이산 시간 스위칭 다이나믹을 이용한 새로운 슬라이딩 모드 제어 시스템의 설계 및 안정도 해석

論 文
45~3~12

Design of New Sliding Mode Control System Using Discrete-time Switching Dynamics and Its Stability Analysis

金 東 植* · 徐 浩 準** · 徐 三 峻** · 朴 貴 泰***
(Dong-Sik Kim · Ho-Joon Seo · Sam-Jun Seo · Gwi-Tae Park)

Abstract - In this paper we consider the variable structure control for a class of discrete-time uncertain multivariable systems where the nominal system is linear. Discrete-time switching dynamics are introduced so that a new type of state trajectories called sliding mode may exist on the sliding surface by state feedback. The quantitative analysis for the matched uncertainties will show that every response of the system with the proposed switching dynamics is bounded within small neighborhoods of the state-space origin. Also, by the similarity transformation it will be shown that the eigenvalues of the closed-loop systems are composed of those of the subsystems which govern the range-space dynamics and null-space dynamics. It will be also shown that ideal sliding mode can be obtained in the absence of uncertainties due to one-step attraction to the sliding surface regardless of initial position of states.

Key Words : Discrete-time Switching dynamics, Sliding Mode Control, Similarity Transfor-mation, Range-Space Dynamics, Null-Space Dynamics

1. 서 론

1950년대 초부터 소련에서 연구되어 온 슬라이딩 모드 제어 (Sliding Mode Control) 이론은, 기존의 다른 제어 이론들과는 달리 불확실성을 갖는 계통에 대해서 계통의 파라미터를 추정하지 않고, 확정적인 방법에 의해 효과적으로 제어할 수 있다는 특성 때문에, 현재에 이르기까지 꾸준히 연구가 진행 되어 오고 있는 추세이다[1~3]. 특히, 이 이론은 다른 제어 기법에 비해 물리적인 실현이 간단하여 실시간 제어에 유리하다는 장점 때문에, 비선형성이 강한 로보트 매니퓰레이터나 인공위성과 같은 첨단 계통의 제어에 광범위하게 적용되고 있으며, 주목할 만한 많은 결과가 발표되고 있다[4~6].

그런데, 최근까지 연구되어 온 슬라이딩 모드 제어 이론의 주된 연구 분야는 연속 시간 시스템에 한정된 것으로, 이 이론을 마이크로 프로세서를 이용하여 물리적으로 실현하기 위해서는 우선적으로 기존의 연속 시간 시스템에 대한 슬라이딩 모드 제어 이론을 이산 시간 시스템으로 확장할 필요가 있다. 이에 1985년 Milosaljevic [7] 이 이산 시간 슬라이딩 모드 제어 이론을 처음 제안한 후 Sarpturk [8], Furuta [9], Zak [10] 등에 의해 이 분야의 연구가 진행되어 왔다. 이중에서 해석적인 측면에서 보다 심도 있게 접근한 Zak은 불확실한 이산치 다변수 계통에 있어서 계통의 불확실성이 계통의 상태 벡터에 미치는 영향에 대해 처음으로 정량적인 해석을 시도하였다. 그는 이산치 슬라이딩 모드 제어기의 안정도 영역 (Stability Region)을 결정하기 위해 상태 벡터의 유클리디안 Norm을 이용하여 상태 벡터가 제한되는 영역을 수학적으로 계산하였다.

그러나 지금까지 진행된 이들의 연구는 입력 항에 파라미터 변동이 존재하지 않아야 한다는 제약 조건을 가지고 있다. 이러한 제약 조건은 실제로는 만족되기 어려운 엄격한 조건이므로 보다 일반적인 상황을 고려하여 입력 항에도 파라미터 변동이 존재하는 불확실한 이산치 다변수 시스템에 있어서 보다 더 견실한 제어기의 설계가 절실히 요구된다.

따라서, 본 논문에서는 제어 시스템의 물리적 실현이라는 실제적인 측면을 고려하여, 슬라이딩 모드 제어 이론을 불확실한 이산 시간 다변수 시스템으로 확장하기 위하여 이산 시간 스위칭 다이나믹의 개념을 도입하였다. 본 연구에서 제안된 이산 시간 슬라이딩 모드 제어 알고리즘은 연속 시간 슬라이딩 모드 제어 알고리즘과 마찬가지로 m 개의 빠른 부시스템의 고유치 및 n-m 개의 느린 부시스템의 고유치를 설계자가 임의로 설정하여 항상 안정도를 보장받을 수 있는 장점이 있다. 특히, 시스템 파라미터 변동이나 외란이 존재하지 않는 공칭 시스템에 대해서는 제안된 이산 시간 슬라이딩 모드 제어기에 의해 상태 벡터의 초기 위치에 관계없이 언제나 한 스텝만에 상태 벡터들을 스위칭 평면으로 가져올 수 있게 되어 이상적인 슬라이딩 모드라는 독특한 특성을 얻을 수 있다. 또한 이산 시간 스위칭 다이나믹을 공칭 시스템에 적용하여 얻어진 전체 폐루프 시스템을 적당한 정칙 변환에 의해 빠른 부시스템과 느린 부시스템으로 분해하여, 전체 폐루프 시스템의 고유치가 스위칭 표면 행렬의 Range-Space 와 Null-Space 의 동특성을 지배하는 각 부시스템들의 고유치들로 구성된다는 것을 증명하였다.

