도 고찰하였다. 이론적 고찰에 따르면 부호책의 크기가 큰 경우에는 표본 벡터의 갯수가 적더라도 충분한 근사치가 구해진다는 사실을 알 수 있다<sup>[11]</sup>.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 II 장에서는 먼저 VQ의 평균 왜곡치와 그에 대한 시간 평균 왜곡치에 대한 정의를 내렸고, 제 III 장은 본론으로 들어가, 시간 평균 왜곡치에 대한 수렴 특성을 이론적으로 고찰 정리하였다. 이론적 고찰에 대한 간단한 모의 실험을 제 IV 장에서 소개하였으며, 마지막 장에서 본 논문의 결론을 내렸다.

## II. 벡터 양자화 왜곡치

이 장에서는 VQ의 왜곡치 및 시간 평균 왜곡치에 대한 정의들을 정리하였다. 또한 제 III 장에서 VQ의 이론적 고찰을 보다 용이하게 하기 위하여 일반화된 VQ 함수와 왜곡치도 정의하여 놓았다<sup>[9]</sup>.

$\Omega$ 를 확률 공간(probability space)을 이루는 표본 공간(sample space)이라 할 때,  $k$  차원의 공간에 속하는 랜덤 벡터(random vector)  $X$ 가 조인트 확률 함수로  $F(x)$ 를 가진다 하고 VQ는 이 랜덤 벡터  $X$ 를 양자화한다고 하자. 여기서 함수  $F(x)$ 는 연속(continuous) 함수라고 가정한다. VQ로 입력되는 신호는 일반적으로 하나의 값을 가지고 연속해서 입력되는 신호를  $k$  개씩 모아서 연속되는 벡터로 구성하게 된다. VQ는 각 벡터를 독립적으로 처리하므로 벡터 간에 상호 독립인 랜덤 벡터로 생각할 수 있다. 그러므로 VQ에 입력되는 벡터들을 확률 함수  $F(x)$ 로부터 구성된 하나의 랜덤 표본(random sample)으로 생각할 수 있다<sup>[3]</sup>. 즉 입력 벡터들은 서로 독립이고 동일한 확률 함수를 가지는 (independent and identically distributed: i.i.d.) 랜덤 벡터로 생각할 수 있다.  $T_M = X_1, \dots, X_M$ 를  $M$  개의 i.i.d. 랜덤 벡터로 구성된 표본 집합이라고 하면, 각각의 표본 패스(sample path)에 의해 결정되는 표본 집합  $T_M^\omega$ ,  $\omega \in \Omega$ 를 사용해서 일종의 시간 평균 왜곡치를 구하게 된다.

이제 VQ의 왜곡치를 정의하면 다음과 같다.  $C_N$ 을

$N$  개의 부호단어를 가지는  $k$  차수 실수 공간의 모든 부호책들의 class라 정의하자. 그러면 VQ 함수는 주어진 부호책  $C = y_1, \dots, y_N \in C_N$  과 이로부터 만들어지는 보로노이 구획(Voronoi partition)인  $S^\circ = S_1^\circ, \dots, S_N^\circ$  에 대해  $Q_C(x) = \min_{y \in C} \|x - y\|'$  이 된다. 이 식에서  $Q_C(\cdot)$ 는 VQ 함수로 부호책  $C$ 로의 사상(mapping)이며,  $\|\cdot\|'$ 는 유클리디언 놈(Euclidean norm)이고  $x, y \in R^k$ 이다. 따라서  $r$ 승의 VQ 왜곡치는 다음과 같이 정의된다.

$$D_r(C, F) \triangleq \int \|x - Q_C(x)\|^r dF(x) \quad (1)$$

또한 이 식은 다음과 같이 각 부호단어에 의해 야기되는 개체 평균 왜곡치 (partial average distortion)의 합 형태로 쓸 수 있다.

$$D_r(C, F) = \sum_{i=1}^N \int_{S_i^\circ} \|x - y_i\|^r dF(x) \quad (2)$$

이 식들에서 기본적인 가정은  $E\|X\|' < \infty$ 이다.  $r$ 승의 개체 평균 왜곡치를  $\sigma_{r,i}(C, F) \triangleq \int_{S_i^\circ} \|x - y_i\|^r dF(x)$  로 표기하면, VQ 평균 왜곡치는  $D_r(C, F) = \sum_{i=1}^N \sigma_{r,i}(C, F)$  로 표기된다. 그런데 확률 함수  $F$ 를 모른다고 하면, 식 (2)의 평균은 표본 벡터의 갯수  $M$ 가 충분히 클 때 다음과 같은 시간 평균 왜곡치를 사용하여 그 근사치를 구한다.

$$D_r(C, F_M^\circ) \triangleq \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \|X_j^\circ - Q_C(X_j^\circ)\|^r \quad (3)$$

