

멀티레이터 샘플링 문제로서의 뇌파신호 디스플레이에 관한 연구

최한고

= Abstract =

The Study of EEG Signal Display as a Multirate Sampling Problem

Han Go Choi

The display of biological signals in raster scan monitors often involves a multirate sampling operation which consists of decimation and interpolation. All electroencephalographic (EEG) samples of 10 to 30 seconds (2,500 to 7,500 samples at 250[Hz] sampling frequency) must be displayed in the computer screen to keep the aspect ratio of the paper polygraph output. Since the current affordable display technology plots at most 2,000 pixels per row, some signal samples need to be discarded. This paper studies methods to perform this operation characterizing them from the signal processing viewpoint and compares the display quality among several decimation techniques. Experimental results show that a nonlinear operation such as the peak detection method could be preferable to the canonical linear filtering to reduce aliasing.

Key words : Signal display, Electroencephalography, Multirate sampling, Peak detection algorithm

서 론

샘플링을 변환의 필요성이 여러 분야에서 요구되고 있는데, 낮은 전송율로 음성신호를 전송하고 높은 샘플링율로 음성신호를 재생하거나, 근본적으로 다른 샘플링율로 얻어진 디지털 신호코드 형태사이의 변환등에 이용되고 있다¹⁾. 본 논문에서는 뇌파신호를 컴퓨터 모니터에 디스플레이(display)하는 경우에 멀티레이터(multirate) 샘플링 응용을 다루고 있다. 의료계에서는 보통 10초부터 30초간의 뇌파신호가 종이 한장 크기에 기록되는데 같은 양의 뇌파신호를 디스플레이 화소(pixel)수가 한정된 컴퓨터 모니터에 충실하게 나타내고자 할 때 샘플링율의 변환이 필요하다. 현재 이용 가능한 컴퓨터 모니터의 가로줄의 화소수가 대부분 2000보다 작기 때문에 30초간의 뇌파신호를 250[Hz]의 주파수로 샘플링할 경우 7,500개가 샘플링되므로 실제적으로 3.75 점들중 한 개만이 디스플레이하게된다. 따라서 저해상도 모니터에 한장의 paper polygraph에 상응하는 신호를 디스플레이 하거나, 많은

양의 신호를 모니터에 표시할 때 단순히 샘플링율을 낮추는 방법을 적용할 경우 신호의 주파수 성분이 중첩되는 앤리에싱(aliasing) 현상에 의해 신호의 왜곡이 발생될 수 있음을 예측할 수 있으며 앤리에싱에 의한 결과는 모니터에서 직접 확인할 수 있다.

이를 해결하기 위해 멀티레이터 샘플링 이론을 직접 적용할 경우 단순 샘플과정에서 발생되는 앤리에싱 현상은 극복될 수 있으나, 어떤 임계값 이상에서는 여전히 신호의 왜곡이 발생된다. 본 논문의 목적은 임계값 부근에서 이러한 현상을 감소시킬 수 있는 방법을 제안하고 단순 샘플방법이나 멀티레이터 샘플링 이론을 적용했을 때의 결과들과 서로 비교를 통해 제안된 방법의 유용성을 입증하고자 한다. 본 논문에서 제안한 방법은 멀티레이터 샘플링의 데시메이션 과정을 일부 수정한 방법, 즉, 최대치 탐지와 같은 비선형 알고리즘을 이용한 샘플링 방법으로서 연구 결과에 의하면 선형특성의 필터링을 이용한 일반적인 샘플링 방법보다 낮은 샘플링율에서 발생되는 앤리에싱 문제를 극복하는데 더 효과적임을 보여주었다.

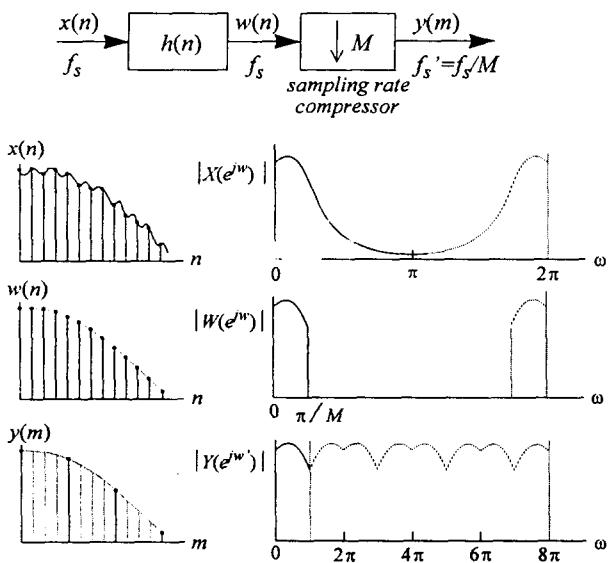


그림 1. M 배 데시메이션에 대한 그래프 설명
Fig. 1. Graphical description for decimation by a factor M

