

Design Guidelines and Convergence Bound of Iterative Learning Control System

盧喆來* · 鄭明振**

(Cheol-Lae Roh · Myung-Jin Chung)

Abstract - In this paper, we consider an iterative learning control system(ILCS) consisting of an iterative learning controller, a feedback controller and a controlled plant in the frequency domain. At first, we review the convergence of ILCS. And we give some design guidelines of the ILCS using a nominal model of the plant. Then we present the structured and the unstructured uncertainty bound which guarantees the convergence of the designed iterative learning controller. In particular, we analyze the relationship between the convergence and the magnitude and phase uncertainties. In order to show the usefulness of the proposed analysis and design guidelines, we present some simulation examples.

Key Words : Iterative learning control system(반복 학습 제어 시스템), Frequency domain approach (주파수 영역 접근 방식), Robustness Analysis(강인성 해석), Design guidelines(설계 지침)

1. 서론

최근 들어 강인성 문제가 제어 해석에 있어서 중요한 요소가 되면서 제어기의 강인성에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다. 특히 반복 학습 제어[1-6]의 경우는 시간 영역에서 초기 상태 오차, 상태 외란 및 출력 잡음과 반복 학습 제어기의 강인성 및 제어 성능에 대한 연구가 이루어졌고, 부분적으로 주파수 영역에서 외란이 존재할 경우 반복 학습 제어기의 성능 한계 등에 관한 연구가 시도되었다. 그러나 주파수 영역에서 학습 제어기를 설계하기 위해서는 모델에 기반하여 필터를 설계하는 것이 일반적이고, 이 경우 불가피하게 모델링 불확실성의 영향이 나타난다. 즉, 모델링 불일치에 해당하는 영향이 오차 신호의 수렴 성능이나 제어 시스템 전체의 안정도를 위반할 수 있으므로 이러한 영향을 고찰하는 강인성에 대한 연구가 필요한 실정이다. 모델링 불확실성의 영향을 살피기 위한 연구는 반복 제어(repetitive control)의 경우 강인 안정성(robust stability)의 개념으로 연구가 진행되어 왔으나[7-10], 매 초기 조건을 일치시키고 반복적으로 진행되는 반복 학습 제어의 경우에는 이에 대한 연구가 비교적 적었으며 반복 시행에 따른 강인 수렴성(robust convergence)의 관점에서 문제를 다루어야 한다.

일반적으로 모델링 불확실성을 표현하는 방식에는 여러 가지 방법이 있겠으나, 대표적인 분류 방식은 비교적 저주파수 영역의 불확실성을 표현하는 구조적 불확실성과 고주파 영역의 불확실성을 표현하는 비구조적 불확실성으로 구분된다[11]. 이중

구조적 불확실성이란 플랜트의 전달 함수의 각 계수에 불확실성이 존재하는 경우로서 모델링 단계에서 정확한 값을 모르고 단지 어느 정도의 구간 값을 나타내는 경우에 해당하며 비구조적 불확실성이란 실제 고차 시스템을 여러가지 이유로써 모델링 단계에서 저차 시스템으로 근사화하면서 생기는 고주파 영역의 불확실성을 의미한다. 한편 최근 들어 반복 학습 제어기의 설계에 있어서 케환 제어기가 도입되고 있다. 이는 케환 제어기를 이용하여 불안정한 시스템을 안정화시키거나 또는 비선형 시스템을 상태 케환 선형화 등을 이용하여 선형화함으로써 해석을 용이하게 하고 또한 모델링 불확실성이나 외란이나 잡음 등에 케환 제어기가 보다 강인한 특성을 갖기 때문이다[12].

따라서, 본 연구에서는 반복 학습 제어기와 케환 제어기로 구성되는 반복 학습 제어 시스템에 대하여 제어 대상 플랜트에 모델링 불확실성이 존재할 때, 이들과 반복 학습 제어기의 수렴성 및 강인성과의 관계를 보인다. 또한, 선형 시불변의 공칭 모델에 기반한 체계적인 반복 학습 제어기의 설계 지침과 좋은 제어 성능을 보장하기 위한 케환 제어기의 역할을 페루프의 감도 함수와 페루프 전달 함수를 이용하여 해석한다. 한편, 플랜트에 존재하는 모델링 불확실성에 대하여 설계된 반복 학습 제어기의 수렴성을 보장하는 모델링 불확실성의 한계를 각각 구조적 불확실성의 경우와 비구조적 불확실성의 경우로 나누어 해석하며, 특히 비구조적 불확실성의 체계하에서 위상과 크기의 불확실성과 공칭 모델에 기반하여 설계된 반복 학습 제어기의 수렴 성능과의 관계를 보인다. 본 논문에서 제안된 불확실성의 범위와 체계적인 설계를 보이기 위하여 여러 가지 시뮬레이션 예를 통하여 설계 지침과 성능 사이의 관계를 보인다.

2. 반복 학습 제어 시스템 해석

다음 그림 1과 같이 반복 학습 제어기, 케환 제어기, 그리고 제어 대상 시스템으로 구성되는 반복 학습 제어 시스템을 생

* 正 會 員 : KAIST 電氣 및 電子工學科 卒業豫定 · 工博

** 正 會 員 : KAIST 電氣 및 電子工學科 教授 · 工博

接受日字 : 1995年 1月 28日

1次 修正 : 1995年 7月 11日

2次 修正 : 1995年 9月 15日

3次 修正 : 1995年 12月 7日

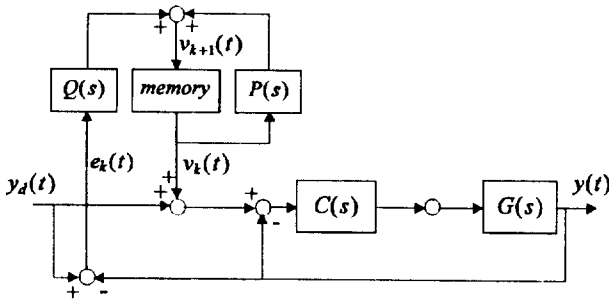


그림 1 iveau 제어를 포함한 반복 학습 제어 시스템
 Fig. 1 Iterative learning control system with feedback control

각해 보자. 제어 대상 시스템이 인과적(causal)이고 안정한 최소 위상 선형 시불변 시스템이라고 가정하면, 다음과 같이 상태 공간 영역에서 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 u 와 y 는 각각 R^r 과 R^m 에서 정의되는 시간 함수이고, A, B, C, D 는 적절한 차원을 갖는 상수 행렬이다. 이때, $y(t)$ 는 시스템 행렬과 입력 $u(t)$ 로서 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$y(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t) \quad (2)$$

주파수 영역에서는 입출력 관계가 다음과 같이 표현될 것이다.