이 식에서  $X_1^\circ, \dots, X_M^\circ$ 는 어떤 표본점(sample point)  $\omega \in \Omega$ 에 대해 구해진 표본 집합의 표본 벡터이다. 이러한 시간 평균 왜곡치는 다음과 같이 적분 형태로 다시 쓸 수 있다.

$$D_r(C, F_M^\circ) = \sum_{i=1}^N \int_{S_i^\circ} \|x - y_i\|^r dF_M^\circ(x) \quad (4)$$

이 식에서  $F_M^\circ$ 는 실험 분포 함수(empirical distribution function)로  $T_M^\circ, \omega \in \Omega$ 로부터 만들어진 것이다<sup>[15], [19]</sup>. 시간 평균치도 개체 평균치 형태로  $\sigma_{r,i}(C, F_M^\circ) \triangleq \int_{S_i^\circ} \|x - y_i\|^r dF_M^\circ(x)$ 라고 정의하면,  $D_r(C, F_M^\circ) = \sum_{i=1}^N \sigma_{r,i}(C, F_M^\circ)$ 로 다시 쓸 수 있다. 식 (3)에서 보는 바와 같이 시간 평균 왜곡치는  $M$ 개의 표본 벡터인

$X_1^\circ, \dots, X_M^\circ$ 의 함수이므로, 만일 이들을 랜덤 벡터인  $X_1, \dots, X_M$ 로 바꾸게 되면  $\sigma_{r,i}(C, F_M)$ 는 같은 표본 공간상에 있는 랜덤 변수(random variable)가 된다. 이 값은 평균 엘가딕 정리(mean ergodic theorem)에 의해서,  $M$ 가 증가되면서 randomness가 줄어들게 된다<sup>[11]</sup>. 이러한 내용의 증명은 다음 장에 정리해 놓았다.

추가하여, VQ 성능을 이론적으로 고찰하기 위해 다음과 같은 일반화 VQ 및 일반화 VQ 왜곡치를 정의하였다. 이러한 일반화된 VQ는 앞에서 정의된 VQ를 포함하고 있지만 VQ의 성능을 수학적으로 분석하는데 보다 용이하므로 다음과 같이 정의해 놓았다.

**정의 1(일반화된 VQ):** 주어진 부호책  $C = \{y_1, \dots, y_N\} \in C_N$ 과 중첩되지 않고 각 부호단어에 상응되는 양자화 영역을 가지는 클래스  $S = \{S_1, \dots, S_N\}$ 에 대해 일반화된 VQ 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$Q_{C,S}(x) \triangleq \sum_{i=1}^N y_i I_{S_i}(x) \quad (5)$$

이 식에서  $I_S(x)$ 는  $x \in S$ 일 때  $I_S(x) = 1$ 이고, 그렇지 않으면  $I_S(x) = 0$ 이다. 확률 밀도 함수(probability density function: pdf)  $f(x)$ 를 가지는 랜덤 벡터  $X$ 를 양자화하기 위해서는 어떠한 인덱스 집합(index set)  $A \subset \{1, \dots, N\}$ 에 대해서  $\sum_{i \in A} P_i = 1$ 이 성립되어야 한다. 이 식에서  $P_i = \int_{S_i} dF \neq 0, i \in A$ 이다. 여기서 집합  $A$ 를 " $f$ 에 정의되는  $S$ 에서의 비공집합들의 인덱스 집합" (non-empty index set of  $S$  on  $f$ )이라고 부르기로 한다. 또한 어떤 양자기  $Q_{C,S}(\cdot)$ 가 위 조건과  $E\|X\|' < \infty$ 를 만족한다고 하면, " $Q_{C,S}(\cdot)$ 는  $f$ 에 정의되어 있는 양자기" (quantizer(defined) on  $f$ )라 하고,  $S$ 는 " $f$ 에 정의된 양자화 구획" (quantizer partition (defined) on  $f$ )이라 부르기로 한다.

정의 1에 기초하여 다음과 같이 일반화된 VQ 평균 왜곡치를 정의할 수 있다. 만일  $Q_{C,S}(\cdot)$ 가  $f$ 에 정의된 양자기라 하면, 일반화된 양자화 평균 왜곡치는

$$D_r(C, S, F) \triangleq \int \|x - Q_{C,S}(x)\|^r dF(x) \quad (6)$$

로 정의된다. 당연히 주어진 부호책  $C \in C_N$ 에 대해서  $D_r(C, F) \leq D_r(C, S, F)$ 이 성립되며, 등호는 클래스  $S$ 가 부호책  $C$ 의 보로노이 구획일 때 성립된다. 또한

$Q_C(\cdot)$ 는 어떠한  $f$ 에 대해서도  $f$ 에 정의된 양자기입을 쉽게 알 수 있다. 여기서  $E\|X\|^{2r} < \infty$ 이다. 식 (2)와 같은 방식으로 식 (6)의 일반화된 양자화 왜곡치는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$D_r(C, S, F) = \sum_{i \in A} \int_{S_i} \|x - y_i\|^r dF(x) \quad (7)$$

이 식에서 개체 평균 왜곡치는

$$\delta_r(y_i, S_i, F) \triangleq \int_{S_i} \|x - y_i\|^r dF(x) \quad i \in A \quad (8)$$

로 정의된다.

