불확실한 비선형 시스템에 대한 H_∞ 강인 제어

論 文
45~3~10

Robust H_∞ Control of Uncertain Nonlinear Systems

宋 誠 鎬* · 河 仁 重**
(Seong-Ho Song · In-Joong Ha)

Abstract - In this paper, we consider H_∞ control of nonlinear systems which have not only additive uncertainties but also input-multiplicative uncertainties. Using the relation between the L_2 gain of a nonlinear system and the Hamilton-Jacobi-Isaacs inequality, we define "stabilizability in the sense of Lyapunov with an H_∞ - norm bound constraint" for uncertain nonlinear systems. Then, we present a necessary and sufficient condition under which our problem is solvable and propose a state feedback control law that actually solves our problem. Our work contributes to further generalization of the prior works on H_∞ control of uncertain systems.

Key Words : Uncertain nonlinear systems, Hamilton-Jacobi-Isaacs inequality, L_2 gain, H_∞ control

1. 서 론

지난 10 년간 H_∞제어 이론에 대한 많은 연구가 있었고 중요한 결과들이 발표되었다. [6]에서는 H_∞노음과 선형시스템의 최적 제어에 있어서 중요한 역할을 하는 대수 리카티 방정식(algebraic Riccati equation)과의 관계에 근거하여 상태변수 영역에서 선형시스템에 대한 H_∞제어이론이 정립되었다. 또한, 비선형 시스템에 대한 H_∞제어와 관련하여 많은 연구가 이루어지고 있다[1, 2, 5, 12]. 비선형시스템에 대한 H_∞제어 문제는 본질적으로 비선형 최적제어 문제[10]로 다루어질 수 있기때문에, 게임 이론을 이용한 많은 결과들이 제시되고 있다[1, 2]. 비선형시스템에 대한 H_∞제어문제는 비선형 최적제어 문제에서 도입되는 헤밀턴-자코비-이삭 부등식(Hamilton-Jacobi-Isaacs inequality)의 해의 존재여부에 달려있다. [2]에서는 비선형시스템의 소실 특성(dissipativeness)을 이용하여 헤밀턴-자코비-이삭 부등식(Hamilton-Jacobi-Isaacs inequality)의 해의 존재 여부를 밝혔다.

최근에는 불확실한 시스템(uncertain systems)에 대한 H_∞ 제어 문제들이 다루어지고 있다. [7, 8]에서는 불확실한 선형시스템에 대한 H_∞제어 문제에 있어서 해가 존재할 필요충분조건이 변형된 대수 리카티 부등식의 형태로 제시되었다. 가장 최근에는 불확실한 비선형시스템의 H_∞제어 문제가 [11]에서 다루어졌으며, 해가 존재할 충분조건으로서 변형된 형태의 헤밀턴-자코비-이삭 부등식(Hamilton-Jacobi-Isaacs inequality)이 제시되었다.

본 논문에서는 불확실한 비선형시스템에 대한 H_∞제어문제가 다루어진다. 본 논문은 앞에서 언급된 기존의 연구들, 특히 [7]을 비선형 시스템 경우로 확장한 것으로서 [7]과 [11]에 기인된 연구이나 다음과 같은 관점에서 [7]과 [11]에서 제시된 결과들을 보다 일반화한다. 첫째, [11]에서 다루어진 비선형시스템보다 일반적인 비선형시스템을 다룬다. 즉, 입력에도 불확실성이 있는 경우를 포함한다. 둘째, 비선형 시스템의 H_∞제어에 있어서 중요한 역할을 하는 헤밀턴-자코비-이삭 부등식(Hamilton-Jacobi-Isaacs inequality)의 해가 존재할 필요충분조건을 제시한다.

