기술해설

# 매개변수 접근법에 의한 강인 제어 이론

강 현 일*, 김 영 철**
(*명지대 공대 전기전자공학부 조교수, **충북대 공대 전기전자공학부 부교수)

## 1. 서 론

이 기술 논문의 목적은 플랜트 모델의 불확실성이 매개변수의 섭동으로 표현되는 제어계의 강인 안정도, 강인 제어성능, 강인 제어기 설계에 관한 최근의 연구결과들을 소개하는 것이다.

이 문제는 Horowitz(1963), Siljak(1969), Ackermann(1980)등에 의해 주목을 받아 오다가, Barmish(1983)와 Bialas(1983)가 소개한 Kharitonov(1978a)정리에 의해 획기적인 전기를 맞게 되었다. 그로부터 최근 10년간의 연구결과들은 가장 폭 넓게 활용되고 있는 고전적인 제어이론, 예를 들어 Routh-Hurwitz 판별, 근 궤적법, 나이퀴스트 안정도, Bode선도 등을 강인성 문제에까지 쉽게 확장할 수 있도록 하였다.

자세한 내용은 Barmish(1995)나 Bhattacharyya등(1995)의 책과 Barmish 와 Kang(1993)을 권하며, 다항식에 관한 중요한 배경 문헌은 Marden(1966)의 책을 들 수 있다.

기술에 앞서 $q=(q_1, q_2, \cdots, q_l)\in\mathbb{R}^l$을 플랜트의 불확실한 실수 매개변수 벡터로 정의하자. 실제적인 예를 들면, Ackermann (1985)의 버스 문제에서 $q_1$는 버스 타이어와 도로 표면 사이의 마찰계수를 나타낸다. 이 계수가 불확실한 이유는 갠 날과 비오는 날의 마찰계수가 다르기 때문이다.

여러 개의 불확실한 매개변수를 갖는 제어계의 강인성 해석 문제에서 가장 필요로 하는 것 중 하나는 성능 명세의 만족을 위한 테스트를 개발하는 것이다. 가장 쉬운 방법은 각 $q_i$의 허용 범위내에서 그리딩(gridding)을 하여 고전적 해석 방법을 반복해서 적용하는 것이지만, 이 방법은 매개변수의 개수가 증가할수록 수행하기 어려울 정도로 계산 량이 증가하게 된다.

그리딩을 피하기 위한 방법으로 Kharitonov류의 극단점 결과(extreme point results)들을 이용하게 된다. 극단점 결과란 극단의 시스템들의 부분집합에 대한 특성의 만족이 전체 제어시스템이 특성을 자동적으로 만족하게 되는 결과를 말한다.

예를 들면 불확실한 매개변수의 한계 집합이 $l$차원 상자 Q이고, 모든 $q\in Q$에 대하여 감쇄비가 $\zeta\geq0.707$로 되도록 시스템을 구성하고자 할 때, 다음의 물음은 흥미롭다. 만약 Q의 꼭지점과 관련된 $2^l$개의 매개변수 조합에 대하여 감쇄비 명세가 만족된다면 모든 $q\in Q$에 대하여 명세가 만족될 수 있을까 하는 물음이다. 만약 만족된다고 하면 극단점 결과가 성립된다고 말한다.

대개 극단점 결과는 구조적 실수 불확실성을 가진 피드백 제어시스템에 적용되며 거의 모든 극단점 결과는 독립적인 불확실성(independent uncertainty) 구조나 유사 선형 불확실성(affine linear uncertainty) 구조에 적용된다. 특별한 경우에 다선형 불확실성(multilinear uncertainty) 구조에도 극단점 결과가 성립될 수 있다.

## 2. 용어의 정의

### 2.1 불확실성 구조(uncertainty structure)

이 절에서는 본고를 기술하는데 사용되는 주요 용어를 정의하고자 한다.

불확실한 SISO플랜트의 표시로 G(s)대신에 G(s, q)로 표기한다. 플랜트 모델의 계수가 불확실한 매개변수 벡터 q에 의존한다는 것을 나타내기 위함이다. 즉,

$$G(s,q)=\frac{N(s,q)}{D(s,q)} \tag{2. 1}$$

로 표현되며 N(s, q)과 D(s, q)는 불확실한 다항식이 된다. 즉 두다항식은 불확실한 매개변수 벡터 q의 함수가 되는 계수를 갖게 된다. 불확실한 다항식은

$$P(s,q)=\sum_{i=0}^{n}a_i(q)\,s^i \tag{2. 2}$$

로 기술되며, 만약 $a_i(q)$가 유사 선형 함수이면 다항식은 **유사 선형 불확실성 구조**를 갖는다고 정의한다.

예를들어 $a_i(q)=4q_1+6q_2-5$이면 $a_i(q)$는 유사 선형 함수이다.

분모와 분자의 다항식이 유사 선형 불확실성 구조로 표현되면 불확실한 플랜트 G(s, q)는 유사 선형 불확실성 구조를 가지고 있다고 정의한다.

유사 선형 불확실한 구조의 특별한 경우로, 다항식의 각 계수가 1차 독립일 때 플랜트는

$$G(s, q, r) = \frac{N(s, q)}{D(s, r)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} q_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} r_i s^i} \quad (2.\ 3)$$

로 표시되며 이 경우 플랜트 G(s, q, r)는 **독립적인 불확실성 구조**를 갖는다고 말한다.

다시말해 분모의 어떤 매개변수도 분자에 나타나지 않고 분자에 어떤 매개변수도 분모에 나타나지 않는다.

불확실한 다항식 $\sum_{i=0}^{n} a_i(q) s^i$이 다선형 불확실성 구조를 가질 경우는 $a_1(q)$가 다선형 유사 함수로 표현된다. 다선형 유사 함수의 보기는 $a_1(q) = 5q_1q_2q_3 + 2q_2 - 6q_3$이다.