그리고 시스템 파라미터 변동이나 외란이 제안된 이산 시간 스위칭 다이나믹에 의해 구성된 전체 제어 시스템의 응답 특성

*正 會 員 : 順天鄕大 工大 制御計測工學科 助敎授 · 工博
**正 會 員 : 高麗大 工大 電氣工學科 博士課程 修了
***正 會 員 : 高麗大 工大 電氣工學科 敎授 · 工博
接受日字 : 1994年 10月 10日
最終完了 : 1996年 2月 5日

에 어떠한 영향을 미치는가를 고찰하기 위해 유사 변환(Similarity Transformation)을 이용하여 불확실한 시스템을 새로운 상태 공간 모델로 변환하여 그 해의 Norm이 유계(Bound)된다는 것을 증명하였다.

2. 이산 시간 슬라이딩 모드 제어

2.1 시스템 표현 및 기본 정의

일반적으로 불확실성을 가진 이산 시간 다변수 시스템은 다음과 같은 상태 공간 모델로 표현할 수 있다.

$$X_{k+1}=[A+\triangle A(q_k)]X_k+[B+\triangle B(q_k)]U_k+Fv_k$$
$$X_{ko}=X_o \tag{1}$$

여기서 $X_k\in R^n$ 와 $U_k\in R^m$ 는 각각 상태 및 입력 벡터이며 $v_k\in R^p$ 는 외란 벡터이다. 또한 $n>m$ 이고 B 는 Full Rank 를 가지며 [A:B] 쌍은 완전 가제어하다고 가정한다. 행렬 ΔA 는 시스템 파라미터의 불확실성을 나타내며 ΔB 는 시스템과 제어 입력 사이의 불확실성을 나타낸다. 벡터 q_k 는 각각 행렬 A 와 B 에 대한 불확실한 파라미터 벡터를 나타낸다.

식 (1)로 표현되는 불확실한 이산 시간 다변수 시스템에 대해 슬라이딩 모드 제어 이론을 전개하기 위해서는 다음과 같은 가정이 필요하다.

■ 가 정 1 구조적 정합 조건(Structure Matching Condition)

다음의 관계식을 만족하는 행렬 함수 $T(q_k)\in R^{mxn}$ 와 행렬 $D(q_k)\in R^{mxm}$ 가 존재한다.

$$\triangle A(q_k)=B\ T(q_k)$$
$$\triangle B(q_k)=B\ D(q_k) \tag{2}$$
$$F=B\ H$$

가정 1 과 식 (3)으로 정의되는 벡터 $\eta_k(q_k,X_k,U_k,v_k)$ 를 이용하면 식 (1)은 식 (4)와 같은 Lumped 된 시스템으로 간단히 표현된다.

$$\eta_k(q_k,X_k,U_k,v_k)=T(q_k)X_k+D(q_k)U_k+Hv_k \tag{3}$$

$$X_{k+1}=AX_k+BU_k+B\eta_k(q_k,X_k,U_k,v_k)$$
$$X_{ko}=X_o \tag{4}$$

$\eta_k(q_k,X_k,U_k,v_k)=0$ 인 경우, 즉 파라미터 변동이나 외란이 존재하지 않는 경우에 식 (4)는 다음과 같은 공칭 시스템(Nominal System)으로 표현될 수 있다.

$$X_{k+1}=AX_k+BU_k \tag{5}$$

■ 가 정 2 다음을 만족하는 양의 상수 η_{max} 가 존재한다.

$$\|\eta_k(q_k,X_k,U_k,v_k)\|\le\eta_{max} \tag{6}$$

여기서 $\|\ \|$ 는 유클리디안 Norm 을 표시한다.

식 (1)의 시스템이 가정 1 과 가정 2 를 만족할 때 슬라이딩 모드 제어 이론을 적용하기 위해서는 다음의 두 단계가 필요하다.

(1) 제어하고자 하는 시스템이 슬라이딩 모드시에 미리 정해진 성질을 가지도록 하는 스위칭 평면을 설계한다.

(2) 시스템의 상태 벡터들이 스위칭 평면상에 도달하여 계속해서 그곳에 머무르도록 하는 제어 입력을 구성한다.

다음절에서는 먼저 이산 시간 슬라이딩 모드 제어 이론에서의 이상적인 슬라이딩 모드를 정의하고 이에 대한 존재 조건에 대해 기술한다.

