

# 블럭펄스함수를 이용한 시스템 상태추정의 계층별접근에 관한 연구

論 文  
45~3~11

## A Hierarchical Approach to State Estimation of Time-varying Linear Systems via Block Pulse Function

安斗守\* · 안비오\*\* · 林潤植\*\* · 李在春\*\*\*  
(Doo-Soo Ahn · Pius Ahn · Yun-Sic Lim · Jae-Choon Lee)

**Abstract** - This paper presents a method of hierarchical state estimation of the time-varying linear systems via Block-pulse function(BPF). When we estimate the state of the systems where noise is considered, it is very difficult to obtain the solutions because minimum error variance matrix having a form of matrix nonlinear differential equations is included in the filter gain calculation. Therefore, hierarchical approach is adapted to transpose matrix nonlinear differential equations to a sum of low order state space equation form and Block-pulse functions are used for solving each low order state space equation in the form of simple and recursive algebraic equation. We believe that presented methods are very attractive and proper for state estimation of time-varying linear systems on account of its simplicity and computational convenience.

**Key Words** : BPF(블럭펄스함수), State Estimation(상태추정), Adaptive Analysis Method(적응형 해석기법), Hierarchical Control(계층별제어)

### 1. 서 론

실제의 물리계는 원하던 원하지 않든 간에 많은 잡음을 포함하게 된다. 따라서 시스템의 상태를 추정해야 하는 경우에도 잡음이 없다고 가정한 확정계에서의 상태추정은 많은 오차를 포함하므로 잡음이 존재하는 확률계에서의 상태추정이 이루어져야 할 것이다. 연속계 확률 시스템의 상태 추정을 위해서는 설계된 필터의 이득을 구해야 하고 이것은 실제의 상태와 추정된 상태 사이의 오차에 대한 분산값인 최소오차 분산행렬값의 계산을 요구한다[1,2]. 그러나 이것은 행렬 비선형 미분방정식 형태로 그 해를 구하기가 매우 어렵다. Kalman은 이점을 해결하기 위해 행렬분할 기법[3]을 소개 하였으나 시스템의 차수가  $n$ 차인 경우  $2n$ 차의 방정식을 구해야 하는 어려움이 있다. 최근에는 계층별제어 이론으로 시스템을 분할하고 분할된 시스템에서 유도된 저차의 시스템으로 부터 필터 이득을 구하는 방법 등이 제시되고 있으나 매우 복잡한 연산을 필요로 한다[4~6].

따라서, 본 연구에서는 블럭펄스함수를 이용하여 시스템의 상태추정을 할 수 있는 간단한 알고리즘을 제시하고자 한다. 블럭펄스함수 변환식을 이용하여 상태추정을 할 경우 변환식이 갖는 적분 연산자로 미분방정식을 대수방정식으로 변환할 수 있고, 연속계를 구간 연속인 형태로 표현하므로 행렬 비선형 미분방정식으로 주어지는 최소오차 분산행렬 값과 필터 이득, 추정된 상태값등을 간단한 형태의 반복적 대수식으로부터 구할 수 있는 잇점이 있다. 먼저, 2장에서는 블럭펄스함수 변환식을

이용하기 위해 계층별제어를 이용한 수식의 유도를 하였다. 이는 최소오차 분산행렬식의 행렬 비선형 미분방정식을 벡터 비선형 미분방정식으로 바꿀 경우 방정식의 차수가  $n^2$ 으로 늘어나기 때문에 이것을  $n$ 차를 갖는  $n$ 개의 보조방정식으로 분할한 것이다. 3-1절은 2절에서 분할한 각각의 보조방정식을 블럭펄스함수 변환식과 블럭펄스함수의 적분연산자를 이용하여 상태추정할 수 있는 수식의 유도를, 3-2절에서는 상태추정에 필요한 필터이득의 계산을 블럭펄스함수를 이용한 비선형계의 적응형 해석방법으로 유도하였다.

### 2. 시스템 상태추정의 계층별접근

연속계 확률 동적시스템을 다음과 같이 표현하자.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t) \mathbf{w}(t) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (2.2)$$

$$E[\mathbf{x}(t_0)] = \bar{\mathbf{x}}_0$$

여기서,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ,  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  이고,  $\mathbf{w}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$ 는 각각 평균이 0인 백색잡음으로 다음의 분산값을 갖는다.

$$E[\mathbf{w}(t)] = 0, \quad E[\mathbf{w}(t) \cdot \mathbf{w}(\tau)^T] = \mathbf{Q} \cdot \delta(t - \tau)$$

$$E[\mathbf{v}(t)] = 0, \quad E[\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(\tau)^T] = \mathbf{R} \cdot \delta(t - \tau)$$

$\mathbf{Q}$ : Block diagonal positive semi-definite matrix,  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{r \times r}$

\* 正 會 員 : 成均館大 工大 電氣工學科 教授 · 工博

\*\* 正 會 員 : 成均館大 大學院 電氣工學科 博士課程

\*\*\* 正 會 員 : 成均館大 工大 電氣工學科 講師

接受日字 : 1995年 9月 5日

最終完了 : 1996年 1月 30日

$\mathbf{R}$ : Block diagonal positive definite matrix,  $\mathbf{R} \in \mathcal{R}^{m \times m}$

상태  $\mathbf{x}(t)$ 에 대해 선형이고 편차가 없는 최소오차 분산값을 갖는 추정을 하기 위해서 다음과 같은 형태의 상태추정 방정식을 정의하자.

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t)(\mathbf{z}(t) - \mathbf{H}(t) \hat{\mathbf{x}}(t)) \quad (2.3)$$

여기서,  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{K} \in \mathcal{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{z}(t) \in \mathcal{R}^{m \times 1}$ ,  
 $\hat{\mathbf{x}}(t_0) = E[\hat{\mathbf{x}}(t_0)] = E[\mathbf{x}(t_0)] = \bar{\mathbf{x}}_0$  이다.