### 2.2 한계 상자와 극단점

불확실한 매개변수 벡터 q와 r은 다면체 상자 Q와 R안에 각각 존재한다. 이 상자 표현은 불확실한 매개변수 벡터의 각각의 요소가 주어진 한계 안에 있을 때 가능하다. 다시 말해서,

$q_i^- \le q_i \le q_i^+$ $i=1, 2, \cdots, l_1$, $r_i^- \le r_j \le r_j^+$ $j=1, 2, \cdots, l_2$

을 가정한다.

Q와 R의 i번째 극단점을 $q^i$와 $r^i$로 표기하기로 한다. 각 극단점은 유일한 다항식이나 플랜트를 표시하는데 이용한다. $P(s, q^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i(q^i) s^i$은 Q의 한 극단점 $q^i$에 대응하는 다항식이 된다. 마찬가지로 만약 $(q^{i1}, r^{i2})$가 Q×R상자의 극단점 짝이라면 $G(s, q^{i1}, r^{i2})$는 대응되는 극단의 플랜트를 표시한다.

만약 $Q \subseteq \mathbb{R}^{l_1}$이고 $R \subseteq \mathbb{R}^{l_2}$이면 기껏해야 $2^{l_1+l_2}$개의 극단의 플랜트들이 존재한다.

### 2.3 구간 다항식 군(a family of interval polynomials)과 다항식의 폴리토프(polytopes)

만약 P(s, q)가 독립적인 불확실성 구조를 갖는 다항식이라면 집합 $\mathbb{P}$:={P( · , q) : q∈Q}를 구간 다항식 군(family)이라고 말한다. 구간 다항식군은 다음과 같이 표시하기도 한다.

$$P(s, q) = \sum_{i=0}^{n} [\ q_i^-,\ q_i^+ ] s^i \quad (2.\ 4)$$

독립적인 불확실성 구조를 가진 플랜트 G(s, q, r)의 집합 $\mathbb{G}$ ={G( ·, q, r): q∈Q: r∈R}을 구간 플랜트 군(family)이라고 말한다. 만약 불확실한 다항식 P(s, q)가 유사 선형 불확실한 구조를 가지고 있으면 관련된 계수 집합 $a(Q)$:=[$(a_0(q)$, $a_1(q)$, ⋯, $a_n(q))$:$q \in Q$]을 $\mathbb{R}^{n+1}$ 에서 폴리토프(polytope)라고 한다. 폴리토프 a(Q)는 모든 극단점 $a(q^i)$의 볼록 헐(convex hull)로 나타나며 a(Q)=conv {$a(q^i)$}로 표시한다. 따라서 $\mathbb{R}^{n+1}$에서의 폴리토프와 유사 선형 불확실성 구조를 가진 다항식들과의 관계를 다음과 같이 표현된다.

즉 $\mathbb{P}$가 q∈Q에 속하는 모든 다항식일때 $\mathbb{P}$=conv {P(s, $q^i$)}로 표현되며 $\mathbb{P}$를 다항식의 폴리토프이라 한다. 따라서 다항식의 폴리토프는 유사 선형 불확실성 구조를 가진다.

### 2.4 진분수와 불변 차수

강인성 해석 문제를 취급할 때 불확실한 다항식 $P(s, q) = \sum_{i=0}^{n} a_i(q) s^i$의 차수가 감소하는 경우 즉, $q^* \in$Q에서 $a_n(q^*)$ =0이면 차수가 변한다고 한다.

어떤 q∈Q에 대하여도 P(s, q)의 차수가 일정하면 불변 차수라 하고 이 가정은 특수한 경우를 제외하고는 성립한다. 차수 감소에 관한 보다 상세한 것은 Sidens와 Barmish(1989)의 논문을 참조한다.

필요한 경우 플랜트 분모는 모닉(monic)다항식이고, 플랜트 분모의 차수가 분자의 차수보다 항상 1이상 크다고 가정한다. 이 경우 플랜트는 진분수의 성질을 가지고 있다고 말한다. 이런 가정이 필요한 이유는 분모의 차수가 분자의 차수보다 크거나 같은 보상기와 궤환시스템을 구성할 경우 폐루프다항식의 불변 차수 성질이 보존된다는 사실에서 기인한다.

## 3. 다항식 관점에서 본 피드백 전달특성

D(s, q)와 N(s, q)가 유사 선형 불확실한 구조라 하고 그림 1과 같이 보상기C(s)를 갖는 피드백 시스템을 고려한다.

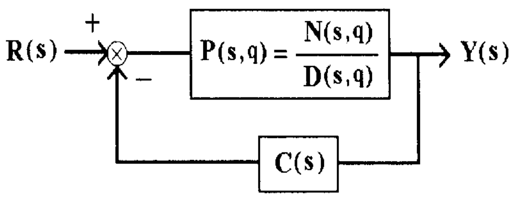


**그림 1. 구조적 불확실성을 갖는 피드백 시스템**

여기서 보상기를 $C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$라 하면 폐루프전달함수는

$$T_{CL}(s, q) = \frac{N(s, q) D_C(s)}{N(s, q) N_C(S) + D(s, q) D_C(s)} = \frac{N_{CL}(s, q)}{D_{CL}(s, q)} \quad (3.\ 1)$$

로 표시되며 $N_{CL}(s, q)$와 $D_{CL}(s, q)$는 유사 선형 불확실한 구조를 보존하게 된다.

또한 폐루프 감도 함수는

$$S(s, q) = \frac{1}{1 + G(s, q) C(s)} = \frac{D(s, q) D_c(s)}{N(s, q) N_c(s) + D(s, q) D_c(s)} \quad (3.\ 2)$$

로 역시 유사 선형 불확실성 구조를 가지며, 역감도함수도 또한 유사 선형 불확실성 구조를 갖는다.