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (3)$$

여기서 $G(s)$ 는 $m \times r$ 전달 함수 행렬(transfer function matrix)이며, $U(s)$ 와 $Y(s)$ 는 복소 변수 s 의 함수로서 각각 시간 함수 $u(t)$ 와 $y(t)$ 의 라플라스 변환(Laplace transform)을 의미한다. 만약, 초기 상태가 0이라고 가정하면

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (4)$$

이다. 이 시스템에 iveau 제어기(feedback controller) $C(s)$ 를 그림 1과 같이 연결하면 시행 횟수 k 에서의 시스템 출력 $Y_k(s)$ 는 페루프 전달 함수 $T(s)$ 와 가상적인 원하는 출력(virtual desired output), $Y_k^d(s)$ 에 의하여 아래와 같이 정리된다.

$$Y_k(s) = (I + G(s)C(s))^{-1}G(s)C(s) Y_k^d(s) \triangleq T(s) Y_k^d(s) \quad (5)$$

여기서 가상적인 원하는 출력은 아래와 같이 정의된다.

$$Y_k^d(s) \triangleq Y_d(s) + V_k(s) \quad (6)$$

여기서 $Y_d(s)$ 와 $V_k(s)$ 는 각각 원하는 제어 경로 $y_d(t)$, $t \in [0, t_f]$ 와 반복 학습 제어 입력 $v_k(t)$ 의 라플라스 변환이며 t_f 는 원하는 작업의 주기를 의미한다. 이제 반복 횟수 k 번째 시행에서의 플랜트의 출력을 $y_k(t)$ 라 하면 오차 신호 $e_k(t)$ 는 아래와 같이 정한다.

$$e_k(t) \triangleq y_d(t) - y_k(t), t \in [0, t_f] \quad (7)$$

이제 반복 학습 제어 입력을 다음 식과 같이 변경시켜 나간다면,

$$V_{k+1}(s) = P(s) V_k(s) + Q(s) E_k(s) \quad (8)$$

여기서 $P(s), Q(s)$ 는 각각 설계해야 할 학습 필터이다. 이제 윗식과 같이 표현되는 보상된 페루프 시스템(compensated closed-loop system)에 원하는 제어 궤적이 반복적으로 주어질 때, 반복 학습 제어의 문제는 다음과 같이 표현할 수 있다.

가정 1 : 매 시행시마다 출력의 초기값은 원하는 제어 궤적의 초기값과 일치하도록 설정한다.

가정 2 : 보상된 페루프 시스템 $T(s)$ 는 안정하다.

가정 3 : 원하는 제어 궤적의 주파수 대역은 저역 주파수 대역 존재한다.

문제 1 : 그림 1과 같이 iveau 제어가 포함된 선형 페루프 시스템에 대하여 식 (5)와 같이 $T(s)$ 가 정의되고, 가정 1, 2, 3을 만족하며 원하는 제어 궤적 $y_d(t)$, $t \in [0, t_f]$ 와 허용 오차 범위 ϵ^* 가 주어졌을 때 반복 횟수 k 가 충분히 증가함에 따라 다음 조건을 만족하는 제어 입력, $v_k(t)$ 를 구하라.

$$\|e_\infty\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|y_d(t) - y_k(t)\| < \epsilon^*, t \in [0, t_f]$$

위와 같이 설정된 반복 학습 제어의 문제를 주파수 영역에서 다루기 위하여 아래와 같이 오차 신호의 L_2 노름을 정의하면 다음과 같다.

$$\|e_k(t)\|_2 \triangleq \left(\int_0^\infty e_k(t)^T e_k(t) dt \right)^{1/2} \quad (9)$$

또한 전달 함수 행렬 $M(s)$ 의 H_∞ 노름은 다음 식과 같이 정의된다.

$$\|M(s)\|_\infty \triangleq \sup_\omega \lambda^{1/2}_{\max} \{M^*(j\omega)M(j\omega)\} \quad (10)$$

여기서 λ_{\max} 는 최대 특이값(maximum singular value)을 의미한다. 또한 단일 입력 단일 출력 시스템의 경우에는 다음과 같다.

$$\|M(s)\|_\infty \triangleq \sup_\omega |M(j\omega)|$$

이상의 정의와 문제 1로부터 아래와 같은 반복 학습 제어의 수렴성에 관한 정리를 얻을 수 있다.

정리 1 : 식 (5)로 표현되는 안정한 페루프 시스템에 식 (8)의 반복 학습 제어가 그림 1과 같이 연결될 때, 다음 조건이 만족되면

$$\|P(s) - Q(s)T(s)\|_\infty < 1 \quad (11)$$

반복 학습 제어 입력은 고정된 값 $V^*(s)$ 로 수렴하며

$$V^*(s) = (1 - P(s) + Q(s)T(s))^{-1}Q(s)(I - T(s))Y_d(s) \quad (12)$$

이때 잔존 오차(remaining error)는 다음 식과 같이 주어진다.

$$E^*(s) = (1 - P(s) + Q(s)T(s))^{-1}\{(1 - P(s))(I - T(s))\}Y_d(s) \quad (13)$$

증명 : 식 (8)의 반복 학습 제어 입력으로부터

$$\begin{aligned} V_{k+1}(s) &= P(s)V_k(s) + Q(s)(Y_d(s) - Y_k(s)) \\ &= P(s)V_k(s) + Q(s)\{Y_d(s) - T(s)Y_d(s) - T(s)V_k(s)\} \\ &= P(s)V_k(s) - Q(s)T(s)V_k(s) + Q(s)(I - T(s))Y_d(s) \\ &= (P(s) - Q(s)T(s))V_k(s) + Q(s)(I - T(s))Y_d(s) \end{aligned}$$

이 학습 제어 입력의 시퀀스가 반복이 증가함에 따라 수렴하기 위해서는

$$\|P(s) - Q(s)T(s)\|_\infty < 1$$

을 만족해야 하며, 이때 수렴된 값 $V^*(s)$ 는 다음 식을 만족해야 한다.

$$V^*(s) = (P(s) - Q(s)T(s))V^*(s) + Q(s)(I - T(s))Y_d(s)$$

따라서, 위 식을 정리하면

$$V^*(s) = (I - P(s) + Q(s)T(s))^{-1}Q(s)(I - T(s))Y_d(s)$$

을 얻을 수 있고, 잔존 오차를 결정하기 위하여 $V^*(s)$ 를 다음 식에 넣고 정리하면

$$E^*(s) = Y_d(s) - T(s)(Y_d(s) + V^*(s))$$

결국, 잔존 오차는 아래와 같이 구할 수 있다.

$$E^*(s) = (I - P(s) + Q(s)T(s))^{-1}\{(I - P(s))(I - T(s))\}Y_d(s)$$

Q.E.D.