식(2.1),(2.2)로 표현된 시스템 과 식(2.3)으로 표현된 상태추정 방정식으로부터 다음의 평가함수  $J(t)$ 를 최소화시키는 최소오차 분산행렬  $\mathbf{P}(t)$ 를 정의하면식(2.5)와 같다.

$$J(t) = \text{trace}[\text{var}\{\tilde{\mathbf{x}}(t)\}] = \text{trace}[\mathbf{P}(t)] \quad (2.4)$$

여기서,  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\mathbf{P}(t) = E[\tilde{\mathbf{x}}(t) \tilde{\mathbf{x}}(t)^T]$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{F}(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{F}^T(t) + \mathbf{G}(t) \mathbf{Q} \mathbf{G}^T(t) \\ &\quad - \mathbf{P}(t) \mathbf{H}^T(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}(t) \mathbf{P}(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{P}(t_0) = \text{var}[\mathbf{x}(t_0) - \hat{\mathbf{x}}(t_0)] = \text{var}[\mathbf{x}(t_0)] = \mathbf{P}_0$$

이제 식(2.3)으로 표현된 상태추정 방정식은 식(2.5)에서 계산된 최소오차 분산행렬  $\mathbf{P}(t)$ 로부터 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}}(t) &= [\mathbf{F}(t) - \mathbf{K}(t) \mathbf{H}(t)] \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t) \mathbf{z}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t_0) &= \bar{\mathbf{x}}_0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

여기서, 필터 이득값  $\mathbf{K}(t)$ 는 식(2.7)으로부터 계산되어 진다.

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{H}^T(t) \mathbf{R}^{-1} \quad (2.7)$$

이제 식(2.6)의 상태방정식을 풀면 주어진 시스템의 상태추정을 하게 된다[1]. 그러나, 식(2.6)을 풀기 위해서는 식(2.7)으로 주어지는 필터이득  $\mathbf{K}(t)$ 를 구해야 하고, 이것은 식(2.5)의 행렬 비선형 미분방정식을 풀어야만 한다. 그러나 이것은 매우 어려운 일이다. 본 연구 방법의 적용을 위해 크로네커곱을 이용하여 식(2.5)을 식(2.8)의 벡터 비선형 미분방정식으로 표현하자. 행렬  $\mathbf{P}(t)$ 는 정방행렬로 단위행렬  $\mathbf{I}$ 를 곱하여도 그 식은 변하지 않는다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}) \mathbf{p}(t) + (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}) \mathbf{p}(t) + (\mathbf{G} \otimes \mathbf{G}) \mathbf{q} \\ &\quad - (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P})^T \otimes \mathbf{I} \mathbf{p}(t), \quad \mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

여기서,

$$\mathbf{p}(t) \in \mathcal{R}^{n^2 \times 1}, \quad \mathbf{I} \otimes \mathbf{F} \in \mathcal{R}^{n^2 \times n^2}, \quad \mathbf{q} \in \mathcal{R}^{r^2 \times 1},$$

$$\mathbf{G} \otimes \mathbf{G} \in \mathcal{R}^{n^2 \times r^2} \quad (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P})^T \otimes \mathbf{I} \in \mathcal{R}^{n^2 \times n^2}$$

$$\mathbf{p}(t) = [\mathbf{P}_1(t) \quad \mathbf{P}_2(t) \quad \dots \quad \mathbf{P}_n(t)]^T$$

$$\mathbf{P}_i(t) = [\mathbf{P}_{i1}(t) \quad \mathbf{P}_{i2}(t) \quad \dots \quad \mathbf{P}_{in}(t)]^T$$

$$\mathbf{q} = [\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2 \quad \dots \quad \mathbf{Q}_n]^T, \quad \mathbf{Q}_i = [\mathbf{Q}_{i1} \quad \mathbf{Q}_{i2} \quad \dots \quad \mathbf{Q}_{in}]^T$$

식(2.8)을 다음과 같이 표기하자.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) = \mathbf{M}(\mathbf{p}(t), t) \mathbf{p}(t) + \mathbf{N}(t) \mathbf{q}, \quad \mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0 \quad (2.9)$$

여기서,  $\mathbf{M}(\mathbf{p}(t), t) = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}) - (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P})^T \otimes \mathbf{I}$   
 $\mathbf{N}(t) = \mathbf{G} \otimes \mathbf{G}$ ,  $\mathbf{M} \in \mathcal{R}^{n^2 \times n^2}$ ,  $\mathbf{N} \in \mathcal{R}^{n^2 \times r^2}$ ,

식(2.9)는  $n^2$ 의 높은 차수를 갖는 벡터 비선형 미분방정식으로 그 해를 구하기가 어렵다. 따라서 계층별제어 이론을 이용  $n$ 개의 보조방정식으로 분할하여 시스템 차수와 같은  $n$ 개의  $n$ 차 벡터 비선형 미분방정식을 풀고자 한다[7, 8]. 분할된  $i$ 번째 보조방정식의 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{p}_i(t) &= \mathbf{M}_i(\mathbf{p}(t), t) \mathbf{p}_i(t) + \mathbf{N}_i(t) \mathbf{q}_i + \boldsymbol{\pi}_i(t) \quad (2.10) \\ \mathbf{p}_i(t_0) &= \mathbf{p}_{i0} \end{aligned}$$

여기서,

$$\mathbf{M}_i \in \mathcal{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{N}_i \in \mathcal{R}^{n \times r}, \quad \mathbf{p}_i(t) \in \mathcal{R}^{n \times 1}, \quad \mathbf{q}_i \in \mathcal{R}^{r \times 1}$$

식(2.10)에서  $\boldsymbol{\pi}_i(t)$ 값은 상호예측원리에 의해 결정되는 새로운 조정자 변수값으로 식(2.11)에 의해 계산되어진다.

$$\boldsymbol{\pi}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{M}(\mathbf{p}(t), t)_{ij} \mathbf{p}_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.11)$$

이러한 계층별 연산은 다음의 오차  $\epsilon$ 이 영에 수렴할 때까지 반복된다.

$$\mathbf{E}_i = [\boldsymbol{\pi}_i]^{k+1} - [\boldsymbol{\pi}_i]^k, \quad \epsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i^T \mathbf{E}_i} \quad (2.12)$$

이제 계층별접근에 의해 유도된 식(2.10~12)을 이용하여 필터 이득  $\mathbf{K}(t)$ 를 계산하고, 유도된 상태방정식(2.6)의 해를 구하면 상태를 추정하게 된다. 그러나 위에서 유도한 분할된  $n$ 개의 보조 방정식은 벡터 비선형 미분방정식이므로 다음절에서 블럭펄스함수 전개에 의한 비선형계의 적응형 해석방법으로  $\mathbf{p}(t)$ 값과  $\mathbf{K}(t)$ 를 계산하고, 유도된 상태추정 방정식 역시 블럭펄스함수를 이용하여 반복적이고 간단한 대수식으로부터 구하고자 한다.