다음은 본 논문에서 사용될 용어들의 정의이다. 임의의 대칭인 행렬 $X, Y \in R^{n\times n}$에 대해서 $X > Y\ (X \geq Y)$은 $X - Y$가 양한정 행렬 (positive definite matrix) (준양한정 행렬(semi-positive definite matrix))임을 의미하고 I_n은 $n \times n$ 단위 행렬(identity matrix)을 의미한다. 함수 $V: R^n \to R$의 $x \in R^n$에서의 1차미분을 $\dot{V}(x) \triangleq \frac{\partial}{\partial x} V(x)$로 표시한다. x^T는 벡터 $x \in R^n$의 전치(transpose)를 나타내고 $\sqrt{x^T x}$ 은 $\| x \|$으로 표시한다. 반면, 상수 u의 절대값은 $| u |$으로 표시한다.

2. 문제 설정

본 논문에서 다음과 같은 불확실한 비선형시스템을 다룬다.

$$\Sigma : \begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \Delta f(x) + g_1(x)v + \{g_2(x) + \Delta g_2(x)\}u \\ y &= h(x) + d(x)u \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $x(t) \in R^n$은 상태변수, $u(t) \in R^l$은 입력, $v(t) \in R^m$은 외란(disturbance), $y(t) \in R^p$는 출력이다. 함수 f, g_1, g_2, h, d 은 정해진 함수이고, Δf와 Δg_2는 불확실 함수이다. 또한 함수 $f, \Delta f, g_1, g_2, \Delta g_2, h, d$은 R^n에서 연속 미분 가능하고 $f(0) = 0$, $h(0) = 0$이다.

문제를 풀기위해 선형시스템의 H_∞제어 [4, 7, 8]에서 도입된

* 正 會 員 : 翰林大 工大 電子工學科 專任講師 · 工博
** 正 會 員 : 서울大 工大 制御計測工學科 敎授 · 工博
接受日字 : 1995年 7月 24日
最終完了 : 1996年 1月 30日

가정들과 유사한 다음과 같은 가정을 한다.

가정 1 : 임의의 $x \neq 0$에 대하여 $l \times l$행렬 $d^T(x)d(x)$은 비특이(nonsingular)이다.

가정 2 : 불확실 함수 Δf 와 Δg_2는 다음과 같다

$$\Delta f(x) = H(x)F(x)E_1(x), \ \forall \ x \in R^n \tag{2.a}$$

$$\Delta g_2(x) = H(x)F(x)E_2(x), \ \forall \ x \in R^n \tag{2.b}$$

여기서 $H(x) \in R^{n \times i}$, $E_1(x) \in R^j$, $E_2(x) \in R^{j \times l}$은 기지(known) 행렬이고 $F(x) \in R^{i \times j}$은 불확실하지만 다음을 만족한다.

$$F^T(x)F(x) \leq I_j, \ \forall \ x \in R^n \tag{3}$$

그러면, 불확실한 비선형시스템 Σ에 대한 H_∞제어 문제는 $v = 0$일 때의 폐루우프시스템의 점근적 안정성과 주어진 $\gamma > 0$에 대하여 γ미만의 L_2이득(gain)을 보장하는 되먹임 제어법칙(feedback control law) $u = k(x)$를 구하는 문제이다. 비선형시스템의 H_∞노옴(norm)과 해밀턴-자코비-이삭 부등식(Hamilton-Jacobi-Isaacs inequality)과의 관계를 이용하여 다음과 같은 문제를 정의한다.

정의 1 : 만약, 임의의 $x \neq 0$과 식(3)을 만족하는 함수 F에 대하여 식(4)를 만족하는 함수 $k : R^n \to R^l$와 $V(0) = 0$인 양한정 함수(positive definite function) $V : R^n \to R$가 존재한다면, 불확실한 비선형시스템 Σ가 H_∞ 노옴 유계 조건을 보장하고 리아프노프 관점에서의 안정화 (stabilizable in the sense of Lyapunov with an H_∞-norm bound constraint γ)가 가능하다고 한다.

$$\begin{aligned} &V'(x)\hat{f}(x) + \hat{h}^T(x)\hat{h}(x) + \\ &\frac{1}{4\gamma^2}V'(x)\hat{g}(x)\hat{g}(x)^T V'(x)^T < 0, \ \forall \ x \neq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

여기서

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= f(x) + \Delta f(x) + \{g_2(x) + \Delta g_2(x)\}k(x) \\ \hat{g}(x) &= g_1(x) \\ \hat{h}(x) &= h(x) + d(x)k(x) \end{aligned} \tag{5}$$

이다.