## 4. Kharitonov 정리와 강인 안정도

고정된 다항식 P(s)의 모든 근이 복소평면의 좌반평면에 존재하면 P(s)는 안정하다고 한다. 다항식 군 $\mathbb{P} = \{ P(\cdot, q) : q \in Q \}$가 안정하면 $\mathbb{P}$는 강인 안정하다고 한다. 첫째로 언급할 Kharitonov정리는 구간 다항식군의 안정도에 관한 정리이다. 식 (2. 4)로 표현된 구간 다항식군의 극단점 중 다음의 4개의 특별한 다항식을 얻어낸다.

$$K_1(s) = q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^+ s^5 + \ldots\ldots$$
$$K_2(s) = q_0^- + q_1^- s + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + q_5^- s^5 + \ldots\ldots$$
$$K_3(s) = q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + q_5^+ s^5 + \ldots\ldots$$
$$K_4(s) = q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^- s^5 + \ldots\ldots \qquad (3.\ 3)$$

식 (3. 3)을 Kharitonov다항식이라고 한다.

**정리4.1**(Kharitonov (1978a)) : $\mathbb{P}$가 불변 차수를 갖는 구간 다항식군이라고 한다. 그러면 $\mathbb{P}$의 강인안정이기위한 필요충분조건은 4개의 Kharitonov다항식이 안정한 것이다. ▼▼▼

정리의 증명은 여러 문헌에 있으며 Minnichelli등(1989)의 것이 보다 쉽다. Dasqupta(1988)는 증명에 필요한 기하학적 개념을 제공하였다.

### 4.1 Kharitonov 다항식의 기하학적 의미

Kharitonov해의 극단점 특성은 Dasqupta(1988)의 기하학적 설명에 의해 보다 쉽게 이해된다. 즉 주파수를 고정시키고($s = j\omega_0$) $q^* \in Q$에 대하여 $P(s, q^*)$이 안정하다고 가정하자. 구간 다항식군 $\mathbb{P}$에 관하여 4개의 Kharitonov다항식 $K_1(s)$, $K_2(s)$, $K_3(s)$와 $K_4(s)$를 구성하고 $P(j\omega_0, Q)$를 만들면 네개의 꼭지점이 바로 $K_i(j\omega_0)$가 된다. 그림 2에 나타난 직사각형은 value집합이라 부르며 이것은 $P(j\omega_0, q)$의 값의 q가 Q안에서 움직일 때의 가능한 값과 일치한다.

즉, $P(j\omega_0, Q) = \{ P(j\omega_0, q) : q \in Q \}$이 된다.

q에 대한 P(s,q)의 가정에서 $\mathbb{P}$의 강인 안정도는 모든 $\omega_0 \geq 0$에 대하여 $0 \notin P(j\omega_0, Q)$인 원점배타조건(zero exclusion condition)과 같다는 것을 얻는다.

### 4.2 다각형 value 집합

만약 $\mathbb{P} = \{ P(\cdot, q) : q \in Q \}$가 다항식의 폴리토프이면 주파수 $\omega_0$에서 $P(j\omega_0, Q)$는 복소수평면에서 다각형이고 꼭지점은 $\{P(\omega_0, q^i)$의 부분집합이 된다. 이 개념은 Zadeh와 Desoer(1963)에 의해 주어졌으며, 다시 Saeki(1986)와 de Gaston과 Safonov(1988)에 의해 부각되었다.

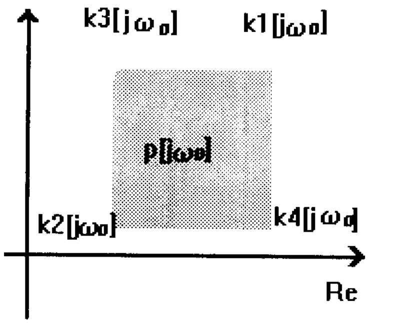


그림2. 임의 주파수 $\omega_0 \geq 0$ 에 대한 Kharitonov 직사각형

### 4.3 Kharitonov 정리의 확장

실수와 허수에서 구간 한계를 갖는 복소수 구간 다항식의 안정에 관한 필요충분조건은 8개의 특정 극단점의 다항식이 안정하다는 조건이다(Kharitonov(1978b)). 이제 낮은 차수의 다항식에 관한 Kharitonov정리를 강화하는 결과를 기술하고자 한다. 불변 차수이고 차수가 5이하인 구간 다항식에 관한 결과는 Anderson등(1987)에 의해 구해졌다. 만약 n=3이면, 구간다항식이 안정할 필요충분조건은 Kharitonov 다항식 $K_1(s)$와 $K_4(s)$가 요구되고 만약 n=5이면 Kharitonov다항식 $K_1(s)$, $K_3(s)$ 와$K_4(s)$ 가 요구된다.

Kharitonov정리의 제어계적용은 Ghosh(1985)에 의해 주어졌다. 그림 1의 보상기가 C(s)=k이면 폐루프전달함수의 분모 $D_{cl}(s,q)=kN(s,q)+D(s,q)$는 여전히 독립적인 불확실한 구조를 갖게 된다. 폐루프 안정을 위해서는 $k \geq 0$ 인 경우에 4개의 다항식의 안정도 판별과 $k < 0$ 일 때 4개의 다항식의 안정도 판별이 필요하므로 8개의 다항식의 안정도 판별만 요구된다.

소위 우수 기수비결합 조건을 만족하는 다선형 불확실한 구조에 적용되는 이론을 생각해 보자. P(s,q)의 우수차수 계수 $a_{2i}(q)$에 있는 불확실한 매개변수 $q_k$ 가 어떤 기수차수 계수에 들어가지 않고 반대로 P(s,q)의 기수차수 계수 $a_{2i+1}(q)$에 있는 $q_k$가 어떤 우수차수 계수에도 안들어갈때를 가정하자. 이 경우 Kharitonov(1979)는 다항식군 $\mathbb{P}$가 강인안정할 필요충분조건은 모든 극단의 다항식 $P(s, q^i)$가 안정하면 된다는 것이다. 이 이론의 증명은 value집합 $P(j\omega, Q)$가 이 경우에 직사각형이라는 사실에 기인한다.