2.2 이상적인 슬라이딩 모드의 정의 및 존재 조건

이산 시간 다변수 시스템에 대한 스위칭 평면을 다음과 같이 정의한다.

$$S_k=GX_k=0,\ G\in R^{mxn},\ S_k\in R^m \tag{7}$$

이 경우 식 (5)의 공칭 시스템에 대해 임의의 시간 k_r 에 시스템의 상태가 스위칭 평면에 도달하고, $k\ge k_r$ 에서 슬라이딩 모드가 존재한다고 하자. 여기서 슬라이딩 모드가 존재한다는 것은 상태 벡터들이 $k\ge k_r$ 인 시간에 대하여 스위칭 평면 위에 머무른다는 뜻이므로 항상 다음의 관계가 성립한다.

$$S_k=0 \tag{8a}$$

$$\triangle S_k=S_{k+1}-S_k=0 \qquad \forall k\ge k_r \tag{8b}$$

즉,

$$S_k=S_{k+1}=S_{k+2}=\cdots=0 \qquad \forall k\ge k_r \tag{8c}$$

그러나 식 (8)은 이상적인 슬라이딩 모드의 존재 조건이며, 실제로 $S_k=0$ 위에 슬라이딩 모드를 발생시키기 위한 필요 충분 조건은 다음과 같다 [9].

$$\|S_{k+1}\|<\|S_k\| \tag{9}$$

식 (9)가 나타내는 의미는 (k+1)번째 스텝에서의 S 의 유클리디안 Norm이 그 전 스텝인 k 번째에서의 S 의 유클리디안 Norm보다 클 수 없다는 뜻이다. 그림 1에 식 (9)가 나타내는 의미를 그림으로 도시하였다.

그림 1에서 만일 S_k 가 초기에 A 점에 놓여 있다면 그 다음 스텝에서의 S_{k+1} 은 식 (9)의 조건에 의해 S_k 의 유클리디안 Norm 보다 작은 영역인 C 점에 놓이게 된다. 마찬가지 이유에 의해서 C 점의 S_{k+1} 은 다음 단계에서는 S_{k+1} 의 유클리디안 Norm 보다 작은 영역인 D 점에 놓이게 된다. 따라서 이와 같은 과정을 계속 반복하게 되면 상태 궤적들은 점점 더 작은 Chattering 을 일으키면서 원점으로 수렴하게 된다. 여기서 상태 궤적이 원점으로 진행하는 이유는 뒤에서 언급하게 될 이산 시간 다변수 시스템에 대한 등가 시스템이 안정하도록 스위칭 표면 행렬 G 를 선정하기 때문이다.

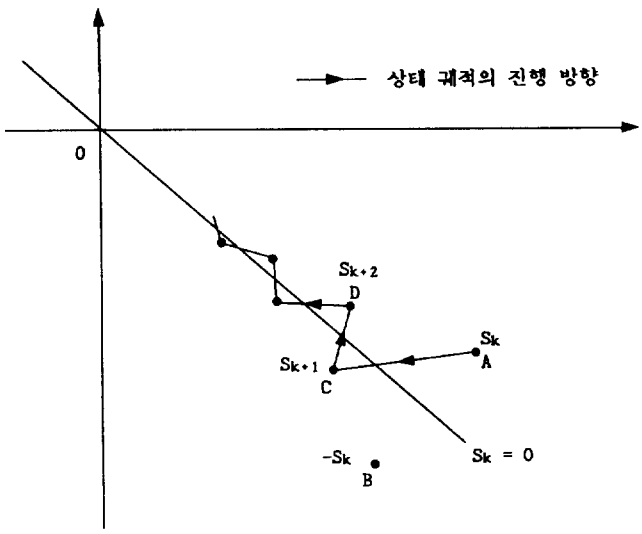

그림 1 이산 시간 가변 구조 시스템의 슬라이딩 모드 조건
Fig. 1 Sliding mode conditions for discrete-time variable structure control systems

식 (9)의 조건을 좀더 간단한 형태로 달리 표현하기 위해 Lyapunov 함수 $V(S_k)$ 와 그의 차분값 $\Delta V(S_k)$를 각각 다음과 같이 정의한다.

$$V(S_k)=S_k^TS_k \tag{10}$$

$$\triangle V(S_k)=V(S_{k+1})-V(S_k) \tag{11}$$

식 (11)로 표현된 차분값 $\Delta V(S_k)$ 를 식 (10)을 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\triangle V(S_k)&=V(S_{k+1})-V(S_k)\\&=S_{k+1}^TS_{k+1}-S_k^TS_k\\&=\|S_{k+1}\|^2-\|S_k\|^2\\&=(\|S_{k+1}\|+\|S_k\|)(\|S_{k+1}\|-\|S_k\|)\end{aligned} \tag{12}$$

결국 식 (12)로부터 식 (9)의 조건이 만족되도록 제어 입력을 결정하는 문제는 식(12)에서 Lyapunov 함수의 차분값 $\Delta V(S_k)$ 가 음의 값이 되도록 제어 입력을 결정하는 것과 동치이다. 따라서, 앞으로는 슬라이딩 모드의 존재를 보장하는 제어기 설계에 있어서 계산상의 편리성 때문에 주로 식 (10)과 식 (11)을 이용하게 될 것이다.

다음 절에서는 이산 시간 다변수 시스템에 대한 슬라이딩 모드 방정식 및 스위칭 평면의 설계에 대해 언급한다.