앞의 정의 1 은 선형시스템 경우 [7]에서의 정의 2.2 를 비선형 시스템인 경우로 확장한 것이다. 정의 1 은 다음과 같은 점에서 비선형시스템의 H_∞제어 문제를 다룬 것이라고 볼 수 있다. 제어 입력 $u = k(x)$에 의해서 식(1)은 다음과 같은 폐루우프시스템이 된다.

$$\hat{\Sigma} : \begin{aligned} \dot{x} &= \hat{f}(x) + \hat{g}(x)v \\ y &= \hat{h}(x) \end{aligned} \tag{6}$$

이 시스템에 대하여 식(4)는 $x(0) = 0$인 경우 임의의 $v \in L_2[0, T]$와 식(3)을 만족하는 모든 F에 대하여 소실특성(dissipative property)에 해당하는 다음과 같은 부등식을 만족함을 보장하는 것을 알 수 있다[1~3].

$$\int_0^T y^T y \, dt < \gamma^2 \int_0^T v^T v \, dt, \ \forall \ T > 0 \tag{7}$$

즉, 함수 Δf와 Δg_2에 상관없이 식(6)으로 주어진 폐루우프시스템의 L_2이득이 γ미만이라는 것이다. 또한, 식(4)는 다음 부등식을 의미한다.

$$V'(x)\hat{f}(x) < 0, \ \forall \ x \neq 0 \tag{8}$$

따라서, 폐루우프시스템 $\dot{x} = \hat{f}(x)$, $\hat{f}(0) = 0$은 점근적으로 안정하다[9]. 이러한 맥락에서 해밀턴-자코비-이삭 부등식을 이용하여 H_∞제어 문제를 정의하는 것이 보다 명백하고 간결하다고 여겨진다.

3. 주요 결과

본 절에서는 정의 1에서 정의한 문제의 해가 존재할 필요충분 조건을 제시한다.

정리 1 : 불확실한 비선형시스템 Σ가 H_∞노옴 유계 조건을 보장하고, 리아프노프 관점에서의 안정화가 가능할 필요충분조건은 다음 부등식을 만족하는 양한정 함수 $V : R^n \to R$와 양함수(positive function) $\varepsilon : R^n \to R$이 존재하는 것이다.

$$\begin{aligned} &V'(x)f(x) + \varepsilon(x)\, V'(x)H(x)H^T(x)V'(x)^T \\ &+ \frac{1}{4\varepsilon(x)} E_1^T(x)E_1(x) \\ &+ \frac{1}{4\gamma^2} V'(x)g_1(x)g_1^T(x)V'(x)^T + h^T(x)h(x) \\ &- \left\{d^T(x)h(x) + \frac{1}{4\varepsilon(x)} E_2^T(x)E_1(x) + \frac{1}{2} g_2^T(x)V'(x)^T\right\}^T \\ &\times \left\{d^T(x)d(x) + \frac{1}{4\varepsilon(x)} E_2^T(x)E_2(x)\right\}^{-1} \\ &\times \left\{d^T(x)h(x) + \frac{1}{4\varepsilon(x)} E_2^T(x)E_1(x) + \frac{1}{2} g_2^T(x)V'(x)^T\right\} \\ &< 0, \quad \forall \ x \neq 0 \end{aligned} \tag{9}$$

그리고, 다음의 주어진 되먹임 제어 법칙은 정의 1 의 문제를 만족시키는 해이다.