### 3. 블럭펄스함수를 이용한 시스템의 상태추정

#### 3.1 블럭펄스함수를 이용한 상태추정 방정식의 해

블럭펄스함수 집합  $\phi(t)$ 는  $0 \leq t < t_f$ 에서 구간 연속인 함수들의 집합으로 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_k(t) = \begin{cases} 1, & \frac{(k-1)t_f}{m} \leq t < \frac{kt_f}{m} \\ 0, & \text{그외구간} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$k=0, 1, \dots, m$$

여기서,  $m$ 은 블럭펄스함수의 전개항수,  $\phi_k$ 는  $k$ 번째 블럭펄스함수를 나타낸다. 또한 블럭펄스함수  $\phi_k(t)$ 는 다음과 같은 조건을 만족하는 직교함수(Orthogonal functions)이다.

$$\int_0^{t_f} \phi_k \phi_l dt = \begin{cases} \phi_k(t), & k=l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (3.2)$$

임의의 함수  $x(t)$ 는  $m$ 개의 블럭펄스함수로 다음과 같이 유한급수전개 된다. 여기서  $X_i$ 는  $i$ 번째 블럭펄스함수의 계수이다.

$$x(t) \cong \sum_{i=0}^m X_i \phi_i(t)$$

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{m}{t_f} \int_{t_0}^{t_f} x(t) \phi_i(t) dt = \frac{m}{t_f} \int_{(k-1)t_f/m}^{kt_f/m} x(t) dt \\ &\cong \frac{1}{2} [x(kt_f/m) + x((k-1)t_f/m)] \end{aligned}$$

$$k=1, 2, \dots, m \quad (3.3)$$

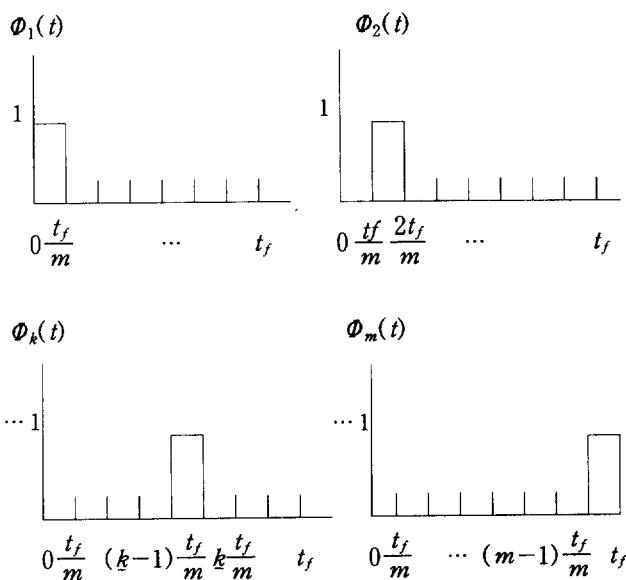


그림 1 블럭펄스함수 집합

Fig. 1 A Set of Block Pulse Functions

블럭펄스함수의 정방향적분(forward integral) 역시  $m$ 개의 블럭펄스함수로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \int_0^t \phi(\tau) d\tau &\cong P\phi(t) \\ \int_0^t \phi_i(\tau) d\tau &\cong \frac{t_f}{2m} \phi_i(t) + \frac{t_f}{m} \sum_{i=i+1}^m \phi_i(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

같은 방법으로 블럭펄스함수의 역방향적분(backward integral) 역시  $m$ 개의 블럭펄스함수로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \int_{t_f}^t \phi(\tau) d\tau &\cong -P^T\phi(t) \\ \int_{t_f}^t \phi_i(\tau) d\tau &\cong -\frac{t_f}{2m} \phi_i(t) - \frac{t_f}{m} \sum_{i=1}^{i-1} \phi_i(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

여기서 블럭펄스함수의 정방향적분 연산행렬  $P$  및 역방향적분 연산행렬  $\hat{P}$ 을 행렬식으로 나타내면 다음과 같고, 역방향적분 연산행렬  $\hat{P}$ 는  $\hat{P} = -P^T$ 의 관계가 있다[9].

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \hat{P} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

선형시변 시스템으로 주어지는 식(2.6)을 블럭펄스함수 전개를 위해 식(3.6)으로 표현하자.

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{S}(t) \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t) \mathbf{z}(t) \quad (3.6)$$

여기서,  $\mathbf{S}(t) \triangleq [\mathbf{F}(t) - \mathbf{K}(t) \mathbf{H}(t)]$

이제, 식(3.6)의 양변을 적분을 하여 블럭펄스함수 전개 한 후 블럭펄스함수의 직교성을 이용하면 식(3.7)과 같다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \hat{\mathbf{x}}_k \phi_k(t) - \sum_{k=1}^m \hat{\mathbf{x}}_0 \phi_k(t) &= \int_0^t \left[ \sum_{k=1}^m \mathbf{S}_k \phi_k(\tau) \right] \left[ \sum_{i=1}^m \hat{\mathbf{x}}_i \phi_i(\tau) \right] d\tau \\ &\quad + \int_0^t \left[ \sum_{k=1}^m \mathbf{K}_k \phi_k(\tau) \right] \left[ \sum_{i=1}^m \hat{\mathbf{z}}_i \phi_i(\tau) \right] d\tau \\ &= \int_0^t \sum_{k=1}^m \mathbf{S}_k \hat{\mathbf{x}}_k \phi_k(\tau) d\tau + \int_0^t \sum_{k=1}^m \mathbf{K}_k \mathbf{z}_k \phi_k(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.7)$$