2.3 이상적인 슬라이딩 모드의 해석 및 스위칭 평면 설계

앞 절에서의 이상적인 슬라이딩 모드의 존재 조건으로부터 다음의 관계가 성립한다.

$$S_{k+1}=GAX_k+GBU_{keq}=GX_k=S_k \tag{13}$$

윗 식으로부터 이산 시간 다변수 시스템에 대한 등가 제어 입력이 다음과 같이 결정된다.

$$U_{keq}=-(GB)^{-1}G(A-I)X_k \tag{14}$$

따라서 식 (14)를 식 (5)의 공칭 시스템에 대입하여 정리하면 다음과 같은 등가 시스템이 얻어진다.

$$\begin{aligned}&X_{k+1}=[A-B(GB)^{-1}G(A-I)]X_k=A_{eq}X_k\\&X_{ko}=X_o\end{aligned} \tag{15}$$

$P=B(GB)^{-1}G$ 라 정의하면 식 (15)는 다음과 같이 표현된다.

$$X_{k+1}=[(I-P)A+P]X_k=A_{eq}X_k \tag{16}$$

이상으로 등가 제어 입력에 의한 이산 시간 다변수 시스템의 슬라이딩 모드에 대해 해석하였고, 다음은 설계자가 원하는 특성을 가지는 스위칭 평면의 설계에 대해 고찰한다.

식 (15)로부터 $K = (GB)^{-1}G(A-I)$ 로 정의하면 다음의 관계식이 성립한다.

$$X_{k+1}=AX_k-BKX_k=(A-BK)X_k \tag{17}$$

식 (17)로부터 스위칭 평면을 설계하기 위해서는 슬라이딩 모드시에 전체 폐루프 시스템이 안정하도록 궤환 이득 K 를 A-BK 의 n-m 개의 고유치 $\{\lambda_1\ \lambda_2\ \cdots\ \lambda_{n-m}\}$ 가 복소 평면의 단위원 내부에 위치하도록 선정하면 된다. 구체적인 설계 과정은 참고문헌[11]에서의 전개 과정과 동일하므로 여기서는 생략하기로 한다.

3. 제안된 이산 시간 스위칭 다이나믹을 이용한 새로운 슬라이딩 모드 제어

본 절에서는 슬라이딩 모드의 존재를 보장하는 이산 시간 스위칭 다이나믹(Discrete-time Switching Dynamics : DSD)을 제안하여 불확실한 이산 시간 다변수 시스템에 확장 적용하였다.

3.1 이산 시간 스위칭 다이나믹의 동특성

식 (1)과 같이 표현되는 불확실한 이산 시간 다변수 시스템에 대해 고찰한다. 식 (1)이 가정 1 의 구조적 정합 조건을 만족한다면 식 (4) 와 같이 간단히 표현될 수 있다.

식 (4)로 표현되는 시스템에 대하여 항상 슬라이딩 모드의 존재를 보장받기 위해서는 앞 절에서와 동일하게 식 (10)으로 표현되는 Lyapunov 함수 $V(S_k)$ 를 정의하여 그 차분값이 항상 음이 되도록 만들어 주면 된다.

식 (4)에서 정의한 Lyapunov 함수의 차분값 $\Delta V(S_k)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\triangle V(S_k)&=V(S_{k+1})-V(S_k)\\&=S_{k+1}^TS_{k+1}-S_k^TS_k\end{aligned} \tag{18}$$

식 (18)의 우변은, 만일 다음의 관계가 항상 만족되도록 할 수 있다면, 음의 값이 됨을 보장할 수 있다.

$$\triangle S_k = S_{k+1} - S_k = -\Gamma S_k \tag{19a}$$

여기서 Γ = diag($\gamma_1\ \gamma_2 \cdots \gamma_m$) 로 정의되는 대각 행렬이며 각 원소들은 0 과 2 사이의 값을 가지도록 선정한다.

식 (19a)는 1 차 차분 방정식(Difference Equation)으로 그 해는 다음과 같이 표현된다.

$$S_k = (I-\Gamma)^{k-k_o} S_o \qquad \forall k \geq k_o \tag{19b}$$

$$S_o = S_{ko} = GX_{ko} \tag{19c}$$

식 (19b)에서 행렬 I-Γ의 i 번째 대각 원소 $1-\gamma_i$ 의 절대값을 1 보다 작게 선정한다면 S_k 는 지수 함수적으로 0 에 접근하게 되며, 그 수렴 속도는 Γ에 의해 결정된다. 식 (19)로 정의된 관계식을 이산 시간 스위칭 다이나믹이라 부르기로 한다.

식 (19)의 관계를 식 (18)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\triangle V(S_k) &= S_{k+1}^T S_{k+1} - S_k^T S_k \\ &= S_k^T (I-\Gamma)^2 S_k - S_k^T S_k \\ &= S_k^T (\Gamma^2 - 2\Gamma) s_k \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\gamma_i^2 - 2\gamma_i) S_{ki}^2 < 0\end{aligned} \tag{20}$$

여기서 S_{ki} 는 S_k 의 i 번째 성분을 나타낸다.