정리 1로부터 다음과 같은 사항들을 알 수 있다.

주 1 : 출력의 초기값을 원하는 제어 궤적의 초기값과 일치시키는 이유는 초기값의 오차에 의하여 알고리즘이 발산할 수 있기 때문이다. 로봇 매니플레이터와 같이 반복적인 작업을 수행하는 경우 초기값을 일치시킬 수 있으며, 원하는 작업의 시점과 종점이 일치하지 않는 경우에는 반복 제어(repetitive control)의 기법을 사용할 수 없다.

주 2 : 원하는 제어 궤적의 주파수 대역이 저주파수 대역에 존재한다는 가정은 대부분의 원하는 작업이 삼각 함수나 다항식 형태의 연속적으로 미분 가능한 부드러운 형태가 많기 때문에 타당하다. 또한, 이러한 가정은 학습 필터 $P(s)$ 를 저역 통과 필터(low-pass filter)의 형태로 설계할 수 있게 한다.

주 3 : 반복 시행에 따른 오차 신호는 L_2 노음의 의미로 수렴

한다.

주 4 : 주파수 영역에서의 반복 학습 제어기의 설계 문제는 결국 학습 필터 $P(s)$ 와 $Q(s)$ 를 설계하는 문제이며, 이 두 필터는 Luca 등이 제안한 "무엇을 배울 것인가(what to learn)"의 개념과 "무엇을 기억할 것인가(what to remember)"의 개념에 해당한다[4].

주 5 : Craig가 제안한 형태, 즉 $P(s) = I$ 인 경우에는 반복 학습 제어기는 반복 시행이 진행함에 따라 잔존 오차가 0으로 수렴하는 것을 알 수 있다. 그러나, 이 경우에는 Moore 등이 언급한 것과 같이 시스템의 가역성(可逆性, invertibility)을 필요로 한다[3].

주 6 : 대부분의 경우 $P(s)$ 를 저역 통과 필터로 설계함으로써 반복 학습 제어기의 수렴 성능을 향상시킬 수 있다.

3. 공칭 모델에 기반한 반복 학습 제어기의 설계

본 절에서는 궤환 제어기가 포함된 페루프 시스템에 대한 반복 학습 제어기의 체계적인 설계 방법을 제안한다. 그림 1의 제어 시스템 구조로부터 공칭 모델에 기반한 페루프 전달 함수를 $T(s)$ 라 하면 식 (8)의 반복 학습 제어기는 $T(s)$ 의 주파수 특성을 고려하여 설계된다. 실제 페루프 전달 함수는 공칭 모델 $T(s)$ 와 차이가 있겠으나, 이러한 모델링 차이에 기인한 제어 성능의 하락은 반복 학습 제어기를 이용하여 향상시킬 수 있다.

공칭 페루프 전달 함수의 차단 주파수(cut-off frequency)를 ω_c 라고 하고, $T(s)$ 의 상대 차수(relative degree)를 r 이라고 하면, 반복 학습 제어기의 수렴 조건 (11)로부터 학습 필터 $Q(s)$ 는 공칭 모델에 대하여 다음 식을 만족하도록 선택한다.

$$Q(s) = T(s)^{-1} \quad (14)$$

한편, 이 경우에 $Q(s)$ 는 $T(s)$ 의 역모델을 이용함으로써 분자의 차수가 분모의 차수보다 r 만큼 크게 된다. 따라서 $Q(s)$ 를 프라퍼(proper)이도록 하기 위하여 다음과 같이 주파수 밴드가 제한된 저역 통과 함수 $J(s)$ 를 도입한다.

$$J(s) = \frac{1}{(s/\omega_c + 1)^r} \quad (15)$$

이제 새로운 $Q(s)$ 는 아래와 같이 결정된다.

$$Q(s) = J(s)T(s)^{-1} \quad (16)$$

식 (16)에서 학습 필터 $Q(s)$ 는 대역 통과 필터의 특성을 갖게 되는데, 그 이유는 대부분의 페루프 전달 함수의 특성은 저역 통과 필터의 특성을 갖는 데 비해서 이의 역모델인 경우 고역 통과 필터의 형태가 되어 고주파 영역에 존재하는 모르는 다이내믹스의 영향을 없애주기 위해서는 특정 주파수 이상의 신호는 필터링하여 제거하는 역할을 함으로써 대역 통과 필터의 형태를 갖게 된다. $P(s)$ 는 전형적으로 저역 통과 필터의 형태로 설계되는데, 이는 반복 학습 제어기의 수렴성에 영향을 미치는 한편, 페루프 전달 함수의 불확실성에도 강인한 특성을 갖게 된다.

$$P(s) = \frac{1}{(s/\omega_c + 1)^r} \quad (17)$$

여기서 r_p 는 $P(s)$ 의 주파수 특성을 고려하고, 원하는 제적 주파수 특성을 고려하여 선정한다. 특히 $P(s)$ 나 $Q(s)$ 에 작용하는 저역 통과 필터의 주파수 대역을 결정하는 것은 원하는 제적과 플랜트의 주파수 대역을 고려하여 설정한다. 즉, 두 저역 통과 필터가 결국 반복 학습 제어기에서 발생시키는 입력 신호의 주파수 대역을 결정하게 되고, 또한 시스템의 안정도와도 밀접한 관계에 있다는 것을 알 수 있다. 통상 원하는 제적의 주파수 대역이 플랜트의 주파수 대역 이내에 있다면, 학습 필터의 주파수 대역은 원하는 제적의 최대 주파수보다 높은 주파수에서 차단 특성이 일어나도록 선정한다. 이는 다음과 같은 고찰로부터 알 수 있는데 학습이 완전히 끝났을 때의 반복 학습 입력 (12)로부터 이상적인 경우의 반복 학습 제어 입력(즉, $P=I, Q=T^{-1}$)인 경우 이는 다음 식과 같다.