블럭펄스함수의 적분연산 행렬을 적용하여 다시 쓰면 식(3.8)과 같다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_0) \phi_k(t) &= \frac{t_f}{m} \left[ \sum_{k=1}^m \mathbf{S}_k \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k \mathbf{z}_k \right] \left[ \frac{1}{2} \phi_k(t) + \sum_{i=k+1}^m \phi_i(t) \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

이제 식(3.8)을  $\hat{\mathbf{x}}_k$ 에 대해서 정리하면 다음과 같은 반복적 계산식(3.9)를 구할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = [\mathbf{I} - \frac{t_f}{2m} \mathbf{S}_1]^{-1} [\mathbf{x}_0 + \frac{t_f}{2m} \mathbf{K}_1 \mathbf{z}_1]$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = [\mathbf{I} - \frac{t_f}{2m} \mathbf{S}_k]^{-1} \times$$

$$\left\{ [\mathbf{I} + \frac{t_f}{2m} \mathbf{S}_k] \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \frac{t_f}{2m} [\mathbf{K}_k \mathbf{z}_k + \mathbf{K}_{k-1} \mathbf{z}_{k-1}] \right\}, k=2, 3, 4, \dots, m \quad (3.9)$$

따라서, 필터이득  $\mathbf{k}(t)$ 를 블럭펄스함수 변환식을 이용하여 구한 후 식(3.9)에 구해진 계수값을 대입하여 풀면 주어진 시스템의 상태추정을 할 수 있게 된다.

### 3.2 블럭펄스함수에 의한 필터이득의 계산

분할된 보조방정식인 식(2.10)은 벡터 비선형 방정식이다. 그러나, 행렬  $\mathbf{M}_i(\mathbf{p}(t), t)$ 가  $\mathbf{p}(t)$ 의 함수가 아니라는 가정 아래 식(3.10)과 같은 선형 시변시스템으로 표현할 수 있다[10].

$$\dot{\mathbf{p}}_i(t) = \mathbf{M}_i(t) \mathbf{p}_i(t) + \mathbf{N}_i(t) \mathbf{q}_i + \boldsymbol{\pi}_i(t) \quad (3.10)$$

여기서  $\mathbf{p}_i(t)$ 와  $\boldsymbol{\pi}_i(t)$ ,  $\mathbf{M}_i(t)$ ,  $\mathbf{N}_i(t)$ 에 각각 블럭펄스함수 전개하여 선형시변계로 가정된 식(3.10)를 해석하기 위해 양변을 적분한 후 블럭펄스함수의 적분연산자를 도입하면 (표현의 편의상  $i$ 번째 보조방정식을 나타내는 첨자  $i$  생략) 식(3.11)와 같다.

$$\sum_{k=1}^m \mathbf{p}_k \phi_k(t) - \sum_{k=1}^m \mathbf{p}_{k0} \phi_k(t) =$$

$$\frac{t_f}{m} \sum_{k=1}^m [\mathbf{M}_k \mathbf{p}_k + \mathbf{N}_k \mathbf{q}_k + \boldsymbol{\pi}_k]$$

$$\times \left[ \frac{1}{2} \phi_k(t) + \sum_{l=k+1}^m \phi_l(t) \right] \quad (3.11)$$

식(3.11)는 초기조건과 함께 블럭펄스함수 전개에 대한 각각의 계수 행렬을 알면 해석이 가능하다. 그러나 식(3.11)으로 구해진 결과는 비선형 방정식의 행렬  $\mathbf{M}(\mathbf{p}(t), t)$ 가  $\mathbf{p}(t)$ 의 함수가 아니라고 가정한 것으로, 식(2.10)의 비선형 방정식을 식(3.10)의 선형 시변계로 두고 처리한 결과이다. 따라서 이 가정을 성립시키기 위해 블럭펄스함수 전개를 이용한 적응형 해석 기법을 적용한다. 먼저  $t=0$ 인 시점  $t_0$ 을 고려하자. 이는 초기 조건으로  $t_0$ 에서 상태벡터는  $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0$ 로 일정한 값을 갖게 되며 이에 따라 비선형 방정식에서의 행렬  $\mathbf{M}(\mathbf{p}(t), t)$ 를 시점  $t=0$ 에서 상수값으로 처리한다.

$$\mathbf{p}(t) |_{t_0} = \mathbf{p}_0, \mathbf{M}(\mathbf{p}(t), t) |_{\mathbf{p}_0, t_0} = \mathbf{M}(\mathbf{p}_0, t_0) = \mathbf{M}_0 \quad (3.12)$$