식 (20)이 항상 음의 값이 되기 위해서는 Γ 를 다음의 조건이 만족되도록 선정해야 한다.

$$0 < \gamma_i < 2 \tag{21}$$

이산 시간 스위칭 다이나믹에서는 행렬 Γ 의 원소를 식 (21)이 만족되도록 선정해야 한다는 것에 주목할 필요가 있다. 다음 절에서는 식 (19)로 정의되는 제안된 이산 시간 스위칭 다이나믹의 관계가 항상 만족되도록 하는 슬라이딩 모드 제어기를 설계하는 방법에 대해 고찰한다.

3.2 슬라이딩 모드 제어 시스템의 설계

먼저 식 (1)로 표현되는 불확실한 이산 시간 다변수 시스템에 대한 공칭 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}X_{k+1} &= AX_k + BU_k \\ X_{ko} &= X_o\end{aligned} \tag{22}$$

식 (22)로 표현되는 공칭 시스템에 식 (19a)의 관계를 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\triangle S_k &= S_{k+1} - S_k \\ &= GAX_k + GBU_k - GX_k = -\Gamma S_k\end{aligned} \tag{23}$$

식 (23)을 제어 입력 U_k 에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}U_k &= -(GB)^{-1}[G(A-I)X_k + \Gamma S_k] \\ &= U_{keq} + U_{ksd}\end{aligned} \tag{24}$$

여기서 U_{keq} 와 U_{ksd} 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$U_{ksq} = -(GB)^{-1} G(A-I)X_k \tag{25}$$

$$U_{ksd} = -(GB)^{-1}\Gamma S_k \tag{26}$$

따라서, 식 (24)로 정의된 제어 입력 U_k 를 식 (22)의 공칭 시스템에 인가하면 항상 슬라이딩 모드를 얻을 수 있다.

특별한 경우로써 식 (24)에서 Γ 를 단위 행렬 I_m 으로 선정한다면 제어 입력은 다음과 같이 표현된다.

$$U_k = -(GB)^{-1} GAX_k \tag{27}$$

위의 제어 입력을 이용하여 S_{k+1} 을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}S_{k+1} &= GAX_k + GBU_k \\ &= GAX_k - (GB)(GB)^{-1} GAX_k = 0\end{aligned} \tag{28}$$

결국, 식 (28)의 결과는 상태 벡터의 초기 위치 X_o 가 상태 공간의 어디에 위치하든지에 관계없이, 언제나 한 스텝만에 상태 벡터를 스위칭 평면으로 가져올 수 있으므로 이상적인 슬라이딩 모드를 얻을 수 있음을 의미한다. 이를 2차 시스템에 대해 그림으로 도시하면 그림 2와 같다.

다음으로는 이산 시간 스위칭 다이나믹을 공칭 시스템에 적용하여 얻어진 전체 폐루프 시스템 동특성을 해석함으로써 슬라이딩 모드가 항상 안정함을 증명하기로 한다.

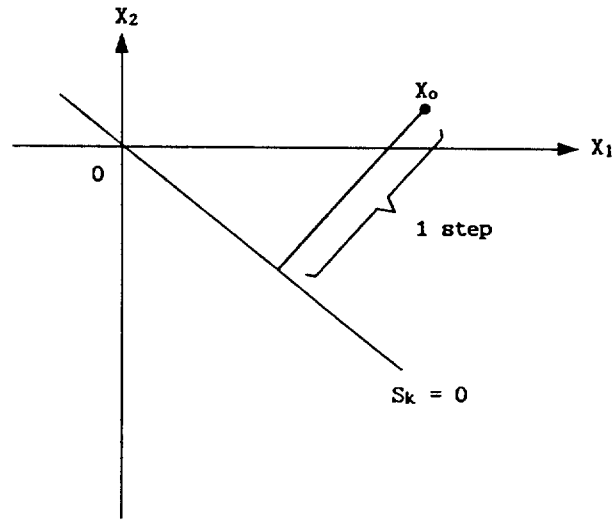

그림 2 이산 시간 스위칭 다이나믹스에 의한 이상적인 슬라이딩 모드

Fig. 2 Ideal sliding modes via the discrete-time switching dynamics

먼저 식 (24)의 제어 입력을 식 (22)의 공칭 시스템에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$X_{k+1}=[A-B(GB)^{-1}G(A-I) \\ -B(GB)^{-1}\Gamma G]X_k=A_cX_k \tag{29a}$$

여기서 A_c 는 다음과 같이 정의된다.

$$A_c=A-B(GB)^{-1}G(A-I)-B(GB)^{-1}\Gamma G \tag{29b}$$

■ 정 리 1 식 (22)의 공칭 시스템에 식 (24)의 제어 입력을 인가하면 식 (29)로 결정되는 폐루프 시스템의 고유치는 다음과 같이 결정된다.

$$\sigma(A_c)=\{\ \lambda;\det(\lambda I_{n-m}-J)\det(\lambda I_m-I_m+\Gamma)=0\ \} \tag{30}$$

여기서 $\sigma(A_c)$ 는 행렬 A_c 의 스펙트럼을 나타내며 $J\in R^{(n-m)x(n-m)}$ 는 Jordan 행렬이며 $\Gamma\in R^{mxm}$ 은 식 (21)과 같이 결정되는 대각 행렬이다.