$$V^*(s) = Q(s)(I - T(s))Y_d(s) = T^{-1}(s)(I - T(s))Y_d(s) = Y_d(s)/(G(s)C(s)) \quad (18)$$

즉, 반복 학습 입력은 루프 이득(loop gain), $G(s)C(s)$ 의 역모델과 원하는 제어 경로의 주파수 대역에 의존한다는 것을 알 수 있다. 대부분의 제어 시스템 해석에 있어서 공칭 모델은 선형 시불변 시스템으로 얻는 것이 보통이며 가능하면 더 정확한 공칭 모델의 정보를 제어기 설계에 이용할 수 있다면 더 좋은 제어 결과를 가져 올 수 있을 것으로 생각할 수 있다. 학습 필터의 설계에 있어서 공칭 모델의 역모델을 이용하고, 앞 절에서 해석한 결과를 이용하여 제어 성능을 향상시킬 수 있도록 적절한 저역 통과 필터를 도입하여 고주파 영역에서 발생될 수 있는 신호들을 필터링하여 제거하는 기법이 사용되었다. 한편, 학습 필터 $P(s), Q(s)$ 를 설계하는 데 있어서 저역 통과 필터를 도입함으로써 생기는 위상 지연을 보상해 주기 위한 지연 항을 각 필터에 결합시켜 사용할 수도 있다.

4. 반복 학습 제어기의 강인 수렴 범위

이제 앞에서 해석한 반복 학습 제어 시스템의 모델링 불확실성에 대한 강인성을 해석하기 위하여 다음과 같이 모델링 불확실성을 구분하여 정의한다. 먼저 구조적 불확실성을 나타내기 위하여 다음과 같은 다항식으로 표현되는 실구간 다항식(real interval polynomial)의 패밀리(family) F_δ 를 생각해 보자[13].

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \dots + \delta_n s^n \quad (19)$$

여기서 $\delta_i \in [x_i, y_i]$ 이다. 이제 F_δ 와 관련된 4개의 Kharitonov 다항식은 다음과 같이 정의된다.

$$K_\delta^1 = x_0 + x_1 s + y_2 s^2 + y_3 s^3 + x_4 s^4 + \dots$$

$$K_\delta^2 = x_0 + y_1 s + y_2 s^2 + x_3 s^3 + x_4 s^4 + \dots$$

$$K_\delta^3 = y_0 + x_1 s + x_2 s^2 + y_3 s^3 + y_4 s^4 + \dots$$

$$K_\delta^4 = y_0 + y_1 s + x_2 s^2 + x_3 s^3 + y_4 s^4 + \dots$$

또한 불확실성을 포함한 페루프 전달 함수의 패밀리 \mathcal{T} 에 대하여 $\hat{T}(s)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{T}(s) = \frac{N(s, n)}{D(s, d)} = \frac{[n_0^-, n_0^+] + \dots + [n_m^-, n_m^+]s^m}{[d_0^-, d_0^+] + \dots + [d_n^-, d_n^+]s^n} \quad (20)$$

여기서 $N(s, n)$ 과 $D(s, d)$ 는 각각 구간 다항식의 집합 \mathbf{N} 과 \mathbf{D} 에 속한다. 이 구간 플랜트(interval plant)에 대하여 Kharitonov 시스템, $T_K(s)$ 는 아래의 16개의 플랜트의 집합으로 정의된다.

$$T_K(s) = \{ \hat{T}(s) = \frac{K_M^i(s)}{K_D^j(s)} : i, j = 1, 2, 3, 4 \} \quad (21)$$

비슷한 방법으로 Kharitonov 절편 KS_N 을 정의할 수 있는데 이는 다음 4개의 선절편(line segments)을 포함하는 \mathbf{N} 의 부집합(subset)으로 정의된다.

$$[K_N^1, K_N^2], [K_N^1, K_N^3], [K_N^2, K_N^4], [K_N^3, K_N^4] \quad (22)$$

여기서 $[K_N^1, K_N^2] \triangleq (1-\lambda)K_N^1 + \lambda K_N^2, \lambda \in [0, 1]$ 이다. 비슷하게 KS_D 에 대해서도 정의할 수 있다. 또한 \mathcal{T} 의 부집합 극단 시스템(extremal systems) T_{KS} 는 다음과 같이 정의된다.

$$T_{KS} \triangleq \left\{ \frac{N(s, n)}{D(s, d)} \in \mathcal{T} : [N \in K_N \text{ and } D \in KS_D] \text{ or } [N \in KS_N \text{ and } D \in K_D] \right\} \quad (23)$$

여기서 T_{KS} 는 최대 32개의 단일 변수로 표현되는 집합으로 극단점(extremal points)에 걸쳐 표현되는 플랜트의 집합을 나타낸다. 구간 플랜트에 대하여 제어기를 설계하거나 그것의 주파수 특성을 표현하는 데 있어서 T_{KS} 는 중요한 역할을 한다. 모델링 불확실성을 구조적인 불확실성으로 표현할 경우 구간 다항식을 이용한 구간 플랜트로 표현하면 반복 학습 제어기의 수렴 조건으로부터 학습 필터 $P(s)$ 와 $Q(s)$ 는 T_{KS} 에 속하는 모든 플랜트에 대하여 수렴성을 만족할 때, 그 구조적 불확실성을 갖는 모든 플랜트에 대하여 수렴성을 만족한다는 것을 알 수 있다. 한편, 그 역의 문제로서 학습 필터가 설계되었을 때 얼마만큼의 구조적 불확실성의 크기에 대하여 설계된 학습 제어기가 수렴 성능을 만족할 것인가 하는 문제는 보통 반복적인 방법으로 구할 수 있다. 즉, 임의의 공칭 모델 $T(s) = \frac{n_0^0 + n_1^0 s + \dots + n_m^0 s^m}{d_0^0 + d_1^0 s + \dots + d_n^0 s^n}$ 에 대하여 설계된 반복 학습 제어기가 수렴하는지를 확인하고 그 안정성(stability)을 위반하지 않는 범위내에서 계수의 섭동 범위를 아주 작은 미소항 ϵ 과 고정된 양의 값 ν_i, μ_i 를 도입하여 다음과 같이 변경한 후 다시 수렴 조건을 만족하는지 검사한다.

$$n_i \in [n_i^0 - \epsilon \nu_i, n_i^0 + \epsilon \nu_i], \quad d_i \in [d_i^0 - \epsilon \mu_i, d_i^0 + \epsilon \mu_i] \quad (24)$$