## 5. 강인 Schur안정문제와 다른 모양의 근영역의 설정

다항식군 $\mathbb{P} = \{ P(\cdot\ , q) : q \in Q \}$이 주어지고 바람직한 근의 위치 영역 $D \leq C$가 있을 때 $\mathbb{P}$가 강인 $D$-안정이라 함은 모든 다항식군의 근이 $D$에 존재할 때를 의미한다. 특히 $D$가 개(open)단위원일때 강인 Schur안정이라는 용어를 사용

한다. 우선 $D$영역과 극단점 결과에 관한 Rantzer의 결과를 기술한다.

**정리 5.1**(Rantzer(1992b)) : 만약 $D$와 $1/D$ = { z : zd =1 for some d∈ $D$}가 블록(convex)이면 극단점 결과가 만족된다. 즉 다항식군 ℙ가 강인 $D$-안정할 필요충분조건은 모든 극단 다항식 P(s, $q^i$)이 $D$-안정한 것이다. ▼▼▼

만약 $D$를 개 단위원으로 택하면 $1/D$가 볼록하지 않다. 따라서 강인 Schur안정에 관한 정리는 다음과 같다.

**정리 5.2** (Perez, Abdallah 와 Docampo(1992)) : 이산시간 구간 다항식

$$P(z,q)=\sum_{i=0}^{n}[\ q_i^-,\ q_i^+]z^i \tag{5. 1}$$

이 주어지고 $i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor+2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor+3, \ldots n$에 대하여 $q_i^-\ =\ q_i^+$ 이라한다. 여기서 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 은 $\frac{n}{2}$과 같거나 $\frac{n}{2}$보다 크지만 $\frac{n}{2}$에 가장 가까운 정수를 표시한다. 그러면 P(z,q)가 강인 Schur안정할 필요충분조건은 모든 극단점 다항식 P(z, $q^i$)가 Schur안정한 것이다. ▼▼▼

최고 차수항의 계수가 1이고 차수가 3차이하인 이산시간 구간 다항식의 경우 강인 Schur안정 조건은 모든 극단점 다항식이 Schur안정하면 된다(Cieslik(1987)과Kraus등(1988)).

### 5.1 감쇄 원추형 안정영역

n차의 구간 다항식 ℙ와 감쇄원추형 안정영역이 그림 3과 같이 주어지면 다음과 같은 극단점 결과를 얻는다,

**정리5.3** (Foo 와 Soh(1989)) : 감쇄원추형 영역 $D$와 불변차수인 구간 다항식군ℙ가 주어져있다고 하자. ℙ의 강인 $D$-안정할 필요충분조건은 극단의 2(n+1) 다항식이 $D$-안정한 것이다. ▼▼▼

만약 n=5이고 $\varphi=2\pi/3$일 때 <정리 5.3>은 12개의 극단의

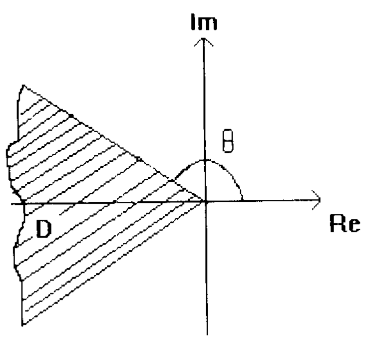


그림3. 감쇄 원추형 안정영역 D

다항식이 필요하다. 그러나 다음 정리에 의하면 6개의 극단의 다항식만이 요구된다.

**정리 5.4**(Soh와 Foo(1990), Rantzer(1990)) : n차 구간 다항식군 ℙ가 불변 차수의 성질을 가지고 있고 원추형 영역 $D$의 각도 $\varphi= n_1\pi/n_2 \geq \pi/2$로 표시된다고 하자. 여기서 $n_1$과 $n_2$는 서로소인 경우이다. 그러면 ℙ의 강인$D$-안정일 필요충분조건은 $2n_2$개의 다항식이 $D$-안정한 것이다. ▼▼▼

## 6. 모서리(Edge) 정리

많은 수의 극단점 결과가 그 증명이 Bartlett등의 모서리정리(1988)를 이용하고 있음을 알 수 있다. 유사 선형 불확실성 구조의 강인$D$-안정도에 관하여 Q상자의 모서리들과 관련된 다항식의 $D$-안정도만 검사하면 된다는 것이다. 다항식 폴리토프 ℙ = {P( · , q) : q∈Q}가 주어질 때 ℙ = conv(P(s,$q^i$)) 로 표현될 수 있으며 여기서 $q^i$ 는 Q의 극단점이 된다. 유사 선형 불확실한 구조에서 ℙ의 외 모서리(exposed edges)다항식은 Q의 외모서리에 대응하여 얻어진다. 그러나 Q의 외모서리는 반드시 ℙ의 외 모서리가 되지 않는다.

이제 모서리정리를 기술한다.

**정리 6.1 모서리정리(Edge theorem) (Bartlett, Hollot과 Huang(1988))** : ℙ가 다항식 폴리토프이며 불변 차수라 가정하자. 개영역 $D$가 단순연결이라하면 ℙ의 강인 $D$-안정할 필요충분할 조건은 ℙ의 모든 외모서리들이 $D$-안정하다는 것이다. ▼▼▼

모서리정리를 적용할 때 ℙ의 외 모서리 대신에 Q의 외모서리를 이용할 수 있다. 모서리를 이용하여 다항식 폴리토프의 강인 $D$-안정문제가 일차원의 모서리문제들로 바뀐다.