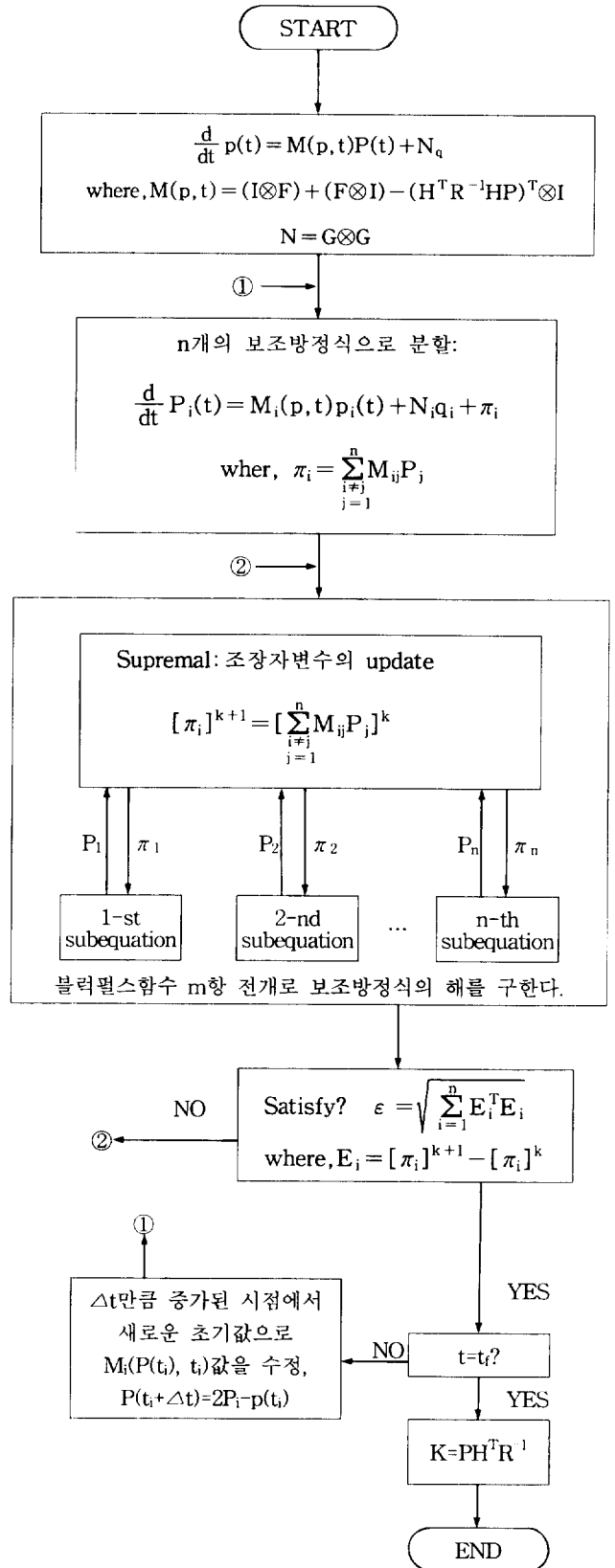


그림 2 블럭펄스함수를 이용한 필터이득 계산의 계층별 접근 흐름선도

Fig. 2 Flow Chart on Hierarchical Approach of Filter Gain Calculations via BPF

즉, 일반적으로 정의 구간 내에 존재하는 임의의 시점  $t_i$ 에서 상태벡터는  $\mathbf{p}(t_i) = \mathbf{p}_i$ 로 일정한 값을 갖게 되며 이에 따라 행렬  $\mathbf{M}(\mathbf{p}, t)$ 는 각각 시점  $t_i$ 에서 상수로 처리된다.

$$\mathbf{p}(t) |_{t_i} = \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{M}(\mathbf{p}, t) |_{p_i, t_i} = \mathbf{M}(\mathbf{p}_i, t_i) = \mathbf{M}_i \quad (3.13)$$

이와 같이 시점  $t_i$ 에서의  $\mathbf{M}(\mathbf{p}, t)$ 는  $\mathbf{p}(t)$ 의 함수가 아니며 시점  $t_i$ 가 정의구간 내에서 변하는 값이므로 식(3.10)에 대한 선형시변계 처리가 성립된다. 그러므로 정의구간을 미세구간 간격  $\Delta t = t_j / m$ 로 분할하고, 이를 샘플링주기로 하여 매 시구간별 상태벡터 및 선형화된 행렬을 반복적으로 구함으로써 결국 정의구간  $t \in [0, t_j]$ 에서의 비선형계에 대한 적용형 해석을 수행한다. 이때 새로운 시점에서의 초기값은 블럭펄스함수의 직교성을 이용 식(3.14)로 부터 구할 수 있다.

$$\mathbf{p}(t_i + \Delta t) = 2\mathbf{p}_i - \mathbf{p}(t_i) \quad (3.14)$$

이러한 반복적인 연산을 대수적으로 처리할 수 있도록 블럭펄스함수 전개를 이용하여 구한  $\mathbf{p}(t)$ 의 계산식은 식(3.15)과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= [\mathbf{I} - (\Delta t/2) \mathbf{M}_1]^{-1} [\mathbf{p}_0 + (\Delta t/2)(\mathbf{N}_1 \mathbf{q}_1 + \boldsymbol{\pi}_1)] \\ \mathbf{p}_k &= [\mathbf{I} - (\Delta t/2) \mathbf{M}_k]^{-1} \{ [\mathbf{I} + (\Delta t/2) \mathbf{M}_k] \mathbf{p}_{k-1} + \\ & (\Delta t/2) [\mathbf{N}_k \mathbf{q}_k + \boldsymbol{\pi}_k + \mathbf{N}_{k-1} \mathbf{q}_{k-1} + \boldsymbol{\pi}_{k-1}] \} \end{aligned} \quad (3.15)$$

단,  $k = 2, 3, \dots, m$

이제 식(3.15)으로부터 구해진 최소오차 분산값을 이용하여 필터 이득 역시 식(3.16)과 같이 블럭펄스함수 전개하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_i &= \mathbf{P}_i \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}^{-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \\ \mathbf{k}(t) &= \sum_{i=1}^m \mathbf{k}_i \phi_i(t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

여기서,  $\mathbf{k}_i$ 는  $i$ 번째 블럭펄스함수 계수이다. 그림2는 위의 연산과정을 정리하여 흐름선도로 나타낸 것이다.

#### 4. 시뮬레이션

##### 4.1 적용예1

그림 3과 같은 damped resonator의 수학적 모델은 다음과 같다.