☞ 증 명

폐루프 시스템인 식 (29)를 식 (31)과 같은 정칙 변환 행렬 M 를 이용하여 새로운 좌표계로 변환한다.

$$M=\begin{bmatrix} W^g \\ \cdots\cdots \\ G \end{bmatrix} \tag{31}$$

여기서, $W\in R^{nx(n-m)}$ 는 A_{eq} 의 고유 벡터로 구성되는 행렬이며 W^g 는 W 의 유사 역행렬 , $G\in R^{mxn}$ 는 스위칭 표면 행렬이다.

M 의 역행렬을 구하기 위해 다음과 같이 R_1 과 R_2 로 구성된 행렬 M^{-1} 를 정의한다.

$$(M)^{-1}=[R_1:R_2] \tag{32}$$

$M(M)^{-1}=I_n$ 의 관계식으로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$M(M)^{-1}=\begin{bmatrix} W^g \\ \cdots\cdots \\ G \end{bmatrix}[R_1:R_2] =\begin{bmatrix} W^gR_1 & \vdots & W^gR_2 \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ GR_1 & \vdots & GR_2 \end{bmatrix} \tag{33}$$

식 (33) 은 단위 행렬이 되어야 하므로 다음의 관계가 성립한다.

$$W^gR_1=I_{n-m} \tag{34}$$

$$W^gR_2=0 \tag{35}$$

$$GR_1=0 \tag{36}$$

$$GR_2=I_m \tag{37}$$

위의 관계식이 항상 만족되도록 R_1 와 R_2 를 결정하면 다음과 같다.

$$R_1=W \tag{38a}$$

$$R_2=B \tag{38b}$$

그러므로, M 의 역행렬은 다음과 같이 결정된다.

$$(M)^{-1}=[W:B] \tag{39}$$

정칙 변환 행렬 M 에 의해 상태 공간의 기저 벡터(Basis) 를 다음과 같이 정의한다.

$$X_k^{NEW}=M\ X_k \tag{40}$$

위의 정칙 변환을 이용하여 폐루프 시스템 식 (29)를 새로운 좌표계로 다시 표현하면 다음과 같다.

$$X_{k+1}^{NEW}=M[A-B(GB)^{-1}G(A-I)-B(GB)^{-1}\Gamma G](M)^{-1}X_k^{NEW} \\ =\begin{bmatrix} {}^{NEW}A_c(1,1) & : & {}^{NEW}A_c(1,2) \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ {}^{NEW}A_c(2,1) & : & {}^{NEW}A_c(2,2) \end{bmatrix} X_k^{NEW} \tag{41}$$

여기서 ${}^{NEW}A_c(i,j)$, i, j=1, 2 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$${}^{NEW}A_{c(1,1)}=W^g[A-B(GB)^{-1}G(A-I)-B(GB)^{-1}\Gamma G]W \tag{42}$$

$${}^{NEW}A_c(1,2)=W^g[A-B(GB)^{-1}G(A-I)-B(GB)^{-1}\Gamma G]B \tag{43}$$

$${}^{NEW}A_c(2,1)=G[A-B(GB)^{-1}G(A-I)-B(GB)^{-1}\Gamma G]W \tag{44}$$

$${}^{NEW}A_c(2,2)=G[A-B(GB)^{-1}G(A-I)-B(GB)^{-1}\Gamma G]B \tag{45}$$

유사 역행렬의 정의와 식 (34) - 식 (37)을 이용하면 식 (29)의 폐루프 시스템은 새로운 좌표계에서 다음과 같은 단순화된 상태 공간 모델로 표현된다.

$$X_{k+1}^{NEW}=\begin{bmatrix} W^gAW & : & W^gAB \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ 0 & : & I-\Gamma \end{bmatrix} X_k^{NEW} \tag{46}$$

따라서, 폐루프 시스템의 고유치는 식 (46)으로부터 다음과 같이 결정된다.

$$\det(\lambda I_{n-m} - W^{g}AW)\det(\lambda I_m - I_m + \Gamma') = 0 \tag{47}$$

한편, $W^{g}AW = J$ 가 성립하므로, 결국 폐루프 시스템의 고유치는 다음과 같이 결정된다.

$$\det(\lambda I_{n-m} - J)\det(\lambda I_m - I_m + \Gamma) = 0 \tag{48}$$

증 명 끝 ■

따라서, 전체 폐루프 시스템의 고유치는 G 의 Null-space 의 동특성을 결정하는 Jordan 행렬 J 와 G 의 Range-space 동특성을 결정하는 대각 행렬 Γ'에 의해 결정됨을 알 수 있다. J 와 Γ' 는 설계자가 임의로 선정하는 설계 인자이므로 전체 폐루프 시스템의 안정도는 항상 보장받을 수 있다. 설계상 G 의 Range-space 동특성은 빠른 모드가 되도록 하고, Null-space 동특성은 느린 모드가 되도록 설계한다.