### III. 왜곡치의 수렴 특성 분석

본 장에서는 앞에서 정의된 시간 평균 왜곡치의 수렴 특성에 대해서 이론적으로 고찰을 해 보았다. 언급된 바와 같이 이 왜곡치는 확률 공간  $\Omega$ 에 정의되는 랜덤 변수이므로 표본 집합에 따라서 그 값이 변하게 된다. 그러므로 이 왜곡치를 표본 왜곡치라 부를 수 있다.

어떤 부호책  $C \in C_N$ 에 대해서 VQ 평균 왜곡치인  $D_r(C, F)$ 를 구한다고 할 때, 일반적으로  $F$ 를 모르므로 표본 집합인  $T_M^\omega$ 를 사용해서 다음과 같은 근사 관계식을 얻는다.

$$D_r(C, F) \cong D_r(C, F_M^\omega) \quad (9)$$

여기서  $\omega \in \Omega$ 인데 모든 표본점에 대해서 이 근사식이 성립되지는 않는다. 이에 대한 이야기는 앞으로 소개될 정리 1을 참조하기 바란다. 이 식에서 실험 분포 함수인  $F_M^\omega$ 는 표본 집합  $T_M^\omega$ 로부터 만들어진 것이다. 이 근사화에서 표본 집합의 크기인  $M$ 는  $F_M^\omega$ 이 실제 분포 함수인  $F$ 를 충실히 묘사할 수 있을 만큼 커야 한다<sup>15</sup>. (Glivenko-Cantelli theorem)<sup>1</sup>. 그러나 실제 적용분야에서는 그렇게 큰 크기의 표본집합을 얻는 것은 사실상 불가능하다. 그러나 지금부터 소개될 정리(theorem) 및 추론(corollary)에서는 이러한 표본의 크기가  $D_r(C, F)$ 를 계산하는 데 있어서, 만일 부호책의 크기가 크다고 하면 그리 중요한 요소가 되지 못한다는 것을 이야기해 줄 것이다. 예를 들어,  $\beta \triangleq M/N$ 를 표본비(sample ratio)라고 정의할 때, 어떤 표본집합

$F_M^\omega$ 이  $\beta = 1$ , 즉  $M = N$ 이라 하더라도 부호책의 크기가 크다고 하면 평균 왜곡치인  $D_r(C, F)$ 는 식 (9)로부터 근사적으로 구할 수가 있다.

만일  $Q_{C,S}(\cdot)$ 가  $f$ 에 정의된 양자기라 하고  $A$ 를  $f$ 에 정의된  $S$ 의 비공집합들의 인덱스 집합이라고 한다면, 일반화된 시간 평균 왜곡치는 어떠한  $\omega \in \Omega$ 에 대해서 다음과 같이 개체 왜곡치들의 합의 형태로 나타낼 수 있다.

$$D_r(C, S, F_M^\omega) = \sum_{i \in A} \delta_r(y_i, S_i, F_M^\omega) \quad (10)$$

이 식에서  $\delta_r(y_i, S_i, F_M^\omega) \triangleq M^{-1} \sum_{j=1}^M I_{S_i}(X_j^\omega) \|X_j^\omega - y_i\|^r$ 이다.

**정리 1(시간 평균 왜곡치에 대한 평균 엘가드 정리):** 만일  $Q_{C,S}(\cdot)$ 가  $f$ 에 정의된 양자기라 하고  $A$ 를  $f$ 에 정의된  $S$ 의 비공집합들의 인덱스 집합이라 하며,  $E\|X\|^{2r} < \infty$ 라 가정하면, 고정된 부호책의 크기  $N$ 에 대해서,

$$l. i. m. \beta \rightarrow \infty \delta_r(y_i, S_i, F_M) = \delta_r(y_i, S_i, F), \quad i \in A \quad (11)$$

이 성립된다.

**정리 1의 증명:** 평균 엘가드 정리에 의하면 정리 1의 성립은 당연하다. 그러나 여기서는 이러한 사실의 증명을 다시 한 번 정리하였다.

$\delta_r(y_i, S_i, F_M)$ ,  $i \in A$ 의 분산(variance)은 다음과 같은 관계를 만족시킨다.

$$\text{Var } \delta_r(y_i, S_i, F_M) = \frac{1}{M} \{ \delta_{2r}(y_i, S_i, F) - [\delta_r(y_i, S_i, F)]^2 \} \quad (12)$$

이 관계식의 증명을 부록 A에 정리하였다.  $E\|X\|^{2r} < \infty$ 이므로 식 (12)에  $M \rightarrow \infty$ 의 극한을 취하면

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \text{Var } \delta_r(y_i, S_i, F_M) = 0 \quad (13)$$

을 얻는다. 즉,  $\delta_r(y_i, S_i, F_M)$ 는  $\delta_r(y_i, S_i, F)$ 에 평균 자승 개념(mean square sense)으로  $\beta \rightarrow \infty$  됨에 따라 수렴하게 된다.