이처럼 ϵ 을 반복적으로 증가시켜 가면서 반복 학습 제어기의 수렴 조건을 위배하는 가장 큰 $\epsilon \nu_i$ 나 $\epsilon \mu_i$ 가 구조적 불확실성의 한계가 된다. 한편 전술한 구조적 불확실성이 대부분

저주파 영역에 존재하는 모델링 불확실성을 표현한다면 비구조적 불확실성은 대부분 모델링시 무시된 고차의 동특성이나 마찰, 위상 지연 등을 나타낸다. 이러한 비구조적 불확실성은 제어 입력을 반복적으로 생성해 내는 데 있어서 위상 오차를 발생하여 발진을 일으킬 수 있다. 특히, 유압식 매니퓰레이터(hydraulic manipulator)에서와 같이 유체의 신축성(elasticity)이나 구동기 시스템의 비선형성 등과 같이 무시할 수 없을 정도의 고차의 동특성은 고주파 발진과 같은 심각한 문제를 야기할 수 있다. 따라서, 이러한 비구조적 모델링 불확실성이 존재하는 시스템에 대하여 공칭 모델에 기반하여 설계된 식 (8)의 반복 학습 제어기는 과연 얼마만큼의 모델링 불확실성에도 강인하게 동작할 것인가 하는 연구가 필요하다. 이제 비구조적 불확실성을 표현하기 위하여 아래와 같이 곱셈형의 비구조적 불확실성을 기술하면

$$\tilde{T}(s) = T(s)(1 + \Delta_2 W_2(s)) \quad (25)$$

여기서 $W_2(s)$ 는 고정된 안정한 전달 함수이고 $\Delta_2(s)$ 는 $\|\Delta_2\|_\infty \leq 1$ 인 크기와 위상의 불확실성 성분을 표현한다고 하자. 이제 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

정리 2 : 그림 1과 같은 반복 학습 제어 시스템에서 페루프 전달 함수가 식 (25)와 같이 주어지고 반복 학습 제어기가 식 (8)과 같이 주어질 때, 공칭 모델에 기반하여 설계된 반복 학습 제어기가 수렴할 수 있는 불확실성의 바운드는 다음과 같이 구해진다.

$$|W_2(j\omega)| < \frac{1 - |P(j\omega) - Q(j\omega)T(j\omega)|}{|Q(j\omega)T(j\omega)|}, \quad \forall \omega \quad (26)$$

또한, 만약 $P(s), Q(s)$ 가 공칭 모델에 대하여 $P(s) = I, Q(s) = T^{-1}(s)$ 로 설계된다면 그 때 불확실성의 바운드는 다음과 같다.

$$|W_2(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega \quad (27)$$

증명 : 반복 학습 제어기의 수렴 조건으로부터

$$\begin{aligned} & \|P(s) - Q(s)T(s)(1 + \Delta_2 W_2(s))\|_\infty \\ &= \|P(s) - Q(s)T(s) - \Delta_2 W_2(s)Q(s)T(s)\|_\infty < 1 \end{aligned}$$

윗식이 수렴 조건을 만족하기 위해서는 아래의 부등식 조건을 만족해야 한다.

$$|P(j\omega) - Q(j\omega)T(j\omega)| + |\Delta_2 W_2(j\omega)Q(j\omega)T(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega$$

따라서 아래와 같은 수렴 범위를 얻을 수 있다.

$$|W_2(j\omega)| < \frac{1 - |P(j\omega) - Q(j\omega)T(j\omega)|}{|Q(j\omega)T(j\omega)|}, \quad \forall \omega$$

또한 $P(s) = I, Q(s) = T^{-1}(s)$ 일 경우 불확실성의 바운드는 $|W_2(j\omega)| < 1, \forall \omega$ 이다.

Q.E.D.

이 보조 정리는 공칭 모델에 대하여 수렴하는 제어 성능을

갖도록 설계된 반복 학습 제어기가 불확실성을 포함한 플랜트 일 경우에도 불확실성의 수렴 범위 내에서는 강인한 수렴 성능을 갖는다는 것을 알 수 있다. 한편 전술한 바와 같이 좋은 제어 성능, 즉 수렴 특성과 작은 잔존 오차를 얻기 위해서는 케환 제어기가 잘 설계되어야 하는데 이는 케환 제어 시스템의 감도 함수(sensitivity function) $S(s)$ 와 페루프 전달 함수(closed-loop transfer function) $T(s)$ 로부터 그 설계 의미를 알 수 있다. 감도 함수 $S(s)$ 는 저주파수 영역에서 작은 값을 갖도록 설계되어야 하는데, 이는 감도 함수가 원하는 경로에 대한 오차의 전달 함수를 의미하므로 원하는 경로가 저주파수 부근에 있다고 가정한다면 타당한 가정이다. 한편 페루프 전달 함수의 경우에는 잡음과 같은 고주파수 영역의 값이 될수록 작게 설계되어야 한다. 이러한 사실과 식 (11)의 수렴 조건 및 식 (13)의 잔존 오차식을 고려하여 케환 제어를 설계하여야 한다. 이제 문제를 구체화하기 위하여 우선 제어 대상 시스템에 모델링 불확실성이 존재한다고 가정하고 이를 $\tilde{G}(s)$ 로 다음과 같이 모델링 한다고 하자.

$$\tilde{G}(s) = G(s)(1 + \Delta_1 W_1(s)) \quad (28)$$

윗 식에서 $G(s)$ 는 시스템의 공칭 모델을 의미하고 $W_1(s)$ 는 역시 노음 바운드 된 불확실성을 표현한다고 하자. 만약 반복 학습 제어기가 인가되지 않고 케환 제어기만 연결되었다고 할 때, 식 (28)의 불확실성하에서 강인 안정성(robust stability)을 보장하는 필요 충분 조건은 다음과 같다.

보조 정리 3 [11] : 식 (28)과 같이 곱셈형의 비구조적 불확실성에 대하여 케환 제어기 $C(s)$ 가 강인 안정성을 보장하는 필요 충분 조건은 다음과 같다.

$$\|W_1(s)T(s)\|_\infty < 1 \quad (29)$$

이 보조 정리의 증명은 Nyquist 선도를 이용하여 쉽게 증명할 수 있으며, 개념적으로는 small gain 정리를 이용하면 쉽게 보일 수 있다. 이 보조 정리의 의미는 식 (28)과 같은 불확실성에 대하여 케환 제어기가 포함된 페루프 시스템의 안정성을 만족하기 위한 설계 지침을 제시한다. 한편 식 (20)의 제어 대상 플랜트로부터 반복 학습 제어기가 강인 수렴할 경우 다음 조건을 만족한다.