$$\begin{aligned} u(t) &= k(x) \\ &= -\left\{d^T(x)d(x) + \frac{1}{4\varepsilon(x)} E_2^T(x)E_2(x)\right\}^{-1} \\ &\quad \times \left\{d^T(x)h(x) + \frac{1}{4\varepsilon(x)} E_2^T(x)E_1(x) + \frac{1}{2} g_2^T(x)V'(x)^T\right\} \end{aligned} \tag{10}$$

만약 식(9)를 만족하는 함수 ε과 V가 존재하지 않으면, 불확실한 비선형시스템 Σ에 대하여 원하는 H_∞성능을 만족시키는 제어법칙을 구하는 것은 거의 불가능하다. 따라서, 식(9)는 불확실한 비선형시스템의 H_∞제어에 있어서 중요한 역할을 한다.

불확실한 선형시스템의 경우 정리 1 은 [7]의 정리 3.1에 해당한다. 따라서 정리 1 은 [7]의 정리 3.1을 비선형시스템으로 확장한 결과라고 볼 수 있다. 그렇지만, 정리 1의 증명에서 알 수 있듯이 선형에서의 결과가 바로 쉽게 확장되지는 않는다.

반면, [11]에서는 처음으로 불확실한 비선형시스템의 H_∞제어 문제를 다루었으며 여기서 다루어진 시스템은 본 논문에서 다루는 불확실한 시스템의 특별한 경우에 해당한다. 첫째로 [11]에서는 입력에 불확실성이 없는 경우만을 다루었다. 즉, [11]에서는 불확실성을 다음과 같이 가정하였다.

$$\Delta f(x) = H(x)\delta(x), \quad \forall\ x \in R^n \tag{11.a}$$

$$\Delta g_2(x) = 0, \quad \forall\ x \in R^n$$

여기서 함수 $\delta : R^n \to R^i$는 확정함수이고, 확정 함수 $w : R^n \to R^i$에 의해서 다음과 같이 상한(upper bound)을 갖는다.

$$\|\delta(x)\| \le \|w(x)\|, \quad \forall\ x \in R^n \tag{12}$$

식(12)와 식(11.a)의 Δf는 항상 식(2.a)로 표시된다. [11]에서 제시된 변형된 해밀턴-자코비-이삭 부등식과 제어법칙은 $E_2(x) = 0$와 $E_1(x) = w(x)$로 하면, 식(9)와 식(10)으로부터 쉽게 구할 수 있다. 그러나, [11]에서 제시한 변형된 해밀턴-자코비-이삭 부등식은 충분조건이고 필요조건임은 밝히지 못했다. 본 절에서는 정의 1 에서 정의한 불확실한 비선형시스템에 대한 H_∞제어 문제의 필요충분 조건을 제시한다.

정리 1을 증명하기 위하여 이에 필요한 다음의 두 보조정리를 언급한다. 이는 [4]에서 불확실한 선형시스템을 해석하는 데 도입된 보조정리들을 비선형 시스템 경우로 확장한 것이다.

보조 정리 1 : 임의의 함수 $\alpha : R^n \to R^n$와 임의의 $x \in R^n$에 대하여 다음의 등식이 성립한다.

$$\begin{aligned}\max_{F^T(x)F(x)\le I_j} & |\alpha^T(x)H(x)F(x)[E_1(x)+E_2(x)k(x)]|^2 \\ &= \alpha^T(x)H(x)H^T(x)\alpha(x)[E_1(x)+E_2(x)k(x)]^T \\ &\quad \cdot [E_1(x)+E_2(x)k(x)]\end{aligned} \tag{13}$$

보조 정리 2 : 다음의 함수을 정의한다.

$$Y(x) = d^T(x)d(x) + \frac{1}{4\varepsilon(x)}E_2^T(x)E_2(x) \tag{14}$$

$$Z(x) = d^T(x)h(x) + \frac{1}{4\varepsilon(x)}E_2^T(x)E_1(x) + \frac{1}{2}g_2^T(x)V'(x)^T \tag{15}$$

그러면, 임의의 $x \in R^n$에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$k^T(x)Y(x)k(x) + 2Z^T(x)k(x) + Z^T(x)Y^{-1}(x)Z(x) \ge 0 \tag{16}$$

보조정리 1의 증명은 부록에 있으며, 보조정리 2의 증명은 자명하다. 이제 정리 1을 증명한다.