멀티레이터 샘플링

멀티레이터 신호처리는 샘플링율의 변화를 다루는 분야로서 샘플링 주파수를 정수배 만큼 낮추는 신호처리 과정을 데시메이션(decimation)이라 부르고 이와 반대로 샘플링 주파수를 증가시키는 과정을 보간(interpolation)이라고 한다^{2~4)}.

데시메이션 : 신호 $x(n)$ 에서 모든 M 번째 샘플점들만을 취하기 때문에 새로운 샘플링 주파수 $f_s' (=1/T')$ 은 원 신호의 샘플링 주파수 $f_s (=1/T)$ 에 비해 $1/M$ 만큼 감소된다.

$$f_s' = 1/T' = 1/(MT) = f_s/M \quad (1)$$

데시메이션된 신호에 나타나는 최고 주파수가 $1/M$ 만큼 감소되었음을 의미하므로 $x(n)$ 에 존재하는 최고 주파수가 $f_s/(2M)$ 보다 클 때 데시메이션 과정은 π/M 보다 큰 주파수 성분들이 기저밴드(baseband)로 중첩되는 앤리에싱을 발생시킨다. 따라서 앤리에싱을 피하기 위해 원 신호는 데시메이션하기 전에 $f_s/(2M)$ 의 차단 주파수를 갖는 이상적인 저역통과 필터 $H(e^{j\omega})$ 를 사용하여 $x(n)$ 을 필터링하는 것이 필요하다 (그림 1).

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq (2\pi f_s T)/2 = \pi/M \\ 0, & 그 외 구간 \end{cases} \quad (2)$$

데시메이션 과정에서 신호의 일부 정보가 손실될 수도 있으나 처리하고자 하는 신호의 관심 주파수들이 필터의

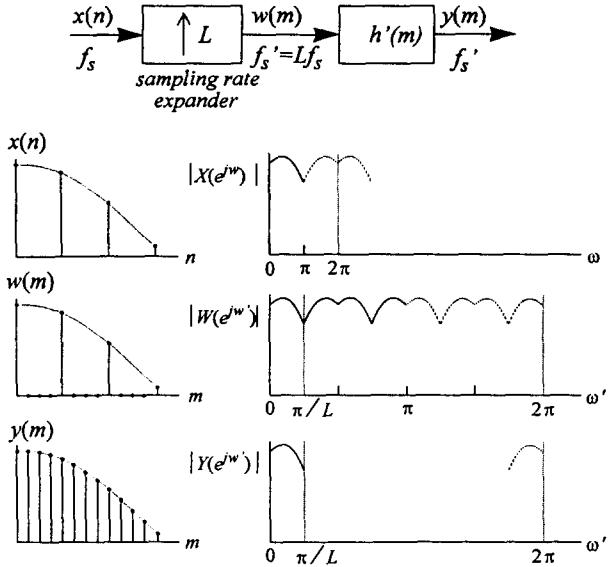


그림 2. L 배 보간에 대한 그래프 설명
Fig. 2. Graphical description for interpolation by a factor L

통과대역 내에 있는 신호일 경우 손실없이 보존된다. 필터의 임펄스 응답을 $h(n)$ 으로 표기할 때 필터링된 출력 $y(m)$ 과 $|Y(e^{j\omega'})|$ 은 다음과 같다.

$$y(m) = w(Mm) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(Mm-k)x(k) \quad (3)$$

$$Y(e^{j\omega'}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(e^{j(\omega' - 2\pi l)/M}) \quad (4)$$

그림 1은 데시메이션 과정과 $M=4$ 일 때 시간 및 주파수 영역에서 파형을 보여주고 있다.