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta(t) + 2\zeta\omega \frac{d}{dt} \delta + \omega^2 \delta = w(t)$$

여기서,  $\delta$  = 이동거리,  $\zeta = \frac{k_d}{2\sqrt{mk_s}}$ ,  $\omega = \sqrt{k_s/m}$   
 $k_s$  = 스프링 상수,  $k_d$  = dashpot의 지연상수,  $m$  = 질량

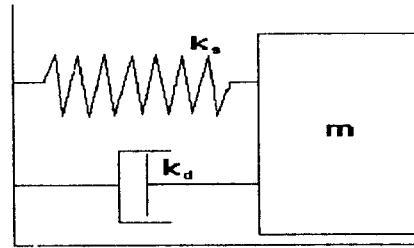


그림 3 시뮬레이션1의 시스템 대상  
 Fig. 3 The system of simulation 1

이것을 상태방정식으로 나타내면,

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} x_1 \\ \frac{d}{dt} x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\zeta\omega \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \quad (4.1)$$

$\mathbf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$  여기서,  $x_1 = m$ 의 속도,  $x_2 = m$ 의 가속도 관측값을 다음과 같이 놓자.

$$\mathbf{z}(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t) + v(t) \quad (4.2)$$

$w(t), v(t)$ 는 각각 평균 0과 분산값  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 을 갖는 가우시안 백색잡음이다. 여기서,  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}, \mathbf{R} = \mathbf{I}$  이다.  $\mathbf{P}_0(t)$ 의 값은 다음과 같다.

$$\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

이제 최소오차 분산행렬의 행렬 비선형 미분방정식으로부터 크로네커 곱을 이용하여 구한 식은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) = \mathbf{M}(\mathbf{p}, t) \mathbf{p}(t) + \mathbf{N}(t) \mathbf{q}(t) \quad \text{에서}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}, t) = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & -2\zeta\omega - p_1 & 0 & 1 \\ -\omega^2 - p_2 & 0 & -2\zeta\omega & 1 \\ 0 & -\omega^2 - p_2 & -\omega^2 & -4\zeta\omega \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T, \quad \mathbf{p}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad \text{이다.}$$

$\zeta=0.5, \omega=1$  로 주고 방정식을 2개의 보조 방정식으로 분할하여 표현하면 다음과 같다.

Subequation 1.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_{sub1}(t) =$$

$$\mathbf{M}_{11}(\mathbf{p}(t), t) \mathbf{p}_{sub1}(t) + \mathbf{N}_1(t) \mathbf{q}_{sub1} + \boldsymbol{\pi}_{sub1}(t)$$

$$\mathbf{p}_{sub1}(t_0) = \mathbf{p}_{sub1 \ 0}$$

$$\boldsymbol{\pi}_{sub1} = \mathbf{M}_{12}(\mathbf{p}(t), t) \mathbf{p}_{sub2}(t)$$

여기서

$$\mathbf{M}_{11}(p, t) = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 \\ -1 & -1-p_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12}(p, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_1 = [0 \ 0]^T$$

$\mathbf{p}_{sub1\ 0} = [0 \ 0]^T$  이다.

분할된 보조방정식은 블럭펄스함수 변환식 식(3.15)에 의해 블럭펄스함수의 계수값들을 구하고, 구해진 해는 식(2.11)에 의해 식(2.12)를 만족할 때까지 반복 연산된다 (여기서  $\epsilon = 0.000001$ 으로 했음).

이제  $t = t_i$ 시점에서  $M_{11}(p(t), t)$ 에 포함된  $p(t)$ 를  $p(t_i)$ 로 일정하게 놓으면 다음과 같다.

$$\mathbf{M}_{11}(t_i) = \begin{bmatrix} -p_i & 1 \\ -1 & -1-p_i \end{bmatrix}$$

이제  $t_0$ 에서 주어진 초기값으로 결정되는  $M_{11}(p(t), t)$ 는  $\mathbf{M}_{11}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$  이 되고 식(3.15)로부터 해를 구해  $\Delta t$ 만큼 증분된 시점의 초기값을 식(3.14)로부터 구해 시간  $t_i$ 까지 반복 연산하여 해를 구한다.

이제 구해진  $p(t)$ 의  $i$ 번째 블럭펄스함수의 계수값  $P_i$ 를 이용하여

$$\mathbf{k}_{subi} = \mathbf{P}_{subi} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_{subi}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$\mathbf{k}_{subi}(t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{k}_{subi} \phi_i(t)$$

을 구할 수 있고, 식(3.9)를 이용하여 추정된 상태값을 계산하게 된다.

Subequation 2.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_{sub2}(t) =$$

$$\mathbf{M}_{22}(p(t), t) \mathbf{p}_{sub2}(t) + \mathbf{N}_2(t) \mathbf{q}_{sub2} + \boldsymbol{\pi}_{sub2}(t)$$

$$\mathbf{p}_{sub2}(t_0) = \mathbf{p}_{sub2\ 0}$$

$$\boldsymbol{\pi}_{sub2} = \mathbf{M}_{21}(p(t), t) \mathbf{p}_{sub1}(t)$$

여기서,

$$\mathbf{M}_{21}(p, t) = \begin{bmatrix} -1-p_2 & 0 \\ 0 & -1-p_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{22}(p, t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_2 = [0 \ 1]^T$$

$\mathbf{p}_{20} = [0 \ 0]^T$  이다.

이제 각각의 보조방정식에서 구한 최소오차 분산행렬값과 필터 이득을 이용하여 추정된 상태에 대한 그림은 다음과 같다. 여기서, 블럭펄스함수의 전개항수  $m$ 을 50,  $t_f$ 는 10초로 하였다.