**추론 1:** 정리 1에 제시된 가정하에서, 부호책의 크기가 고정된  $N$ 이라 할 때 어떤 표본점  $\omega \in \Omega$ 에 대해

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \delta_r(y_i, S_i, F_M^\omega) = \delta_r(y_i, S_i, F) \text{ a. s. }, \quad i \in A \quad (14)$$

가 성립된다.

**추론 1의 증명:**  $\sum_{j=1}^M [M^{-1} I_S(X_j) \|X_j - y_j\|^2]$ 에서 인덱스  $j$ 에 의해 각각 더해지는 항들은 서로 상호간 독립이므로, [1, Equivalence Theorem]으로부터, 평균 자승 개념으로의 수렴은 확률 1로의 수렴(convergence with probability 1)과 동일하다. 그러므로 정리 1로부터 추론 1이 증명된다. ■

그러므로, 정리 1에 언급된 것과 같은 조건하에서, 추론 1로부터

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} D_r(C, F_M^\omega) = D_r(C, F) \text{ a.s.} \quad (15)$$

가 성립된다. 또한 추론 1로부터,  $\beta \rightarrow \infty$ 에 따라  $\delta_r(y_i, S_i, F_M^\omega) \rightarrow \delta_r(y_i, S_i, F)$  a.s.(almost surely)가 성립된다. 이 식에서  $\delta_r(y_i, S_i, F_M^\omega)$ 는 어떤 값  $\omega$  하나에 대한 개체 시간 평균 왜곡치이다. 그와 반면 다음에 소개될 추론은 모든  $\omega$  값에 대한 앙상블(ensemble)평균이며,  $\delta_r(y_i, S_i, F_M^\omega)$ 이  $\delta_r(y_i, S_i, F)$ 의 바리어스되어 있지 않은 추정치(estimator)임을 증명하고 있다.

**추론 2 (언바이어스된 추정):** 만일  $Q_{C,S}(\cdot)$ 가  $f$ 에 정의된 양자기라 하고  $A$ 를  $f$ 에 정의된  $S$ 의 비공집합들의 인덱스 집합이라 하고,  $E\|X\|^r < \infty$ 라 하면, 고정된 부호책의 크기  $N$ 과 어떤 값을 가지는 표본비  $\beta \geq 1$ 에 대해

$$E\delta_r(y_i, S_i, F_M) = \delta_r(y_i, S_i, F) \quad (16)$$

가 성립된다.

**추론 2의 증명:** 이 추론의 증명은 부록 A에 제시되어 있다. ■

추론 2로부터 만일  $E\|X\|^r < \infty$ 이면,  $D_r(C, F_M^\omega)$ 는  $D_r(C, F)$ 의 언바이어스된 추정치, 즉  $ED_r(C, F_M) = D_r(C, F)$ 라는 결과를 얻는다.

다음 정리는 작은 크기의 표본 집합으로도 평균 왜곡치를 구하는 데 충분하다는 내용을 증명한다.

**정리 2:** 만일  $Q_{C,S}(\cdot)$ 가  $f$ 에 정의된 양자기라 하고  $A_N$ 을  $f$ 에 정의된  $S$ 의 비공집합들의 인덱스 집합이라 하고,  $E\|X\|^{2r} < \infty$ 이며, 부호책 열(sequence)인  $C_N, N=1, \dots$ 는  $\lim_{N \rightarrow \infty} N^{r/k} D_r(C_N, S_N, F) < \infty$ 를 만족시킨다고 하면<sup>[7],[8]</sup>, 이 부호책 열은 각 표본비

$\beta \geq 1$ 에 대해

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} N^{r/k} D_r(C_N, S_N, F_M) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{r/k} D_r(C_N, S_N, F) \quad (17)$$

이 성립된다.

**정리 2의 증명:** 부록 B로부터

$$\text{Var } D_r(C_N, S_N, F_M) = \frac{1}{N\beta} D_{2r}(C_N, S_N, F) - \frac{1}{N\beta} \sum_{i \in A_N} [\delta_r(y_i, S_i, F)]^2 \quad (18)$$

이 성립된다. 또한  $\lim_{N \rightarrow \infty} N^{r/k} D_r(C_N, S_N, F) < \infty$ 이므로

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^{2r/k}}{N\beta} \sum_{i \in A_N} \delta_r^2(y_i, S_i, F) < \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^{2r/k}}{N\beta} D_{2r}(C_N, S_N, F) = 0 \quad (19)$$