## 7. 구간 플랜트군의 강인 안정화

이 절과 다음절의 설명을 위해 구간 플랜트 G와 구간 플랜트군 𝔾를 정의한다.

$$G(s,q,r)=\frac{\sum_{i=0}^{m}[q_i^-,q_i^+]s^i}{\sum_{i=0}^{n-1}[r_i^-,r_i^+]s_i+r_n s^n}=\frac{N(s,q)}{D(s,r)} \tag{7. 1}$$

𝔾:= {G(s,q,r) | G(s,q,r) = N(s,q)/D(s,r), q∈Q, r∈R} (7. 2)

안정영역을 s-평면의 좌개반평면으로 가정한다.

이제 1차 보상기 $C(s)=K\frac{s-z}{s-p}$가 그림 1과 같이 연결되어 있을 때, 만약 임의의 q∈Q와 r∈R에 대하여 특성다항식 $P_{cl}$(s,q,r) = K(s-z)N(s,q) + (s-p)D(s,r)이 강인안정이면 C(s)는 구간 플랜트군 𝔾를 강인안정화시킨다고 말한다.

**정리7.1 (Barmish등 (1992))** : 진분수 구간 플랜트군 𝔾와 1차보상기 C(s)를 갖는 그림 1의 피드백시스템에서 C(s)가 𝔾를 강인안정화할 필요충분조건은 16개의 Kharitonov 플랜트를 안정화시키면 된다. 여기서 Kharitonov플랜트란 분자 와

분모를 각각 Kharitonov다항식으로 결합하여 구성한 플랜트이다. ▼▼▼

구간 플랜트와 일반적인 고차 종속보상기로 구성된 피드백 시스템의 Hurwitz 강인안정화 조건은 Chapellat와 Bhattacharyya(1989)의 결과가 매우 유용하다. 이를 기술하기 위해 먼저 다음을 정의한다.

$K_D(s)$와 $K_N(s)$를 각각 D(s)와 N(s)의 4개의 lKharitonov다항식 조합이라 놓고, $S_D(s)$와 $S_N(s)$를 각각 D(s)와 N(s)의 4개의 Kharitonov선분조합이라 하자.

$$S_D(s) := \{ \lambda K_D^i(s) + (1-\lambda)K_D^j(s) \mid \lambda \in [0,1],\ (i,j) \in \{(1,3),(1,4),(4,2),(3,2)\}\} \quad (7.3)$$

$$S_N(s) := \{ \mu K_N^i(s) + (1-\mu)K_N^j(s) \mid \mu \in [0,1],\ (i,j) \in \{(1,3),(1,4),(4,2),(3,2)\}\} \quad (7.4)$$

다시 말해 Kharitonov 선분은 그림 2의 Kharitonov직사각형에서 4개의 꼭지점을 잇는 선분을 나타낸다. Chapellat등(1989)은 다음과 같이 32개의 일반화된 Kharitonov 플랜트군을 정의하였다.

$$\mathbf{G}_{GK}(s) := \{G(s)=N(s)/D(s) \mid (N(s)\in K_N)\times(D(s)\in S_D),\ \text{or}\ (N(s)\in S_N)\times(D(s)\in K_D)\} \quad (7.5)$$

**정리 7.2 일반화 Kharitonov정리 (Chapellat, Bhattacharyya(1989))** : 그림 1의 피드백 시스템에서 C(s)가 $G(s)\in\mathbf{G}$를 안정화시키기 이한 필요충분조건은 C(s)가 $G(s)\in\mathbf{G}_{GK}$를 안정화시키는 것이다. ▼▼▼

활용예는 최근 출간된 Bhattacharyya등 (1995)을 참조한다.

한편 Rantzer는 다른방식으로 이 문제에 접근하였는데 이를 위해 볼록방향을 정의하기로 한다.

**정의 (볼록 방향(Convex Direction))(Rantzer(1991))** : 만약 n차 다항식 f(s)가 안정하며 f(s) + g(s)가 역시 안정하고, $\lambda\in[0,1]$에서 $\deg(f(s)+\lambda g(s)) = n$ 일 때, 임의의 $\lambda\in[0,1]$에서 $f(s)+\lambda g(s)$가 안정하면 이때 g(s)를 볼록방향 이라고 한다. ▼▼▼

이제 위상 성장조건을 기술하고자 한다.

**정리 7.3 위상성장조건 (Phase growth Condition) [Rantzer (1992 a)]** : 다항식 g(s)가 안정한 n차 다항식공간에서 볼록방향이기 위한 필요충분조건은 $g(j\omega)\neq 0$인 모든 $\omega>0$에 대하여 다음 부등식이 만족하는 것이다

$$\frac{d\Phi_g(\omega)}{d\omega} \le \left|\frac{\sin(2\Phi_g(\omega))}{2\omega}\right| \quad (7.7)$$

여기서 $\Phi_g(w) := \tan^{-1}\frac{Im\,g(j\omega)}{Re\,g(j\omega)}$ 이다. ▼▼▼

만약 $C(S) = N_C(S)/D_C(S)$에서 $N_C(S)$와 $D_C(S)$가 임의의 차수라 하고 두 다항식의 Rantzer의 위상 성장 조건을 만족한다고 하자. 이 때 16개의 Kharitonov 플랜트가 $C(S)$에 의해 안정화된다면 이것은 구간 플랜트군 $\mathbf{G}$가 보상기 $C(S)$에 의해 강인 안정화됨을 의미한다.

볼록 방향에 속하는 다항식의 집합을 만들 때 이 위상 성장 조건은 모든 주파수에 대하여 조건을 만족시키는 다항식을 구해야 하므로 좀 번거롭다. 이것을 개선하기 위해 계수를 이용한 조건을 Barmish와 Kang(1992)이 구했으며 그것에 해당되는 한 다항식 집합은,

$$g(s) = (s-\sigma_1)(s-\sigma_2)(s-\sigma_3)\cdots \quad (7.8)$$

$\sigma_i < 0,\ i = odd$

$\sigma_i > 0,\ i = even$이며,

여기서 $|\sigma_1| < \sigma_2 < |\sigma_3| < \sigma_4 < \cdots$의 조건이 필요하다.