정리 1 의 증명

i) 충분 조건

식(9)를 만족하는 양한정 함수 $V : R^n \to R$와 양함수 $\varepsilon : R^n \to R$이 존재한다고 가정하자. 그러면, 임의의 u와 $x \in R^n$에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$\begin{aligned}&V'(x)H(x)F(x)[E_1(x)+E_2(x)u] \le \\ &\varepsilon(x)V'(x)H(x)H^T(x)V'(x)^T \\ &+\frac{1}{4\varepsilon(x)}[E_1(x)+E_2(x)u]^T[E_1(x)+E_2(x)u]\end{aligned} \tag{17}$$

되먹임 제어법칙 $u = k(x)$를 식(10)과 같이 선택하고 다음의 함수를 정의한다.

$$\begin{aligned}L_c(x) =\ & V'(x)\hat{f}(x) + \hat{h}(x)^T\hat{h}(x) + \\ & \frac{1}{4\gamma^2}V'(x)\hat{g}(x)\hat{g}(x)^TV'(x)^T\end{aligned} \tag{18}$$

그러면, 식(2.a), 식(2.b), 식(5), 식(9), 식(10), 식(17)과 식(18)로부터 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}L_c(x) &= V'(x)[f(x)+H(x)F(x)E_1(x) \\ &\quad + \{g_2(x)+H(x)F(x)E_2(x)\}k(x)] \\ &\quad + \frac{1}{4\gamma^2}V'(x)g_1(x)g_1^T(x)V'(x)^T \\ &\quad + h^T(x)h(x)+2h^T(x)d(x)k(x) \\ &\quad + k^T(x)d^T(x)d(x)k(x) \\ &\le V'(x)[f(x)+g_2(x)k(x)] \\ &\quad +\varepsilon(x)V'(x)H(x)H^T(x)V'(x)^T \\ &\quad + \frac{1}{4\varepsilon(x)}[E_1(x)+E_2(x)k(x)]^T \\ &\qquad \cdot[E_1(x)+E_2(x)k(x)] \\ &\quad +\frac{1}{4\gamma^2}V'(x)g_1(x)g_1^T(x)V'(x)^T \\ &\quad +h^T(x)h(x)+2h^T(x)d(x)k(x) \\ &\quad +k^T(x)d^T(x)d(x)k(x) \\ &= V'(x)f(x) + \varepsilon(x)V'(x)H(x)H^T(x)V'(x)^T \\ &\quad + \frac{1}{4\varepsilon(x)}E_1^T(x)E_1(x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{1}{4\gamma^2} V'(x)g_1(x)g_1^T(x)V'(x)^T + h^T(x)h(x) \\
&- [d^T(x)h(x) + \frac{1}{4\varepsilon(x)} E_2^T(x)E_1(x) \\
&+ \frac{1}{2} g_2^T(x)V'(x)^T]^T \\
&\times [d^T(x)d(x) + \frac{1}{4\varepsilon(x)} E_2^T(x)E_2(x)]^{-1} \\
&\times [d^T(x)h(x) + \frac{1}{4\varepsilon(x)} E_2^T(x)E_1(x) \\
&+ \frac{1}{2} g_2^T(x)V'(x)^T] \\
&< 0, \quad \forall\ x \neq 0
\end{aligned} \tag{19}
$$

식(18)의 정의로부터 앞 식은 부등식 (4)를 의미한다.

ii) 필요 조건

불확실한 비선형시스템 Σ가 H_∞노옴 유계 조건을 보장하고 리아프노프 관점에서의 안정화가 가능하다고 가정하자. 정의 1로부터 임의의 $x \neq 0$와 식(3)을 만족하는 F에 대하여 다음을 만족하는 함수 $k: R^n \to R^l$와 $V(0) = 0$인 양한정 함수 $V: R^n \to R$가 존재한다.