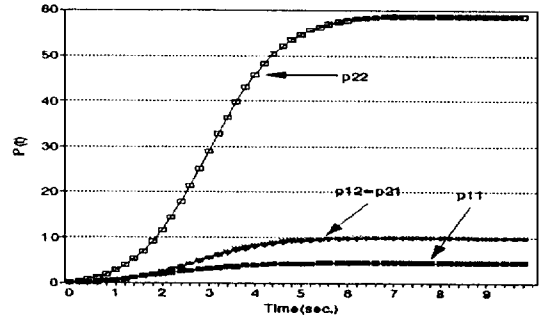


그림 4 적용예1의 최소오차 분산값

Fig. 4 Minimum Error Variances of Example 1

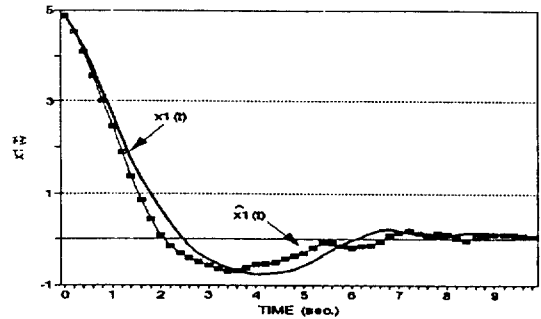


그림 5 적용예1의 실제상태  $x_1(t)$ 와 추정된상태  $\hat{x}_1(t)$

Fig. 5 Real state  $x_1(t)$  and estimated state  $\hat{x}_1(t)$

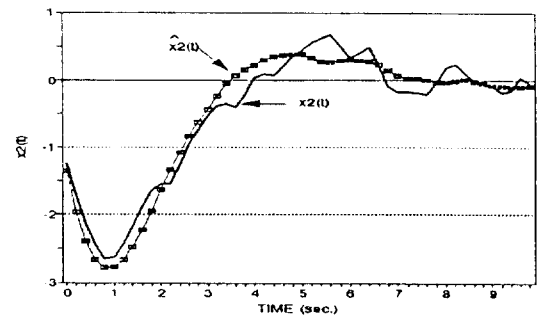


그림 6 적용예1의 실제상태  $x_2(t)$ 와 추정된 상태  $\hat{x}_2(t)$

Fig. 6 Real state  $x_2(t)$  and estimated state  $\hat{x}_2(t)$

#### 4.2 적용예2

다음의 적용예2에서는 3차 시스템을 대상으로 하였다. 유도된 최소오차 분산행렬의 방정식의 9차 벡터 비선형 미분방정식을 3개의 보조 방정식으로 나누어 필터이득을 구하고, 구해진 필터이득으로부터 상태값을 추정하여 실제의 상태와 비교하였다. 주어진 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} -0.2 & 1.0 & 0.0 \\ -1.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 5.0 \end{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$z(t) = [1.0 \ 0.0 \ 0.0] \mathbf{x}(t) + v(t) \quad (4.5)$$

여기서,  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ 이고,  $\mathbf{P}_0(t)$ 의 값은 다음과 같다.

$$\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{0}_{4 \times 4} \quad (4.6)$$

BPF 전개항수  $m$ 은 50이고,  $t_f$ 는 10sec.이다. 분할된 보조방정식의 행렬은 다음과 같다.

infimal 1.

$$M_{11} = \begin{bmatrix} -(0.4+p_1) & 1.0 & 0.0 \\ -1.0 & -(0.2+p_1) & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -(0.2+p_1) \end{bmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad M_{13} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = [0.0 \ 0.0 \ 0.0]^T, \quad p_{10} = [0.0 \ 0.0 \ 0.0]^T$$

infimal 2.

$$M_{21} = \begin{bmatrix} -(1.0+p_2) & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -(1+p_2) & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -(1+p_2) \end{bmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} -0.2 & 1.0 & 0.0 \\ -1.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad M_{23} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$N_2 = [0.0 \ 0.0 \ 0.0]^T, \quad p_{20} = [0.0 \ 0.0 \ 0.0]^T$$

infimal 3.

$$M_{31} = \begin{bmatrix} -p_3 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -p_3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -p_3 \end{bmatrix} \quad M_{32} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$M_{33} = \begin{bmatrix} -0.2 & 1.0 & 0.0 \\ -1.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix},$$

$$N_3 = [0.0 \ 0.0 \ 25.0]^T, \quad p_{30} = [0.0 \ 0.0 \ 0.0]^T$$

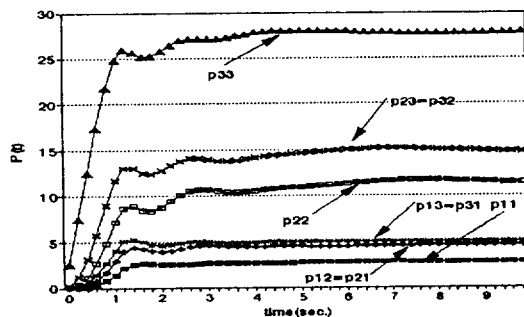


그림 7 적용예2의 최소오차 분산값  
Fig. 7 Minimum error variances of example 2

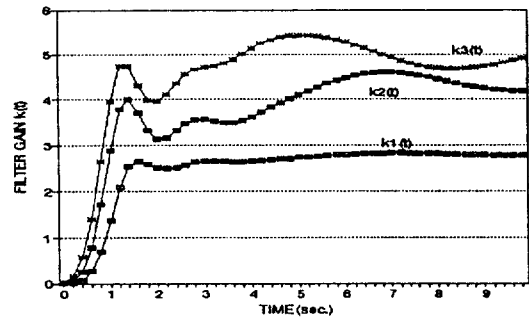


그림 8 적용예2의 필터이득값  
Fig. 8 Filter Gains of Example 2

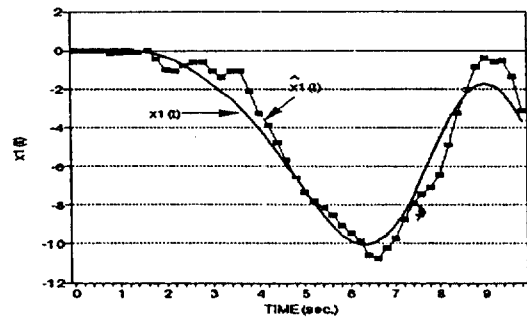


그림 9 적용예2의 실제 상태  $x_1(t)$ 와 추정된 상태  $\hat{x}_1(t)$   
Fig. 9 Real State  $x_1(t)$  and estimated state  $\hat{x}_1(t)$