4. 폐루프 시스템에 대한 안정도 해석

앞 절에서는 파라미터 변동이나 외란이 존재하지 않는 공칭 시스템에 대해 제안된 이산 시간 스위칭 다이나믹에 의한 슬라이딩 모드 제어기의 안정도를 고찰하였다. 그러나, 파라미터 변동이나 외란이 존재하는 경우에는 제안된 이산 시간 스위칭 다이나믹의 관계식이 항상 만족된다는 것을 보장할 수 없으므로 본 절에서는 이에 대한 안정도 문제에 대해 고찰한다.

먼저 불확실한 이산 시간 다변수 시스템에 대해 이산 시간 스위칭 다이나믹을 이용한 경우 G 의 Range-space 상에서의 동특성에 관해 알아보기로 한다.

식 (4)로 표현되는 시스템에 식 (24)의 제어 입력을 인가하면 G 의 Range-space 에서의 동특성 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= GX_{k+1} \\ &= GAX_k + GBU_k + GB\eta_k \\ &= GAX_k - GB\{(GB)^{-1}G(A-I)X_k \\ &\quad + (GB)^{-1}\Gamma' S_k\} + GB\eta_k \\ &= (I-\Gamma')S_k + GB\eta_k \end{aligned} \tag{49a}$$

식 (49a)의 해는 다음과 같이 표현된다.

$$S_k = (I-\Gamma')^{k-k_0}S_0 + \sum_{i=k_0}^{k-1}(I-\Gamma')^{k-1-i}GB\eta_{ki} \quad \forall k \geq k_0+1 \tag{49b}$$

여기서 η_{ki} 는 η_k 의 i 번째 성분을 의미한다.

이득 행렬 Γ와 불확실성의 상관 관계를 고찰하기 위해 식 (10)과 같은 Lyapunov 함수를 정의하여 그의 차분값 $\Delta V(S_k)$ 를 식 (49a)를 이용하여 구해 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \triangle V(S_k) &= V(S_{k+1}) - V(S_k) \\ &= S_{k+1}^T S_{k+1} - S_k^T S_k \\ &= [S_k^T(I-\Gamma) + (\eta_k^T)(GB)^T][(I-\Gamma)S_k \\ &\quad + (GB)\eta_k] - S_k^T S_k \\ &= S_k^T(I-\Gamma')^2 S_k + 2S_k^T(I-\Gamma)(GB)\eta_k \\ &\quad + (\eta_k)^T(GB)^T(GB)\eta_k - S_k^T S_k \\ &= S_k^T(\Gamma'^2 - 2\Gamma)S_k + 2S_k^T(I-\Gamma) \\ &\quad (GB)\eta_k + (\eta_k)^T R\eta_k \end{aligned} \tag{50}$$

식 (50)에서 살펴보면 Γ를 단위 행렬 I_m 으로 선정했을 때 불확실성 η_k 의 영향을 최소화할 수 있으므로 $\Gamma = I_m$ 으로 선정하면 식 (50)은 다음과 같이 표현된다.

$$\triangle V(S_k) = -S_k^T S_k + (\eta_k)^T R\eta_k \tag{51}$$

식 (51)에서 $(\eta_k)^T R\eta_k$ 는 Sylvester의 부등식을 만족하므로 $\Delta V(S_k)$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\triangle V(S_k) \leq -\|S_k\|^2 + \lambda_{max}(R)(\eta_{max})^2 \tag{52}$$

식 (52)의 결과는 $\Gamma = I_m$ 인 경우이므로 이때의 제어 입력은 식 (27)과 같이 표현되며, 결국 식 (27)로 표현되는 제어 입력으로는 식 (52)의 $\Delta V(S_k)$ 가 모든 영역에서 음이 되지 못하고 다음과 같은 영역에서만 음이 됨을 보장할 수 있다.

$$\|S_k\| > \lambda_{max}^{1/2}(R)\eta_{max} \tag{53}$$

식 (53)은 상태 벡터의 Norm 이 점근적으로 원점으로 수렴해 가지 못하고 원점 근방으로 유계된다는 것을 암시하고 있다.

다음은 상태 벡터의 Norm 이 유계되는 것을 보이기 위하여 식 (4)로 표현된 Lumped 된 시스템에 식 (27)을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$X_{k+1} = A_c X_k + B\eta_k \tag{54}$$

여기서 $A_c \triangleq [I-B(GB)^{-1}G]A$ 이며 이는 식 (29b)에서 $\Gamma = I$ 일 때와 동일하다. 식 (54)에 식 (40)의 유사 변환을 행하면 다음과 같은 새로운 상태 공간 모델이 얻어진다.

$$X_{k+1}^{NEW} = A_c^{NEW}X_k^{NEW} + B^{NEW}\eta_k \ , \quad X_k^{NEW} = MX_k \tag{55}$$

여기서 $A_c^{NEW} \triangleq MA_cM^{-1}$, $B^{NEW} = MB$ 로 정의된다.