$$
\begin{aligned}
&V'(x)[f(x) + H(x)F(x)E_1(x) \\
&+ \{g_2(x) + H(x)F(x)E_2(x)\}k(x)] \\
&+ \frac{1}{4\gamma^2} V'(x)g_1(x)g_1^T(x)V'(x)^T \\
&+ [h(x) + d(x)k(x)]^T[h(x)+d(x)k(x)] < 0
\end{aligned} \tag{20}
$$

함수 $M(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$
\begin{aligned}
M(x) = &\ V'(x)[f(x)+g_2(x)k(x)] \\
&+ \frac{1}{4\gamma^2} V'(x)g_1(x)g_1^T(x)V'(x)^T \\
&+ [h(x)+d(x)k(x)]^T[h(x)+d(x)k(x)]
\end{aligned} \tag{21}
$$

식(3)과 식(20)으로부터 다음과 같은 부등식이 함수 M에 대하여 만족된다.

$$
\begin{aligned}
M(x) < &- \max_{F^T(x)F(x) \le I_j} V'(x)H(x)F(x) \\
&\cdot [E_1(x)+E_2(x)k(x)] \\
\le &\ 0, \quad \forall\ x \neq 0
\end{aligned} \tag{22}
$$

보조정리 1로부터 이 식은 임의의 $x \neq 0$에 대하여

$$
\begin{aligned}
|M(x)|^2 > &\max_{F^T(x)F(x) \le I_j} \\
&\cdot |V'(x)H(x)F(x)[E_1(x)+E_2(x)k(x)]|^2 \\
= &\ V'(x)H(x)H^T(x)V'(x)^T \\
&\cdot [E_1(x)+E_2(x)k(x)]^T[E_1(x)+E_2(x)k(x)]
\end{aligned} \tag{23}
$$

을 의미한다.

$$
\begin{aligned}
a(x) &= V'(x)H(x)H^T(x)V'(x)^T \\
b(x) &= \frac{1}{4}[E_1(x)+E_2(x)k(x)]^T[E_{1(x)}+E_2(x)k(x)] \\
S(x) &= |M(x)|^2 - 4\ a(x)b(x) \\
S_1(x) &= \frac{S(x)}{4\{b(x)+\delta\}}, \quad \delta > 0 \\
a_1(x) &= V'(x)H(x)H^T(x)V'(x)^T + S_1(x)
\end{aligned} \tag{24}
$$

를 정의하면, 식(23)과 식(24)로부터 다음 식들이 성립하는 것은 자명하다.

$$
\begin{aligned}
&a(x) \ge 0,\ a_1(x) > 0,\ b(x) \ge 0, \\
&S(x) > 0,\ S_1(x) > 0, \quad \forall\ x \neq 0
\end{aligned} \tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
|M(x)|^2 - 4\,a_1(x)b(x) &= |M(x)|^2 - 4\,a(x)b(x) - 4S_1(x)b(x) \\
&= S(x) - \frac{b(x)}{\{b(x) + \delta\}} S(x) \\
&= \frac{\delta}{b(x) + \delta} S(x) \\
&> 0, \qquad \forall\ x \neq 0
\end{aligned} \tag{26}
$$

함수 $\varepsilon: R^n \to R$을 다음과 같이 정의한다.

$$
\varepsilon(x) = -\frac{M(x)}{2a_1(x)}, \quad \forall\ x \neq 0 \tag{27}
$$

그러면, 식(22)와 식(24)~식(26)으로부터 함수 ε은 양함수이고 다음 부등식을 만족시킨다.

$$
|\varepsilon(x)|^2 a_1(x) + \varepsilon(x)\, M(x) + b(x) < 0, \quad \forall\ x \neq 0 \tag{28}
$$