## 8. 구간 행렬의 강인 안정

행렬의 각 원소에 들어가는 불확실한 매개변수가 서로 다를 때 이 행렬을 구간 행렬이라고 한다. 예를 들면, 2×2 구간 행렬은

$$A(q) = \begin{bmatrix} [q_{11}^-, q_{11}^+] & [q_{12}^-, q_{12}^+] \\ [q_{21}^-, q_{21}^+] & [q_{22}^-, q_{22}^+] \end{bmatrix}$$

로 쓸 수 있다. 구간 행렬군 $\mathbf{A}$에 대하여 $A_i$를 $i$번째 극단의 행렬이라고 하면, 2×2 행렬인 경우 구간 행렬의 강인 안정 조건은 극단 행렬의 안정 조건과 같다 (Mansour (1989)). 그러나 3×3 행렬인 경우, 모든 대각선 원소가 고정된다면 극단점 결과를 얻을 수 있다(Zong (1990)). 일반적인 행렬에 대한 결과는 다음과 같다. $\mathbf{A}$가 $n\times n$행렬 ($n\geq 3$)의 폴리토프 일 때 $2n-4$차원의 모든 면의 안정이 $n\times n$행렬의 강인 안정의 조건이라는 것이다 (Cobb과 DeMarco (1989)). 만약 $n\times n$구간 행렬군의 비대각 원소가 비음수일 때, 모든 $k=1,\cdots,n$에 대하여

$$(-1)^k \det(I_k - A_k(q^i)) > 0 \quad (8.1)$$

이 성립되면 ($A_k(q^i)$는 $k\times k$의 모든 극단의 행렬 집합을 의미한다고 하자) $\mathbf{A}$의 강인 안정이 보장된다(Gantmacher (1959)).

## 9. 강인 성능 문제

강인 D-안정 외에 강인 성능 문제에 관한 첫째 결과는 구조적인 실수 불확실성에 관한 $H^\infty$해석이다. 만약 유리 함수 $G(S)$가 진분수이고 분모가 안정이면 $H^\infty$놈은

$$\|G\|_\infty = \sup_\omega |G(j\omega)| \quad (9.1)$$

로 정의된다.

**정리 9.1 (Mori와 Barnett (1988))** : 안정하고 진분수인 구간 플랜트군 $\mathbf{G} = \{G(s, q, r) : q \in Q, r \in R\}$에 대해 다음 성질을 갖는다.

$$\max_{q \in Q, r \in R} \|G(s, q, r)\|_\infty = \max_{i,j} \|G_{ij}(s)\|_\infty \qquad (9.2)$$

여기서 $G_{ij}(S)$는 16개의 Kharitonov 플랜트들이다. ▼▼▼

이 결과의 일반화된 정리는 다음과 같다.

**정리 9.2 (Hollot (1995))** : 1차 함수 $W(S)$에 대해 다음이 성립한다.

$$\max_{q \in Q, r \in R} \|W(s)G(s, q, r)\|^\infty = \max_{q \in Q, r \in R} \|W(s)G_{ij}(s)(s, q, r)\|\infty \qquad (9.3)$$

▼▼▼

### 9.1 양실함수 (Positive real function).

구간 플랜트 $G(s, q) = N(s, q)/D(s, q)$에 대해 $N(s, q)$와 $D(s, q)$가 안정하고 모든 $q \in Q$와 모든 $\omega \in \mathbb{R}$에서 Re $G(j\omega, q) > 0$이 성립되면 $G(s, q)$는 강인 엄격한 양실(robustly and strictly positive real : RSPR)이라고 한다.

**정리 9.3 (Hollot외 (1993))** : 양의 실수 $k$와 1차 함수 $W(s)$에 대해

$$(k + G_{ij}(s))W(s) \in \{\text{SPR}\} \qquad (9.4)$$

이면

$$(k + G(s, q, r))W(s) \in \{\text{RSPR}\} \qquad (9.5)$$

이 된다. 여기서 SPR은 엄격한 양실임을 의미하며 RSPR은 강인 엄격한 양실임을 의미한다. ▼▼▼

### 9.2 정상 상태와 오버슈트

Bartlett(1990)는 다선형 불확실성 구조를 갖는 플랜트 $G(s, q)$에 대해 단위 step 입력에 대한 정상 상태 오차의 최대치와 최소치가 극단의 플랜트 $G(s, q^i)$에서 나온다는 것을 보였다. 그러나 오버슈트의 경우 극단이 아닌 플랜트에서 발생할 수 있다는 사실을 밝혔다. 김영철 등(1993)은 오차 자승 적분 평가 함수의 최대 값이 특정 극단의 시스템에서 발견된다는 것을 구하였다.

### 9.3 나이퀴스트 외곽선 (Nyquist envelope)

구간 플랜트의 주파수 응답과 관련하여 나이퀴스트 집합은

$$\text{N} := \{G(j\omega, q, r) : \omega \in \mathbb{R}, q \in Q, r \in R\} \qquad (9.6)$$

로 정의되며 Hollot과 Tempo(1991)는 나이퀴스트 집합의 경계선을 나이퀴스트 외곽선(Nyquist envelope)으로 정의하였다. 구간 플랜트의 $H^\infty$점은

$$\|G(s, q, r)\|_\infty = \max_{q, r, \omega} |G(j\omega, q, r)| \qquad (9.7)$$

이 되며, $H^\infty$점은 Kharitonov 플랜트에서 나온다. 최소 이득 여유와 최소 위상 여유도 Kharitonov 플랜트에서 나온다는 사실도 알려져 있다(Hollot과 Tempo (1991)).

## 10. 구간 플랜트의 제어기 설계

매개 변수적 불확실성에 영향을 받는 시스템에 대한 제어기 설계 이론은 아직 성숙 단계가 아니다. 제어기 계수에 관한 강인 설계 문제의 정규화에 대한 예비 결과는 Vicino와 Tesi(1991)에 의해 주어진다.