A_c^{NEW}는 정리 1 에 의해 안정한 행렬이라는 사실에 착안하면 식 (55)의 해의 Norm 에 대하여 다음의 관계식이 성립한다.

$$\begin{aligned}\|X_k^{NEW}\| &= \| (A_c^{NEW})^{k-k_0} X_0^{NEW} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k-1} (A_c^{NEW})^{k-i-1} B^{NEW} \eta_k \| \\ &\le \| (A_c^{NEW})^{k-k_0} \| \|X_0^{NEW}\| + \sum_{i=0}^{k-1} \\ &\quad \| (A_c^{NEW})^{k-i-1} \| \|B^{NEW}\| \| \eta_k \|\end{aligned} \tag{56}$$

A_c^{NEW}가 안정한 행렬이므로 다음의 부등식이 성립한다[12].

$$\|(A_c^{NEW})^{(k-k_0)}\| \le m\rho^{k-k_0}, \quad m>0, \quad \rho\in(0,1) \tag{57}$$

여기서 $\rho = \lambda_{max}(A_c^{NEW})$는 A_c^{NEW}의 최대 고유치로 정의된다. 식 (6)과 식 (57)의 관계를 이용하여 식 (56)을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\| X_k^{NEW} \| < m\rho^{k-k_0} \| X_{k_0}^{NEW} \| + m\|B^{NEW}\| \eta_{max} \frac{1}{1-\rho} \tag{58}$$

식 (58)에서 $k \to \infty$ 이면 다음이 성립한다.

$$\| X_k^{NEW} \| < \frac{m}{1-\rho} \|B^{NEW}\| \eta_{max} \tag{59}$$

식 (59)를 유사 변환하기 전의 상태 벡터의 Norm 으로 표현하면 다음의 부등식이 얻어지므로 상태 벡터의 유계성 (Boundedness)을 보일 수 있게 된다.

$$\| X_k \| < \frac{m\sigma}{1-\rho} \eta_{max} \tag{60}$$

여기서 $\sigma \triangleq \|M^{-1}\| \|MB\|$로 정의된다.

5. 결 론

본 논문에서는 제어 시스템의 물리적 실현이라는 실제적인 측면을 고려하여, 이산 시간 스위칭 다이나믹을 이용하여 슬라이딩 모드 제어 이론을 불확실한 이산 시간 다변수 시스템으로 확장하였다. 이산 시간 스위칭 다이나믹을 공칭 시스템에 적용하여 얻어진 전체 폐루프 시스템이 스위칭 표면 행렬의 Range-space 와 Null-space 의 동특성을 지배하는 각 부시스템(Subsystems)들의 고유치들로 구성된다는 것을 증명하였다. 더욱이 시스템의 불확실성이 시스템의 응답 특성에 미치는 영향을 분석하기 위해 전체 폐루프 시스템을 유사 변환을 이용하여 새로운 상태 공간 모델로 변환한 다음 상태 벡터의 Norm 이 유계됨을 증명하였다.

제안된 제어 알고리즘은 제어 구조가 매우 단순하면서도 설계자가 원하는 정도의 제어 성능을 얻을 수 있기 때문에 실제 산업 자동화에 이용될 수 있으리라 생각된다.

참 고 문 헌

[1] U. Itkis, *Control systems of variable structure*, John Wiley & Sons, 1976

[2] Utkin, V. I., "Variable structure systems with sliding modes", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 22, No.2, pp.212-222, 1977

[3] Utkin, V. I., *Sliding mode and their application in variable structure systems*, MIR Publishers, 1978

[4] J. J. Slotine and S. S. Sastry, "Tracking control of nonlinear system using sliding surfaces with application to robot manipulator", *Int. J. Contr.*,Vol.38, No.2, pp.465-492, 1983

[5] K. Kosuge and K. Furuta, "Variable structure control of robot arm", 15th ISIR, pp.633-640, 1985

[6] A. J. Calise and F.S. Kramer, "A variable structure approach to robust control of VTOL aircraft", *J. Guidance.*,Vol.9, No.2, pp.235-239, 1984

[7] C. Milosavljevic, "General conditions for the existence of a quasi- sliding mode on the switching hyperplanein discrete-time variable structure systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.46, pp.307-314, 1985

[8] S. Sarpturk et al, "On the stability of discrete-time sliding mode control systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.32, No.10, pp.930-932, 1987

[9] K. Furta and M. Morisada, "Implementation of sliding mode control by a digital computer", *IECON*, pp.453-458, 1988

[10] M.E. Magna and S. H. Zak, "Robust state feedback stabilization of discrete-time uncertain dynamical systems", *Proc. of 26th Conf. on DAC*, Vol.TP-10, pp.1530-1534, 1987

[11] O. M. E El-Ghezawi, A. S. I. Zinober & S. A. Billings, "Analysis and design of variable structure systems using a geometric approach", *Int. J. Control*, Vol.38, No.3, pp. 657-671, 1983

[12] Frank M. Callier and Charles A. Desoer, *Linear System Theory*, Springer-Verlag, 1991

저 자 소 개

김 동 식 (金 東 植)

1963년 9월 10일생. 1986년 고려대 공대 전기공학과 졸업. 1988년 동 대학원 전기공학과 졸업. 1992년 동 대학원 전기공학과 졸업(공박). 현재 순천향대 제어계측공학과 조교수