정리 4 : 그림 1의 반복 학습 제어 시스템에서 반복 시행에 따른 오차 신호가 강인 수렴하는 경우 다음 조건을 만족한다.

$$\begin{aligned} & |W_1(j\omega)T(j\omega)| + |(P(j\omega) - Q(j\omega))W_1(j\omega)T(j\omega)| \\ &+ |P(j\omega) - Q(j\omega)T(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega \end{aligned} \quad (30)$$

증명 : 수렴 조건식으로부터

$$\begin{aligned} & \|P - Q \frac{G(1 + \Delta_1 W_1)C}{1 + G(1 + \Delta_1 W_1)C}\|_\infty = \|P - Q \frac{T(1 + \Delta_1 W_1)}{1 + \Delta_1 W_1 T}\|_\infty < 1 \\ \Rightarrow & \frac{|P(1 + \Delta_1 W_1 T) - QT(1 + \Delta_1 W_1)|}{|1 + \Delta_1 W_1 T|} \\ \leq & \frac{|P(1 + W_1 T) - QT(1 + W_1)|}{|1 - W_1 T|} < 1 \\ \therefore & |W_1(j\omega)T(j\omega)| + |(P(j\omega) - Q(j\omega))W_1(j\omega)T(j\omega)| \\ &+ |P(j\omega) - Q(j\omega)T(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega \end{aligned}$$

Q.E.D.

정리 2의 식 (30)으로부터 W_1 이 0인 경우에는 식 (30)은 공칭 모델에 대한 수렴 조건식으로 되는 것을 알 수 있다. 식 (30)으로부터 좌측 변의 각 항들의 합이 1 보다 작도록 학습 필터와 재환 제어기를 설계하여야 한다.

한편 전술한 해석적인 방법은 노음과 부동식을 사용함으로써 위상 변화에 따른 수렴 조건의 변화를 고려하기가 힘들다. 특히 플랜트에 위상 지연이 존재하는 경우 발진 위험이 있으므로 플랜트의 위상 특성과 각 학습 필터간의 상관 관계에 대한 해석이 필요하다. 반복 학습 제어기의 수렴 조건식으로부터 주파수에 따른 복소 값 $[P(j\omega) - Q(j\omega)\hat{T}(j\omega)]$ 이 복소 평면상에서 단위 원 안에 존재해야 반복 학습 제어기가 수렴하고 특히, 원점에 가까이 존재할수록 빠른 수렴 특성을 갖는다는 것을 알 수 있다. 이것의 의미는 가능하면 $Q\hat{T}$ 의 합수가 학습 필터 $P(s)$ 를 크기 및 위상 오차 없이 가능한 한 정확하게 매칭하는 것을 의미한다. 이런 경우 주파수에 따른 수렴 조건식의 값은 수렴 영역의 중심부에 있게 되어 빠른 수렴 특성을 갖게 된다. 한편 학습 필터 $P(s)$ 에 대하여 학습 필터 $Q(s)$ 와 플랜트 $\hat{T}(s)$ 의 곱이 가능한한 $P(s)$ 에 매칭되기 위해서는 만약 위상에서의 차이가 크면 클수록 크기에서의 차이가 작아야 할 것이며 그 역도 성립할 것이다. 이제 반복 학습 제어기의 수렴 조건으로부터 다음과 같은 부동식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} |P(j\omega) - Q(j\omega)\hat{T}(j\omega)| < 1, \forall \omega \\ |Q\hat{T}|^2 - 2|P||Q\hat{T}|\cos(\phi_{PQ\hat{T}}) + |P|^2 - 1 < 0, \forall \omega \end{aligned} \quad (31)$$

윗식에서 $| \cdot |$ 는 주파수에 따른 크기를 나타내며, $\phi_{PQ\hat{T}}$ 는 $P(s)$ 와 $Q(s)\hat{T}(s)$ 사이의 위상차를 의미하며 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_{PQ\hat{T}} \triangleq \phi_P - \phi_{Q\hat{T}} = \phi_P - \{\phi_Q + \phi_{\hat{T}}\} \quad (32)$$

한편 식 (31)에 근의 공식을 대입하면 아래 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} |P|\cos(\phi_{PQ\hat{T}}) - \sqrt{|P|^2\cos^2(\phi_{PQ\hat{T}}) + 1 - |P|^2} < |Q\hat{T}| \\ |P|\cos(\phi_{PQ\hat{T}}) + \sqrt{|P|^2\cos^2(\phi_{PQ\hat{T}}) + 1 - |P|^2} \\ \text{for } -\pi/2 \leq \phi_{PQ\hat{T}} \leq \pi/2 \\ |Q\hat{T}| = 0, \quad \text{for all other } \phi_{PQ\hat{T}} \end{aligned} \quad (33)$$

$|Q\hat{T}|$ 의 최소값은 0으로 정한다. 즉, 윗식의 의미는 학습 필터 $Q(s)$ 와 실제 플랜트 $\hat{T}(s)$ 의 곱의 크기가 식 (33)에 기술한 위상 차에서는 근의 공식에서 도출된 사이값을 가져야 수렴을 보장한다는 것이다. 이 식은 주파수에 따라 학습 필터와 플랜트 사이의 크기와 위상의 상관 관계를 나타낸다. 한편 위 식에서 만약, $|P|$ 와 $|Q\hat{T}|$ 를 미리 안다면 그 때 반복 학습 제어기가 수렴하도록 하는 P 와 $Q\hat{T}$ 의 위상을 알 수 있다. 이제 $|\hat{T}|$ 의 크기를 그것의 바운딩 함수로 근사화하면

$$|\hat{T}(s)| = |T(s)(1 + \mathcal{L}_2 W_2(s))| \leq |T(s)||1 + W_2(s)|, \forall \omega \quad (34)$$

이고 이것으로부터 $\cos(\phi_{PQ\hat{T}})$ 가 양의 값을 갖는 범위는 다

음과 같이 주어진다.

$$\phi_{PQ\hat{T}} > \cos^{-1}\left(\frac{|Q\hat{T}|^2 + |P|^2 - 1}{2|P||Q\hat{T}|}\right), \forall \omega \quad (35)$$

이 식으로부터 학습 필터 $Q(s)$ 와 모델링 불확실성의 크기가 주어졌을 경우 수렴 조건을 만족하게 하는 학습 필터와 플랜트 간의 위상 관계를 계산할 수 있다.