식(24)와 식(25)로부터

$$
|\varepsilon(x)|^2 a(x) + \varepsilon(x)\, M(x) + b(x) < 0, \quad \forall\ x \neq 0 \tag{29}
$$

이 성립함을 알 수 있고, 식(21), 식(24), 그리고 식(29)로부터

$$
\begin{aligned}
&|\varepsilon(x)|^2 V'(x)H(x)H^T(x)V'(x)^T + \varepsilon(x)[V'(x)\{f(x) \\
&+ g_2(x)k(x)\} + \frac{1}{4\gamma^2} V'(x)g_1(x)g_1^T(x)V'(x)^T \\
&+ \{h(x) + d(x)k(x)\}^T\{h(x) + d(x)k(x)\}] \\
&+ \frac{1}{4}[E_1(x) + E_2(x)k(x)]^T[E_1(x) \\
&+ E_2(x)k(x)] < 0, \quad \forall\ x \neq 0
\end{aligned} \tag{30}
$$

이 성립한다. 따라서 이 부등식과 보조정리 2 로부터 식(9)가 성립함을 알 수 있다.

4. 결　론

본 논문에서는 불확실한 비선형시스템 Σ가 H_∞노옴 유계 조건을 보장하고 리아프노프 관점에서의 안정화가 가능할 필요 충분 조건을 변형된 해밀턴-자코비-이삭 부등식의 형태로 나타냈고, 이 문제를 해결하는 제어법칙을 구하였다. 본 논문의 결과들은 불확실한 시스템에 대한 H_∞제어에 있어서 기존 결과들을 일반화한 것이다. 특히, 정리 1의 증명에서 보면 알 수 있듯이 불확실한 비선형시스템의 H_∞제어문제는 본 논문에서 제시한 변형된 해밀턴-자코비-이삭 부등식을 만족하는 해의 존재 여부에 직접적으로 연관되어 있다.

부　록

보조정리 1의 증명

슈왈츠 부등식(Schwarz inequality)으로부터 임의의 $x \in R^n$에 대하여

$$\begin{aligned}&|\alpha^T(x)H(x)F(x)[E_1(x) + E_2(x)k(x)]|^2\\ &\le \alpha^T(x)H(x)H^T(x)\alpha(x)\ [E_1(x)\\ &\quad + E_2(x)k(x)]^T[E_1(x) + E_2(x)k(x)]\end{aligned} \tag{A.1}$$

이 성립한다. 이제 다음식을 만족시키는 행렬 $\hat{F}(x)$를 구한다.

$$\begin{aligned}&|\alpha^T(x)H(x)\hat{F}(x)[E_1(x) + E_2(x)k(x)]|^2\\ &= \alpha^T(x)H(x)H^T(x)\alpha(x)\ [E_1(x)\\ &\quad + E_2(x)k(x)]^T[E_1(x) + E_2(x)k(x)]\end{aligned} \tag{A.2}$$

먼저 다음의 두 함수를 정의한다.

$$\begin{aligned}\zeta(x) &= H^T(x)\alpha(x)\\ \eta(x) &= E_1(x) + E_2(x)k(x)\end{aligned} \tag{A.3}$$

만약, 어떤 x에 대하여 $\zeta = 0$이거나 $\eta = 0$이면, 식(A.2)가 성립하는 것은 자명하다. 따라서, $\zeta \neq 0$와 $\eta \neq 0$인 경우에 대하여 증명한다. 이제 행렬 $\hat{F}(x)$을 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{F}(x) = \frac{\zeta(x)\eta^T(x)}{\|\zeta(x)\|\ \|\eta(x)\|} \tag{A.4}$$

임의의 $\theta \in R^j$와 $x \in R^n$에 대하여

$$\begin{aligned}\theta^T\hat{F}^T(x)\hat{F}(x)\theta &= \frac{\theta^T\eta(x)\zeta^T(x)\zeta(x)\eta^T(x)\theta}{\|\zeta(x)\|^2\|\eta(x)\|^2}\\ &\le \frac{\|\theta^T\eta(x)\|\|\eta^T(x)\theta\|}{\|\eta(x)\|^2}\\ &= \theta^T\theta\end{aligned} \tag{A.5}$$