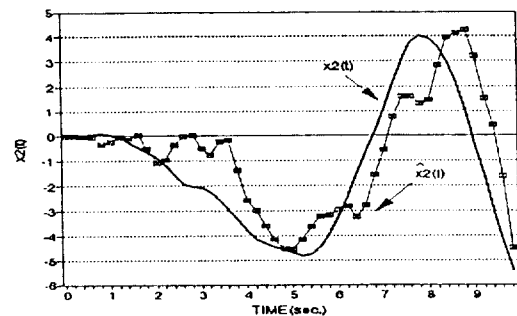


그림 10 적용예2의 실제 상태  $x_2(t)$ 와 추정된 상태  $\hat{x}_2(t)$   
Fig. 10 Real state  $x_2(t)$  and estimated state  $\hat{x}_2(t)$

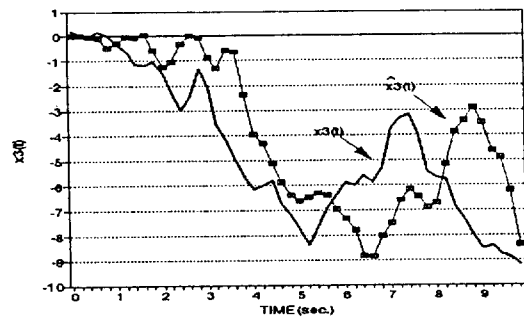


그림 11 적용예2의 실제 상태  $x_3(t)$ 와 추정된 상태  $\hat{x}_3(t)$   
Fig. 11 Real state  $x_3(t)$  and estimated state  $\hat{x}_3(t)$

5. 결 론

본 연구에서는 블럭펄스함수 전개와 계층별 접근을 이용한 연속계 확률 시스템에서의 상태추정 방법을 제안하였다. 일반적으로 잡음이 존재하는 계에서의 상태 추정을 위해서는 최소오차 분산행렬을 정의하며, 이것은 필터이득을 구하는데 필수적이다. 하지만 이 행렬값을 알기 위해서는 비선형의 행렬 미분 방정식을 풀어야 하는 어려움이 있다. 따라서 본 연구에서는 이러한 어려움을 해결하기 위해 최소오차 분산행렬의 비선형행렬 미분방정식을 계층별 접근을 통해 여러 개의 벡터 비선형 미분방정식으로 분할한 후, 블럭펄스함수 변환식을 이용한 적용형 해석으로부터 그 값을 구하고, 이 값을 이용하여 시스템의 상태 추정을 간단한 연산으로 계산함으로써 용이하게 연속계 확률 시스템에서의 상태추정을 할 수 있었다. 시뮬레이션에서는 2차와 3차의 시스템을 대상으로 본 연구 방법을 적용해 보았으며, 분할된 방정식의 경우 최소오차 분산행렬이 갖는 대칭성 때문에 상위단 조정자변수의 오차가 영으로 빠르게 수렴함을 알 수 있었다. 또, 블럭펄스함수 변환식이 갖는 간단하고 반복적인 알고리즘으로 인해 고차시스템의 상태추정시에도 본 연구의 적용이 용이할 것으로 사료된다. 향후 연구과제로는 최소오차 분산행렬 값에 대한 비선형 방정식을 풀때 발생할 수 있는 오차의 누적등을 고려하여 블럭펄스함수 전개시의 강인한 계수 결정법 적용에 대한 연구가 있어야 할 것이다[11~13].

참 고 문 헌

[1] A. P. Sage, "Optimum Systems Control".2-nd ed.,Prentice Hall,1977

[2] Frank L. Lewis,"Applied Optimal Control & Estimation", Prentice Hall,1992

[3] R.E.Kalman,"A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", Journal of Basic Eng.pp35-45,1960

[4] Mohamed F. Hassan and G. Sault,"A Decentralized Computational Algorithm for Global Kalman Filter", IEEE Trans. on AUTO. CONT. vol.23,pp262-288,1978

[5] A. R. M.Noton, "Two-Level Form of the Kalman Filter", IEEE Trans.on Auto. Cont. , vol.AC-19,No.2 April 1971

[6] A. K. Mahalanabis, G. Ray, "On the State Estimation of Large Scale Continuous Time Linear Systems", IEE PROC.,vol 128,Pt.D. no.4, July.1981

[7] N. J. Smith and A.P.Sage,"An introduction to hierarchical systems theory",COMP.& ELECT.ENG. Vol.1, pp 55-71, 1973.

[8] M. D. Mesarovic,D.Macko and Takahara,"Theory of Hierarchical, Multilevel Systems", Academi Press, New york (1970)

[9] Ning Show Hsu and Bing Cheng,"Analysis and Control of Time Varying Linear Systems via Block Pulse Functions",Int.J.Cont.,vol.33,pp1107-1122, 1981

[10] K. R. Palanisamy,"Analysis of Nonlinear Systems via Single Term Walsh Series Approach", Int.J.Sys.Sci. vol. 13,N0.8, pp929-935,1982s

[11] 박준훈, "블럭펄스 변환에 의한 비선형계의 최적 제어를 위한 새로운 접근방법에 관한 연구", 성균관대학교 박사학위논문, 1992.2.

[12] "Robust Coefficient Estimation of Walsh Functions", IEE PROCEEDING,vol.137,Pt.D,No.6,Nov.1990

[13] "Robust Identification of Systems Using Block Pulse Functions",IEE PROCEEDINGS-D, vol.139,No.3, MAY. 1992

저 자 소 개



안 두 수 (安斗守)

1937년 6월 9일생. 1960년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1991년~1992년 당학회 부회장 역임. 현재 성균관대 공대 전기공학과 교수 (공박). 당 학회 평의원



임 윤 식 (林潤植)

1965년 1월 4일생. 1991년 성균관대 공대 전기공학과 졸업. 1993년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 현재 성균관대 대학원 박사과정(제어공학)



안 비 오 (安비오)

1968년 2월 24일생. 1992년 성균관대 공대 전기공학과 졸업. 1994년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 현재 성균관대 대학원 전기공학과 박사과정



이 재 춘 (李在春)

1957년 2월 23일생. 1980년 성균관대 공대 전기공학과 졸업. 1982년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1995년 2월 공학박사 취득. 현재 성균관대 공대 전기공학과 강사