5. 시뮬레이션 예제

본 논문에서 제안한 반복 학습 제어 시스템의 강인성 해석과 설계 지침에 의거한 설계 예를 다음과 같은 단일 입력, 단일 출력 플랜트에 적용하여 보인다. 제어 대상 플랜트의 공칭 페루프 전달 함수 및 모델링 불확실성을 각각 다음과 같다고 하자.

$$T(s) = \frac{2.0822 \times 10^5}{s^2 + 6.2795 \times 10^3 s + 2.0822 \times 10^5}, |W_2| \leq \frac{4s}{s+100} \quad (36)$$

한편 실제 플랜트는 다음과 같이 모델링 된다고 가정하자.

$$\hat{T}(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \quad (37)$$

여기서,

$$\begin{aligned} n(s) &= 9.3901 \times 10^3 s^4 + 3.4299 \times 10^7 s^3 + 1.4792 \times 10^9 s^2 \\ &\quad + 6.1486 \times 10^{11} s + 2.0342 \times 10^{13} \\ d(s) &= s^7 + 9.6213 s^6 + 4.7247 \times 10^4 s^5 + 3.287 \times 10^6 s^4 \\ &\quad + 6.0401 \times 10^8 s^3 + 2.8584 \times 10^{10} s^2 + 1.4377 \times 10^{12} s + 2.0342 \times 10^{13} \end{aligned}$$

이다. 이 플랜트는 사실 turning machine을 초정밀 피드 구동 시스템(high precision feed drive system)의 페루프 전달 함수이다. 이제 전절에서 보인 바와 같이 공칭 모델에 기반하여 반복 학습 제어기를 다음과 같이 설계한다고 하자. 만약 학습 필터를 다음과 같이 선택하면,

$$P(s) = \frac{100 \times 25^2}{(s+25)^2(s+100)}, q(s) = T_0^{-1}(s), J(s) = \frac{25^2}{(s+25)^2}$$

이 경우에 반복 학습 제어 입력이 인가되지 않았을 경우의 오차 출력과 반복 학습 제어기가 연결되어 수렴에 도달하였을 경우의 오차 출력이 그림 2에 나타나 있다. 원하는 제어 경로에 대하여 반복 학습 제어기가 인가됨으로써 오차의 크기를 크게 줄일 수 있음을 알 수 있다. 그림 3은 오차 신호가 반복 횟수에 따라 수렴하는 것을 보여준다. 한편 제안된 반복 학습 제어기가 불확실성(W_2)의 바운딩 함수에 대하여 수렴 조건을 만족하는지의 여부는 정리 2를 이용하여 알 수 있다. 즉, 주파수에 따른 수렴을 보장하는 불확실성의 상한과 W_2 의 바운딩 함수의 크기가 그림 4에 나타나 있다. 한편 그림 5는 반복 학습 제어기의 수렴을 보장하는 $|Q\hat{T}|$ 의 크기와 위상 특성을 나타낸다. 즉, 상한선과 하한선 사이에 $|Q\hat{T}|$ 가 존재함으로써 이 경우 반복 학습 제어기가 수렴할 것이라는 것을 알 수 있다. 또한

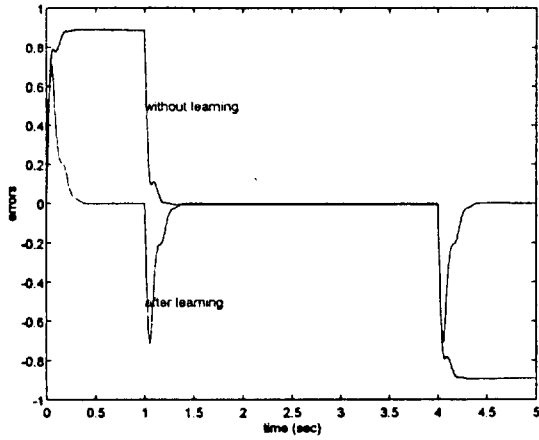


그림 2 학습 제어가 없을 때 및 학습이 끝난 후의 오차 신호
 Fig. 2 The error signals with and without learning control

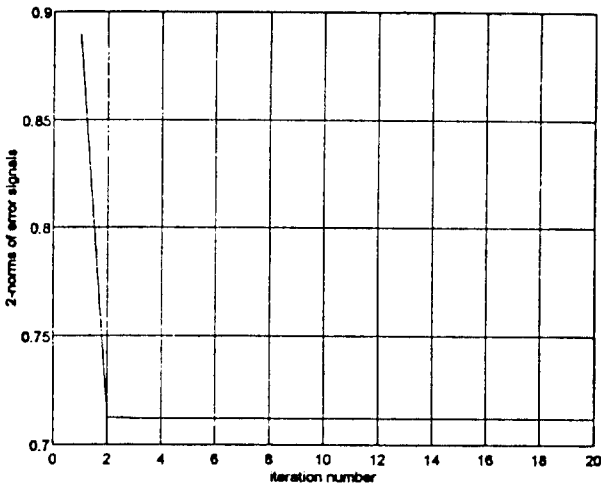


그림 3 반복 시행에 따른 오차 신호의 rms 값의 변화
 Fig. 3 The variation of rms values of error signal with iterative trial

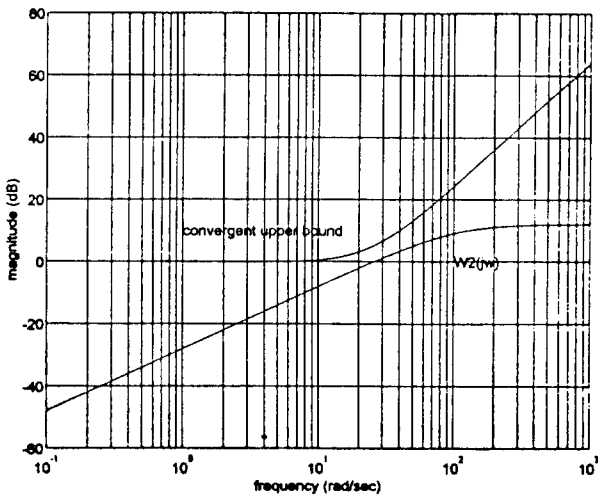


그림 4 주파수에 따른 수렴을 보장하는 불확실성의 크기
 Fig. 4 The magnitude of uncertainty guaranteeing the convergence of ILCS