Youla 외 2인(1974)에 의해 정의된 패리티 교차 특성은 강인 안정화 문제와 관련이 있다. 구간 플랜트의 각 플랜트를 안정화시키는 제어기의 설계 문제가 아직 완성된 깨끗한 해법이 없다. 강인 패리티 교차 특성은 그러한 안정한 제어기의 존재를 위한 필요한 첫째 단계이며 Wang(1995)에 의해 주어진다. 그에 따르면 진분수 형태의 구간 플랜트의 강인 안정화 조건은 모든 플랜트가 불안정한 극-영점의 상태가 없고 두 개의 특정 극단의 플랜트를 안정화시키는 것이다.

구간 플랜트를 보상기를 이용하여 강인 안정화시키는 보상기 설계 방법이 Wei와 Barmish(1989)에 의해 주어졌으나 그 가정이 매우 엄격한 면이 있다.

## 11. 맺음말

이 기술 논문에서는 매개변수의 섭동으로 표현되는 불확실한 제어시스템의 강인 안정과 성능, 제어기 합성의 문제에 대한 최근의 결과를 소개하였다.

매개변수로 표현되는 대표적 시스템인 구간 플랜트와 관련된 문제를 중심으로 기술하였으며 또한 계산상의 어려움을 극복하기 위해 나타난 극단점의 결과를 주로 기술하였다. 물론 이런 극단점 결과는 매우 간단하고 효과적일지 모르지만 실제에 적용 시에는 제한성이 있을 경우가 있다.

**참 고 문 헌**

[1] Ackermann, J. E. (1980). "Parameter space design of robust control systems", *IEEE Trans. Aut. Control*, AC-25, 1058-1072.

[ 2 ] Ackermann, J. E. (1985). "Sampled Data Control Systems, Analysis and Synthesis", *Robust System Design*, SpringerVerlag, Berlin.

[ 3 ] Anderson, B. D. O., E. I. Jury and M. Mansour (1987). "On robust Hurwitz polynomials", *IEEE Trans. on Aut. Control*, AC-32, 909-913.

[ 4 ] Barmish, B. R. (1983). "Invariance of the strict Hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients", *Proc.*.

[ 5 ] Barmish, B. R. & H. I. Kang (1993). "A Survey of Extreme Point Results for Robustness of Control Systems", *Automatica*, vol. 29, no. 1, pp. 13-35.

[ 6 ] Barmish, B. R. (1995). *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan, New York.

[ 7 ] Barmish, B. R. and H. I. Kang(1992). "Extreme point results for robust stability of interval plants : Beyond first order compensators", *Automatica*.

[ 8 ] Barmish, B. R., R. Tempo, C. V. Hollot and H. I. Kang (1990). "An extreme point result for robust stability of a diamond of polynomials", *Proc. of the IEEE Conf. of Decision and Control*, Honolulu, Hawaii.

[ 9 ] Barmish, B. R., C. V. Hollot. F. J. Kraus and R. tempo (1992). "Extreme point results for robust stabilization of interval plants with first order compensators", *IEEE Trans. of Aut Control*, AC-37, 707-714.

[10] Bartlett, A. C. (1990). "Vertex results for the steady state analysis of uncertain systems", *Proc. IEEE Conf. of Decision and Control*, Honolulu, Hawaii.

[11] Bartlett, A. C., C. V. Hollot and L. Huang (1988). "Root locations of an entire polytope of polynomials : it suffices to check the edges", *Mathematics of Control. Signals and Systems*, 1, 61-71.

[12] Bhattacharyya, S,. P., Chapellat, H. & L. H. Keel (1995). *Robust Control : The Parametric Approach*, Prentice Hall.

[13] Bialas. S. (1983). "A necessary and sufficient condition for stability of interval matrices", *Int. J. of control*. 37. 717-722.

[14] Chapellat. H. and S. P. Bhattacharyya (1989). "A generalization of Kharitonov's theorem : robust stability of interval plants", *IEEE Trans. on Aut. Control*, AC-34, 306-311.

[15] Cieslik, J. (1987). "On possibilities of the extension of Kharitonov's stability test for interval polynomials to the discrete-time case", *IEEE Trans. on Aut. Control*. AC-32, 237-238.

[16] Cobb, J. D. and C. L. DeMarco (1989). "The minimal dimension of stable faces to guarantee stability of a matrix polytope", *IEEE Trans. of Aut. Control*. AC-34, 990-992.

[17] Dasqupta, S.(1988). "Kharitonov's theorem revisited", *Systems and Control Letters*, 11, 381-384.

[18] de Gaston, R. R. E. and M. G. Safonov (1988). "Exact calculation of the multi-loop stability margin", *IEEE Trans. on Aut. Control*, AC-33, 156-171.

[19] Foo, Y. K. and Y. C. Soh (1989). "Root clustering of interval polynomials in the left-sector", *Systems and Control Letters*, 13, 239-245.

[20] Gantmacher, F. R. (1959). *The Theory of Matrices*. *Chelsea*. New York.

[21] Ghosh, B. K. (1985). "Some new results on the simultaneous stabilizability of a family single input, single output systems", *Systems and Control Letters*, 6, pp. 39-45.

[22] Hollot, C. V. (1995), "Does Rantzer's convex direction theorem sound the death knell for new vertex results in robust control?", *Robust Control Theory (B. A. Francis & P. P. Khargonekar, Eds.) The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, vol. 66, Springer-Verlag, New York.

[23] Hollot, C. V., L. Guzzella, R. Tempo, F. Kraus and M. Mansour (1993). "New vertex results in establishing the strict positive realness of weighted interval systems", *Proc. of 12th IFAC World Congress*, Sydney

[24] Hollot, C. V. and R. Tempo (1991). "On the nyquist envelope of an interval plant family", *Proc. of the American Control Conf.*, Boston, MA.