이 성립한다. 따라서

$$\hat{F}^T(x)\hat{F}(x) \le I_j,\ \forall\ x \in R^n \tag{A.6}$$

이 성립함을 알 수 있다. 이제 식(A.2)가 식(A.4)로 정의된 $\hat{F}$에 대하여 성립하는 것을 보이면 된다.

$$\begin{aligned}&|\alpha^T(x)H(x)\hat{F}(x)[E_1(x) + E_2(x)k(x)]|^2\\ &= (\zeta^T(x)\hat{F}(x)\eta(x))^2\\ &= \frac{(\zeta^T(x)\zeta(x))^2(\eta^T(x)\eta(x))^2}{\|\eta(x)\|^2\|\zeta(x)\|^2}\\ &= (\zeta^T(x)\zeta(x))(\eta^T(x)\eta(x))\end{aligned} \tag{A.7}$$

이고, 식(A.1)과 식(A.7)로부터 식(13)이 성립함을 알 수 있다.

참 고 문 헌

[1] A. Isidori and A. Astolfi, "Disturbance attenuation and H_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 9, pp. 1283~1293, Sept. 1992.

[2] A. J. Van der Schaft, "L_2 gain analysis of nonlinear systems and nonlinear H_∞ control," *IEEE Trans-actions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 6, pp. 770~784, June. 1992.

[3] D. Hill and P. Moylan, "The stability of nonlinear dissipative systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 21, pp. 708~711, 1976.

[4] I. R. Petersen and C. V. Hollot, "A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear sys-tems," *Automatica*, Vol. 22, pp. 397-411, 1986.

[5] J. A. Ball, J. W. Helton, and L. M. Walker, "H_∞ control for nonlinear systems with output feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, No. 4, pp. 546~558, April, 1993.

[6] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems," *IEEE Transactions on Auto- matic Control*, Vol. 34, pp. 831~847, 1989.

[7] L. Xie and C. E. de Souza, "Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time-varying un- certainty," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 8, pp. 1188~1191, Aug. 1992.

[8] L. Xie, M. Fu, and C. E. de Souza, "H_∞ control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 8, pp. 1253~1256, Aug. 1992.

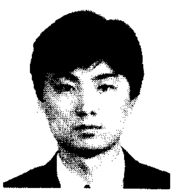
[9] M. Vidyasagar, *Nonlinear systems analysis : 2nd Edition*, Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1993.

[10] T. Basar and P. Bernhard, *H_∞ - optimal control and related minimax problems*, Berlin : Birkhauser, 1990.

[11] T. Shen and K. Tamura, "Robust H_∞ control of uncertain nonlinear system via state feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 4, pp. 766 ~768, April, 1995.

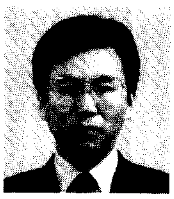
[12] W. Lin and C. I. Byrnes, "Discrete nonlinear H_∞ control with measurement feedback," *Automatica*, Vol. 31, pp. 419~434, 1995.

저 자 소 개



송 성 호 (宋 誠 鎬)

1964년 10월 2일생. 1987년 서울대 공대 제어계측과 졸업. 1991년 동 대학원 제어계측과 졸업(석사). 1995년 동 대학원 제어계측과 졸업(박사). 1995년 4월~1996년 2월 서울대학교 자동화시스템연구소 연구원. 1996년 3월 ~ 현재 한림대 공대 전자공학과 전임 강사



하 인 중 (河 仁 重)

1951년 3월 10일생. 1973년 서울대 공대 전자공학과 졸업. 1985년 미국 Univ. of Michigan 졸업(공박). 1990년~1991년 대한전기학회 제어계측연구회 위원장 역임. 현재 서울대 공대 제어계측공학과 교수