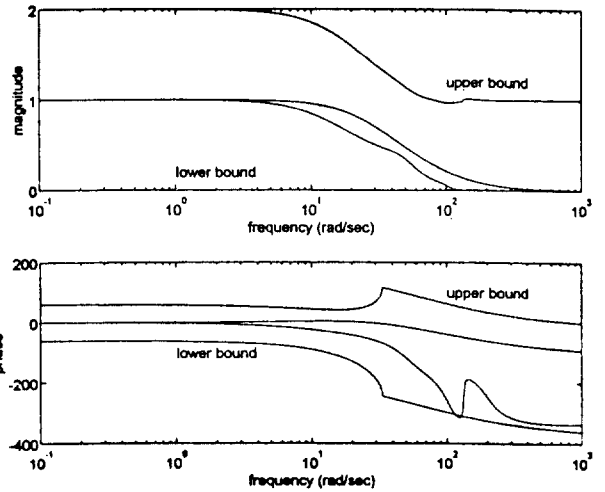


그림 5 주파수에 따른 수렴을 보장하는 불확실성의 크기 및 위상 특성
 Fig. 5 The magnitude and phase of uncertainty guaranteeing convergence of ILCS

불확실성의 크기의 상한을 W_2 의 바운딩 함수로 가정할 경우 제안된 반복 학습 제어가 수렴하기 위한 플랜트 \hat{T} 의 위상의 범위를 표시한다.

6. 결 론

본 논문에서는 주파수 영역에서 반복 학습 제어기와 궤환 제어기 및 플랜트로 구성되는 반복 학습 제어 시스템에 대하여 원하는 제어 궤적을 반복적으로 변경하는 궤적 변경 반복 학습 제어 시스템에 대하여 고려하였다. 이러한 구조는 궤환 제어를 포함한 페루프 시스템을 하나의 플랜트로 가정하여 이 페루프 시스템에 대하여 모델링 불확실성을 고려한 반복 학습 제어기의 수렴성과 성능 분석을 가능하게 해 준다. 또한, 기존의 시간 영역에서의 해석이 λ 노음과 같은 특별한 형태의 노음에 근간하여 부동식 조건으로 얻어지는 수렴 조건을 제시하고, 주로 시스템 외란에 대한 알고리즘의 강인성을 분석한 반면 본 연구에서는 주파수 영역의 해석을 기반으로 여러 가지 물리적 감각을 얻을 수 있으며 L_2 노음의 의미에서 수렴성을 해석하고 모델링 불확실성의 영향을 고려할 수 있었다. 이를 위하여 먼저 공칭 페루프 전달 함수에 기반한 반복 학습 제어기의 체계적인 설계 방법을 보였다. 또한, 공칭 모델에 기반하여 설계된 반복 학습 제어가 수렴할 수 있는 모델링 불확실성의 범위를 구조적인 경우와 비구조적인 경우로 구분하여 해석하였고, 특히 플랜트에 위상 지연이 존재하는 경우에 대하여 플랜트의 위상 특성과 각 학습 필터간의 상관 관계에 대하여 분석하였다. 이러한 주파수 영역에서의 해석은 반복 학습 제어기의 설계에 있어 새로운 직관을 제공하고 보다 현실감 있는 설계를 가능하게 한다.

참 고 문 헌

[1] S. Arimoto, S. Kawamura, and F. Miyazaki, "Bettering operation of robots by learning," *Jour. of Robotic Systems*,

- vol. 1, pp. 123-140, 1985
- [2] J. J. Craig, *Adaptive Control of Mechanical Manipulators*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1988
 - [3] K. L. Moore, M. Dahleh, and S. P. Bhattacharyya, "Iterative learning for trajectory control," *Proc. of the 28th Conf. on Decision and Control*, Austin, TX. pp. 586-591, 1989
 - [4] A. D. Luca, G. Paesano, and G. Ulivi, "A frequency-domain approach to learning control : Implementation for a robot manipulator," *IEEE trans. on Industrial Electronics*, 39(1), 1992
 - [5] T. Kavli, "Frequency domain synthesis of trajectory learning controllers for robot manipulators," *Jour. of Robotic Systems*, 9(5), pp. 663-680, 1992
 - [6] G. Heinzinger, P. Fenwick, B. Paden, and F. Miyazaki, "Stability of learning control with disturbances and uncertain initial conditions," *IEEE trans. on Automatic Control*, vol. 37, No. 1, pp. 110-114, 1992
 - [7] S. Hara, Y. Yamamoto, T. Omata, and M. Nakano, "Repetitive control system : A new type servo system for periodic exogenous signals," *IEEE trans. Automatic Control*, vol. 33, No. 7, pp. 659-668, 1988
 - [8] K. Yamada, K. Watanabe, M. Tsuchiya, and T. Kaneko, "Robust control design for repetitive control systems with filtered inverse," *Proc. of the Asian Control Conference*, pp. 243-246, 1994
 - [9] S. Hara, P. Trannitad, and Y. Chen, "Robust stabilization for repetitive control systems," *Proc. of the Asian Control Conference*, pp. 541-544, 1994
 - [10] G. Curtelin, B. Caron, and H. Saari, "Analysis of repetitive control system robustness," *IEEE conf. on System, Man, and Cybernetics*, pp. 2663-2668, 1994
 - [11] J. C. Doyle, B. A. Francis, and A. R. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company, New York, 1992
 - [12] T. Manabe, and F. Miyazaki, "Learning Control based on local linearization by using DFT," *Jour. of Robotic Systems*, vol. 11, pp. 129-141, 1994
 - [13] H. Chapellat, M. Dahleh, and S. P. Bhattacharyya, "Robust stability under structured and unstructured perturbations," *IEEE trans. on Automatic Control*, vol. 35, No. 10, 1990

저 자 소 개



노철래 (盧喆來)

1967년 4월 25일생. 1989년 고려대 공대 전기공학과 졸업. 1991년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(석사). 1996년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업예정(공학박)



정명진 (鄭明振)

1950년 1월 31일생. 1973년 서울대학교 공과대학 전기공학과 졸업. 1977년 미국 미시간대학교 ECE졸업. 1983년 동 대학원 CICE졸업(공학박). 1976년 국방과학연구소 연구원. 1981~1983년 미시간 대학교 CRIM연구조교. 1983

년~현재 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 교수