이 성립된다. 가정으로부터  $\lim_{N \rightarrow \infty} N^{2r/k} D_{2r}(C_N, S_N, F) < \infty$ 이므로<sup>[9]</sup>,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{2r/k} D_{2r}(C_N, S_N, F) / (N\beta) = 0 \quad (20)$$

이 성립된다. 그러므로

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var} [N^{r/k} D_r(C_N, S_N, F_M)] = 0 \quad (21)$$

이 성립되어 정리 2가 증명된다. ■

정리 2의 결과에 의하면,  $\omega$ 에 따라서 부호책의 크기가 큰 경우 다음과 같은 근사식을 얻을 수 있다.

$$D_r(C, F_M^\omega) \cong D_r(C, F), \beta \geq 1 \quad (22)$$

즉  $\beta$ 가 어떠한 값을 가지더라도  $N$ 이 크다고 하면 시간 평균 왜곡치가 참값인 수학적 평균을 근사할 수 있다.

#### IV. 모의 실험 결과

본 장에서는 정리 2에서 언급된 내용을 합성 신호에 대해 간단히 모의 실험함으로써 확인해 보았다. 먼저  $r=2$ 인 경우에 대해서, 식 (22)의 근사식을 확인하였다. 표본 집합은 독립인 가우시안(Gaussian) 분포를 가지는 신호로부터 구성되었으며 여러 가지 표본비에 대해서 그 결과를 그림 1에 도시하였다. 모두 세 종류의 부호책을 실험하였는데, 모두  $k=16$ 과  $N=256$ 이며 마지막 부호책을 제외하고는 모두 GLA(generalized Lloyd algorithm)<sup>[6]</sup>로 부호책을 설계하였다.

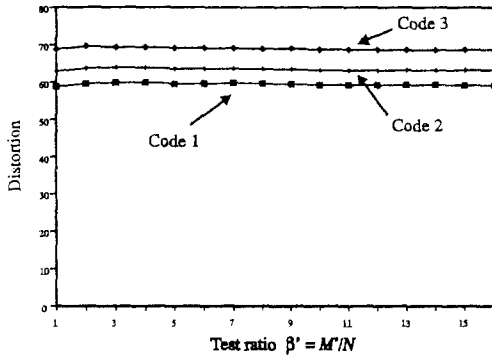


그림 1. 여러 가지 표본비  $\beta$  일 때의 시간 평균 왜곡치

Fig. 1. OTSD's and the test ratio  $\beta$ .

첫번째 부호책은 초기 부호책을 만들기 위해 분할 알고리즘(split algorithm)을 사용하였으며 훈련 벡터(training vector)의 갯수는  $M = 16384$ 이다 (Code 1). 두번째 부호책은 초기 부호책을 훈련 벡터에서 일정한 간격을 두고 직접 선택한 것으로  $M = 1024$ 이다 (Code 2). 그리고 마지막 부호책은 각 부호단어들을 임의적으로 훈련집합(training set)에서 추출한 것, 즉 random quantizer이다<sup>[7]</sup> (Code 3). 그림 1에서 보는 바와 같이 식 (4)의 시간 평균 왜곡치가  $M = N$  일 때의 값과  $M > N$ 인 경우의 값들이, 하나의 부호책에서는 서로 비슷한 값을 보이고 있음을 알 수 있다. 이러한 실험은 여러 가지 표본 집합, 즉 서로 다른  $\omega$  에 대해서도  $M = N$ 인 경우에 한하여 행하였으며 이를 그림 2에 도시하였다.

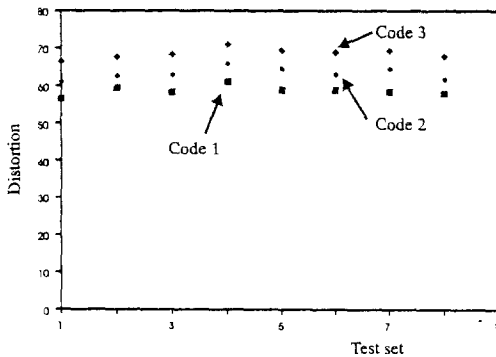


그림 2. 여러 가지 표본 집합과 시간 평균 왜곡치

Fig. 2. OTSD's and test sets.

이때도 마찬가지로 표본 집합이 바뀌지만 시간 평균

치가 일정하게 나오고 있음을 관찰할 수 있다. 그러므로 결론적으로 식 (22)의 근사식으로부터 VQ의 평균 왜곡치를 근사적으로 구할 수 있음을 알 수 있다. 그러나 이러한 근사식은 항상 성립되는 것은 아니다. 정리 2에서 보는 바와 같이 시간 평균 왜곡치는 평균 자승의 개념으로 수렴하는 것이기 때문에 어떤  $\omega \in \Omega$ 에 대해서는, 즉 어떤 표본 집합에 대해서는 식 (22)의 근사치가 전혀 성립되지 않는다. 이에 대한 자세한 내용은 [10]을 참조하기 바란다.