[25] Horowitz, I. M. (1963). *Synthesis of Feedback Systems*, Academic Press, New York.

[26] Kharitonov, V. L. (1978a). "Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations", *Differenisial'nye Urauneniya*, 14, 2086-2088.

[27] Kharitonov, V. L. (1978b). "On a generalization of a stability criterion", *Izuestiya Akademii Nauk Kazakhskogo SSR Seriya Fizika Materiay*, 1, pp. 53-57.

[28] Kharitonov, V. L. (1979). "The Routh-Hurwitz problem for families of polynomials and quasipolynomials", *Izuestiia Akademii neuk Kazakhskoi SSR*, Seriya fizikomatemaiicheskia, 26, 69-79.

[29] 김영철 & 허명준 (1993). "Interval플랜트의 최대 평가 함수 해석 : 가설", *'93한국 자동제어 학술회의 논문집*, pp. 168-172, 서울.

[30] Kraus, F. J., B. D. O. Anderson, E. I. Jury and M. Mansour(1988). "On robustness of low order Schur polynomials", *IEEE Trans. on Circuits and Systems*. CAS-35, 570-577.

[31] Kraus, F. J., B. D. O. Anderson and M. Mansour(1988).

"Robust Schur polynomial stability and Kharitonov's theorem", *Int. J. of Control.* 47, pp. 1213-1225.

[32] Mansour, M.(1989). "Simplified sufficient conditions for robust stability of interval matrics", *Int. J. of Control,* 50, 433-444.

[33] Marden, M. (1966). *Geometry of Polynomials. American Mathematical Society,* Providence, RI.

[34] Minnichelli, R. J., J. J. Anagnost and C. A. Desoer(1989). "An elementary Proof of Kharitonov's theorem with extensions", *IEEE Trans. on Aut. Control.* AC-34, 995-998.

[35] Mori, T. and s. Barnett (1988). "On stability tests for some classes of dynamical systems with perturbed coefficients", *IMA J. of Mathematical Contrl and Information.* 5, 117-123.

[36] Perez, F, C. Abdullah & D. Docampo (1992). "Extremepoint stability tests for discrete-time polynomials", *Proc. of CDC,* pp. 1552-1553.

[37] Rantzer, A. (1990). "Hurwitz testing sets for parallel polytope of polynomials", *Systems and Control Letters.* 15, 99-104.

[38] Rantzer, A. (1991). "Parametric uncertainty and feedback complexity in control systems", Ph. D. Dissertation. *Division of Optimization and Systems Theory,* Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, Sweden.

[39] Rantzer, A. (1992a). "Stability conditions for polytopes of polynomials", *IEEE Trans. on Aut. Control,* AC-37, 79-89.

[40] Rantzer, A. (1992b). "Kharitonov's weak theorem holds if and only if the stability region and its reciprocal are convex", *Int. J. of Nonlinear and Robust Control.* (To appear.)

[41] Saeki, M. (1986). "A method of robust stability analysis with highly structured uncertainties", *IEEE Trans. on Aut. Control,* AC-31, 935-940.

[42] Sideris, A. and B. R. Barmish (1989). "An edge theorem for polytopes of polynomials which can drop in degree", *Systems and Control Letters.* 13, pp. 233-238.

[43] Siljak, D. D. (1969), *Nonlinear Systems,* Wiley, New York.

[44] Soh, Y. C. and Y. K. Foo(1990). "Generalization of strong Kharitonov theorems to the left sector", *IEEE Trans. on Aut. Control,* AC-35, pp. 1378-1382.

[45] Tempo, R.(1990). "A dual result to Kharitonov's theorem", *IEEE Trans. on Aut. Control,* AC-35, 195-197.

[46] Tesi, A. & A. Vicino (1991). "Design of optimally robust controllers with few degrees of freedom", *Proc. IFAC Symp. on Design Methods of Control Systems,* Zurich, Switzerland.

[47] Vicino, A. and A. Tesi (1990). "Regularity conditions for robust stability problems with linearly structured perturbations", *Proc. 29th IEEE CDC,* Honolulu, U. S. A., pp. 46-51.

[48] Wang, L. (1995). "Robust strong stabilizability of interval plants : It suffices to check two vertices", *Systems & Control Letters,* vol. 26, pp. 133-136.

[49] Wei, K. & B. R. Barmish (1989). "Making a polynomial Hurwitz-invariant by choice of feedback gains", *International Journal of Control,* vol. 50, no. 4, pp. 1025-1038.

[50] Youla, D. C., J. J. Bongiorno, Jr. and C. N. Lu (1974). "Single-loop feedback stabilization of linear multivariable plants", *Automatica,* vol. 10, pp. 159-173.

[51] Zadeh, L. A. and C. A. Desoer (1963). *Linear System Theory-A State-space Approach,* McGraw-Hill, New York.

[52] Zong, S. Q. (1990). "Robust stability analysis of control systems with structured parametric uncertainties and an application to a robust control system", Ph. D. Dissertation, Department of physics and Electrical Engineering, University of Bremen, Germany.

## 저 자 소 개


**강환일(姜煥一)**

1956년 11월 27일생. 1980년 서울대 공대 전자공학과 졸업. 1982년 한국과학기술원 전기전자공학과 졸업(석사). 1992년 미국 Univ. of Wisconsin-Madison 전기전자공학과 졸업(공박). 1983-84년 경북대 전자공학과 전임강사. 1993-95년 경상대 제어계측공학과 조교수. 현재 명지대 전기전자공학부 조교수.

**김영철(金永喆)**

1954년 12월 29일생. 1981년 고려대 공대 전기공학과 졸업. 1983년 서울대 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1987년 서울대 대학원 전기공학과 졸업(공박). 1992-93년 미국 Texas A&M Univ. Post-Doctoral Fellow. 현재 충북대 공대 전기전자공학부 부교수. 당학회 편집위원.