V. 결 론

본 논문에서는 VQ 왜곡치를 근사시키는 시간 평균 왜곡치의 수렴 특성을 이론적으로 고찰한 것으로서, 이러한 시간 왜곡치가 실제 값에 대해서 언바이어스된 추정치임을 이론적으로 증명하였으며, 부호책의 크기가 고정되어 있고 표본의 크기가 증가할 때, 즉 표본비  $\beta$ 가 증가할 때 평균 자승 및 확률 1의 개념으로 수렴한다는 사실을 증명하였다. 또한 표본비를 고정시켜 놓고 부호책의 크기를 증가시킬 때 시간 평균 왜곡치는 그의 참값에 평균 자승의 개념으로 수렴한다는 사실을 증명하였다. 이를 통해서 부호책의 크기가 큰 경우에는 표본 벡터가 그리 많지 않아도 시간 평균 왜곡치가 참값인 평균 왜곡치에 충분히 근사된다는 사실을 알 수 있었다.

부 록 A

식 (12)의 자세한 유도는 다음과 같다.  $\delta_r(y_i, S_i, F_M)$ 의 분산은 각 부호책 인덱스  $i \in A$ 에 대해서 다음과 같이 주어진다.

$$\text{Var } \delta_r(y_i, S_i, F_M) = E[\delta_r(y_i, S_i, F_M)]^2 - [E\delta_r(y_i, S_i, F_M)]^2 \quad (A1)$$

첫번째로, 이 식에서  $E\delta_r(y_i, S_i, F_M)$  항을 유도하면 다음과 같다. 식 (10)에서의 정의로부터

$$\delta_r(y_i, S_i, F_M) = \frac{1}{M} \sum_{j \in A_i} \|X_j - y_i\|^2, \quad i \in A. \quad (A2)$$

이 식에서  $A_i = \{j: X_j \in S_i\}$ 이며  $A_i$ 는 서로 중첩되지 않은 집합(disjoint set)이다. 그러면 식 (A2)의 평균은

$$E\delta_r(y_i, S_i, F_M) = \int \dots \int \frac{1}{M} \sum_{i \in A} \|x_i - y_i\|^r dF^M \quad (A3)$$

과 같이 쓸 수 있는데, 이 식에서  $dF^M$ 는  $dF(x_1) \dots dF(x_M)$ 를 나타내며 각 적분  $\int$ 는  $k$ 중 적분을 의미한다.

집합  $A$ 의 크기(cadinality)를  $\|A\| = \bar{N}$ 로 표기할 때, 각 부호단어를 지칭하는 인덱스  $i \in A$ 를 간단히 하기 위해서  $S$ 의 원소인  $\bar{N}$ 개의 양자화 영역  $S_i, i \in A$ 를  $S_{(l)}, l = 1, \dots, \bar{N}$ 로 표기하기로 하자. 또한  $B_\nu$ 를,  $S_i$ 들을  $M$ 번 Cartesian product한 것이라 하고 인덱스 범위가  $\nu = 1$ 에서  $\bar{N}^M$ 라고 하자. 그러면  $\{S_{(l)} : l = 1, \dots, \bar{N}\}$ 가  $\{x : f(x) \neq 0\}$ 를 나누는 구획이므로,  $\{B_\nu : \nu = 1, \dots, \bar{N}^M\}$ 은  $kM$  차원의 공간을 나누는 초월공간의 육면체(hypercube)들의 집합이 된다. 그러므로 식 (A3)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$E\delta_r(y_i, S_i, F_M) = \sum_{\nu=1}^{\bar{N}^M} \int \dots \int_{B_\nu} \frac{1}{M} \sum_{i \in A_i(\nu)} \|x_i - y_i\|^r dF^M, i \in A \quad (A4)$$

이 식에서  $A_i$ 는 주어진 어떤 적분구간  $B_\nu$ 에서는 그 원소가 상수가 되므로  $A_i^{(\nu)}$ 와 같이 표기하였다. 식 (A4)에서 적분 변수가 어떤 값  $x_1, \dots, x_M \in R^k$ 를 가질 때  $m_i$ 를 집합  $\{x_1, \dots, x_M\} \cap S_i, i \in A$ 의 크기라고 하면, 원소들의 합이  $M$ 가 되는 집합  $(m_{(1)}, \dots, m_{(\bar{N})})$ 들도  $(x_1 \dots x_M)^T$ 이 속해 있는 어떤 적분구간  $B_\nu$  내에서는 상수가 되므로 그때의 인덱스  $\nu$ 로 나타낼 수 있다. 결국 [9]에 언급된 바와 유사한 방법으로 식 (A4)는 다음과 같이 된다.

$$\frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^{\bar{N}^M} P_{(1)}^{m_{(1)}} \dots P_{(\bar{N})}^{m_{(\bar{N})}} P_i^{-1} m_i^{(\nu)} \delta_r(y_i, S_i, F), i \in A \quad (A5)$$

그런데 이 식에서  $P_i$ 는 정의 1에 소개되어 있다. 랜덤 변수인  $m_i$ 는 다진 분포(multinomial distribution)<sup>13</sup>를 가지므로,

$$\sum_{\nu=1}^{\bar{N}^M} P_{(1)}^{m_{(1)}} \dots P_{(\bar{N})}^{m_{(\bar{N})}} m_i^{(\nu)} = M P_i, i \in A \quad (A6)$$

이 성립된다. 그러므로 식 (A6)과 식 (A5)를 식 (A4)에 대입하면

$$E\delta_r(y_i, S_i, F_M) = \delta_r(y_i, S_i, F) \quad (A7)$$

를 얻는다. 이 결과는 추론 2에 다시 정리되어 있다.

다음으로,  $E[\delta_r(y_i, S_i, F_M)]^2$ 의 유도는 다음과 같다. 식 (A4)의 경우와 유사하게

$$E[\delta_r(y_i, S_i, F_M)]^2 = \sum_{\nu=1}^{\bar{N}^M} \int \dots \int_{B_\nu} \left[ \frac{1}{M} \sum_{i \in A_i(\nu)} \|x_i - y_i\|^r \right]^2 dF^M, i \in A \quad (A8)$$

로 쓸 수 있다. 식 (A8)을 전개하면

$$E[\delta_r(y_i, S_i, F_M)]^2 = \frac{1}{M^2} \sum_{\nu=1}^{\bar{N}^M} P_{(1)}^{m_{(1)}} \dots P_{(\bar{N})}^{m_{(\bar{N})}} [m_i^{(\nu)} P_i^{-1} \int_{S_i} \|x - y_i\|^{2r} dF(x) + m_i^{(\nu)}(m_i^{(\nu)} - 1) P_i^{-2} \delta_r^2(y_i, S_i, F)], i \in A \quad (A9)$$

이 된다. 그러므로 양자기  $Q_{C,S}(\cdot)$ 에 대해

$$E[\delta_r(y_i, S_i, F_M)]^2 = \frac{1}{M} \delta_{2r}(y_i, S_i, F) + \frac{M-1}{M} \delta_r^2(y_i, S_i, F), i \in A \quad (A10)$$

이 얻어지며, 식 (A7)과 식 (A10)을 식 (A1)에 대입하면

$$\text{Var } \delta_{r(y_i, S_i, F_M)} = \frac{1}{M} [\delta_{2r}(y_i, S_i, F) - [\delta_r(y_i, S_i, F)]^2] \quad (A11)$$

을 얻는다. 결국 식 (12)가 성립된다.

부가적으로, Hölder의 부등식과<sup>12)</sup>  $P_i < 1, i \in A$ 의 관계식으로부터

$$[\int_{S_i} \|x - y_i\|^r dF(x)]^2 \leq P_i \cdot \int_{S_i} \|x - y_i\|^{2r} dF(x) < \int_{S_i} \|x - y_i\|^{2r} dF(x) \quad (A12)$$

을 얻는데, 이는

$$\delta_{2r}(y_i, S_i, F) - [\delta_r(y_i, S_i, F)]^2 > 0 \quad (A13)$$

을 의미하는 것으로 식 (A11)의 오른쪽 항이 항상 양수가 되어야 하는 사실을 입증하고 있다.

### 부 록 B

$D_r(C, S, F_M)$ 의 분산 유도는 다음과 같다. 먼저 분산은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\text{Var } D(C, S, F_M) = E[D_r(C, S, F_M)]^2 - [E D_r(C, S, F_M)]^2 \quad (B1)$$

식 (10)으로부터,  $E M^{-1} \sum_{j \in A_i} \|X_j - y_i\|^r = \delta_r(y_i, S_i, F_M)$ 인데, 이 식에서  $y_i \in C_N$ 이며  $S_i \in S_N$ 이다. 그러므로

$$\begin{aligned} ED_{r(C, S, F_M)} &= E \frac{1}{M} \sum_{i \in A} \sum_{j \in A_i} \|X_j - y_i\|^r \\ &= \sum_{i \in A} \delta_r(y_i, S_i, F) \\ &= D_r(C, S, F) \end{aligned} \tag{B2}$$

가 된다. 다음,  $E [D_r(C, S, F_M)]^2$ 의 유도는 다음과 같다. 이 식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$E [D_r(C, S, F_M)]^2 = \int \dots \int \left[ \frac{1}{M} \sum_{i \in A} \left[ \sum_{j \in A_i} \|x_j - y_i\|^r \right] \right]^2 dF^M \tag{B3}$$

이 식의 외각 괄호의 자승항을 전개하면

$$\begin{aligned} E [D_r(C, S, F_M)]^2 &= \int \dots \int \frac{1}{M^2} \left[ \sum_{i \in A} \left[ \sum_{j \in A_i} \|x_j - y_i\|^r \right] \right. \\ &\quad + 2 \sum_{j \in A_{(1)}} \|x_j - y_{i(1)}\|^r \cdot \sum_{j \in A_{(2)}} \|x_j - y_{i(2)}\|^r \\ &\quad \dots \\ &\quad \left. + 2 \sum_{j \in A_{(k-1)}} \|x_j - y_{i(k-1)}\|^r \cdot \sum_{j \in A_{(k)}} \|x_j - y_{i(k)}\|^r \right] dF^M \end{aligned} \tag{B4}$$

를 얻는다. 이 식의 오른쪽에서 첫번째 항은

$$\begin{aligned} &\frac{1}{M^2} \sum_{i \in A} \int \dots \int \left[ \sum_{j \in A_i} \|x_j - y_i\|^r \right]^2 dF^M \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i \in A} \delta_{2r}(y_i, S_i, F) + \frac{M-1}{M} \sum_{i \in A} \delta_r^2(y_i, S_i, F) \end{aligned} \tag{B5}$$

이 된다. (보다 구체적인 내용은 [9]를 참조 바람.) 인덱스 집합  $A_i$ 들은 서로 교집합 원소가 없으므로 (mutually disjoint), 나머지 항들도 정리 1의 증명에 서와 같은 방법으로 유도가 된다. 그러므로  $i_1, i_2$  ( $i_1 \neq i_2$ ),  $i_1, i_2 \in A$ 에 대해

$$\begin{aligned} &\frac{1}{M^2} \int \dots \int \sum_{j \in A_{i_1}} \|x_j - y_{i_1}\|^r \cdot \sum_{j \in A_{i_2}} \|x_j - y_{i_2}\|^r dF^M \\ &= \frac{1}{M^2} \left[ \sum_{\nu=1}^M P_{i(1)}^{m_{i(1)}^{(\nu)}} \dots P_{i(k)}^{m_{i(k)}^{(\nu)}} P_{i_1}^{-1} m_{i_1}^{(\nu)} \delta_r(y_{i_1}, S_{i_1}, F) \right] \\ &\quad \cdot \left[ \sum_{\nu=1}^M P_{i(1)}^{m_{i(1)}^{(\nu)}} \dots P_{i(k)}^{m_{i(k)}^{(\nu)}} P_{i_2}^{-1} m_{i_2}^{(\nu)} \delta_r(y_{i_2}, S_{i_2}, F) \right] \\ &= \delta_r(y_{i_1}, S_{i_1}, F) \delta_r(y_{i_2}, S_{i_2}, F) \end{aligned} \tag{B6}$$

이 얻어진다. 그러므로

$$\text{Var } D(C, S, F_M) = \frac{1}{M} \sum_{i \in A} \delta_{2r}(y_i, S_i, F) - \frac{1}{M} \sum_{i \in A} |\delta_r(y_i, S_i, F)|^2 \tag{B7}$$

이 성립된다.

참 고 문 헌

[1] M. Loève, *Probability Theory*. New Jersey: Van Nostrand Company, 1960, 2nd. ed.  
 [2] E.F. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*. New York: Springer-Verlag, 1961.  
 [3] M.H. DeGroot, *Probability and Statistics*. New York: Addison-Wesley, 1984, 2nd. ed.  
 [4] A. Gersho and R.M. Gray, *Vector Quantization and Signal Compression*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1992.  
 [5] P. Gaenssler and W. Stute, "Empirical processes: A survey of results for independent and identically distributed random variables," *Annals of Probability*, vol. 7, no. 2, pp. 193-243, 1979.  
 [6] Y. Linde, A. Buzo, and R.M. Gray, "An algorithm for vector quantizer design," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-28, pp. 84-95, Jan. 1980.  
 [7] P. Zador, "Asymptotic quantization of continuous signals and the quantization dimension," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-28, no. 2, pp. 139-149, March 1982.  
 [8] J.A. Bucklew and G.L. Wise, "Multidimensional asymptotic quantization theory with  $r$ th power distortion measures," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-28, no. 2, pp. 239-247, March 1982.  
 [9] D.S. Kim, "Performance of vector quantizers and its relation to training-set size," Ph.D. dissertation, Dep. of Control and Instrumentation, Seoul National Univ. Seoul, Korea, Feb. 1994.  
 [10] 김동식, "벡터 양자화에서 시간 평균 왜곡치의 수렴 특성: II. 훈련된 부호책의 검사 기법," 대한 전자 공학회 논문지-B, vol. 32, no. 5, pp. 87-95, 1995년 5월.



- [11] D.S. Kim, T.Kim, and S.U. Lee, "On testing trained vector quantizer code-books," accepted as a regular paper in *IEEE Trans. Image Processing*, 1996.

---

저 자 소 개

金 東 植(正會員) 第 32卷 B編 第 5號 參照