보간 : 원 신호의 샘플점들 사이에 영의 크기를 갖는 $(L-1)$ 개의 새로운 샘플점들을 추가함으로써 새로운 샘플링 주파수 f_s' 는 원 샘플링 주파수 f_s 에 비해 L 배 만큼 증가된다.

$$f_s' = 1/T' = 1/(T/L) = Lf_s \quad (5)$$

그림 2는 보간과정과 $L=4$ 인 경우의 파형으로서 스펙트럼 영역에서 표시된 것과 같이 4배 만큼 보간된 $w(n)$ 의 스펙트럼은 기저밴드 ($-\pi/L \sim \pi/L$) 뿐만 아니라 원래의 샘플링 주파수의 고조파에 ($\pm 2\pi/L, \pm 4\pi/L, \dots$) 중심을 두고 기저밴드와 똑같은 주파수 스펙트럼이 L 번 반복되는 스펙트럼(image spectrum) 성분들도 포함하고 있다. 보간된 신호에서 image 성분들을 제거하여 원 신호와 동일한 스펙트럼을 얻기 위해서는 다음과 같은 이상적인 저역통과 필터(anti-imaging 필터)를 사용하여 신호 $w(m)$ 을 필터링하는 것이 필요하다.

$$y(n) = [x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)]/4$$

$$H(Z) = [1 + Z^{-1} + Z^{-2} + Z^{-3}]/4$$

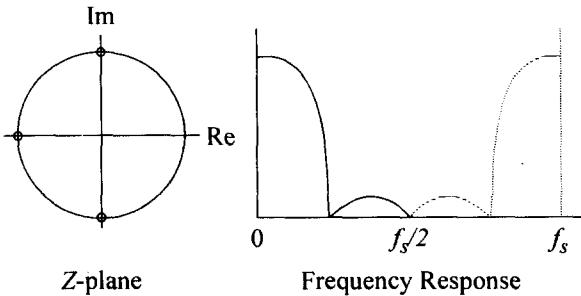


그림 3. $M=4$ 일 때 신호평균에 대한 Z -영역 표시와 주파수 응답

Fig. 3. Z -domain representation and frequency response of signal averaging for $M=4$

$$|H(e^{j\omega'})| = \begin{cases} G, & |\omega'| \leq (2\pi f_s T')/2 = \pi/L \\ 0, & 그 외 구간 \end{cases} \quad (6)$$

$|H(e^{j\omega'})|$ 의 임펄스 응답을 $h'(n)$ 으로 나타낼 경우 $y(m)$ 과 $Y(e^{j\omega'})$ 은 다음과 같다.

$$y(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h'(m-k)w(k) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h'(m-k)w(k/L), k/L = \text{정수} \quad (7)$$

$$Y(e^{j\omega'}) = \begin{cases} GX(e^{j\omega'L}), & |\omega'| \leq \pi/L \\ 0, & 그 외 구간 \end{cases} \quad (8)$$

컴퓨터 모니터상에 신호의 visualization

많은 양의 신호를 압축하여 표시하는데 가장 간단한 방법으로는 M 샘플 중 1개만 선택하여 디스플레이 하는 것이다. 이 방법을 사용할 경우 데시메이션 과정에서 설명되었듯이 $f_s/(2M)$ 보다 높은 주파수 성분들이 낮은 밴드로 중첩되어 신호의 왜곡을 초래하는 앤리에싱 현상이 발생되므로 디스플레이 문제를 해결할 수 없다. 예를 들면 샘플 주파수가 250[Hz]일 때 30초 동안 뇌파신호의 샘플된 값들을 디스플레이 할 경우, 디스플레이의 해상도를 1500 화소로 가정한다면 5개의 샘플 중 단지 한 개만이 디스플레이 될 수 있다. 이 사실은 구분될 수 있는 최고 주파수가 $125/5=25$ [Hz]가 되므로 뇌파신호 중 beta 활동신호와 근육신호의 artifact 주파수 범위를 벗어나게 되므로 이를 신호들에 대한 정보는 보존될 수 없을 뿐만 아

니라 25[Hz]보다 높은 신호성분들은 기저밴드속으로 흡수되므로 저주파수 신호성분들의 정확한 분석도 어렵게 된다.

일반적으로 많이 사용하고 있는 방법은 신호 $x(n)$ 을 디스플레이하기 전에 M 개의 샘플값들을 평균하는 방법이다. 평균신호 $y(n)$ 과 주파수 응답 $Y(e^{j\omega})$ 는

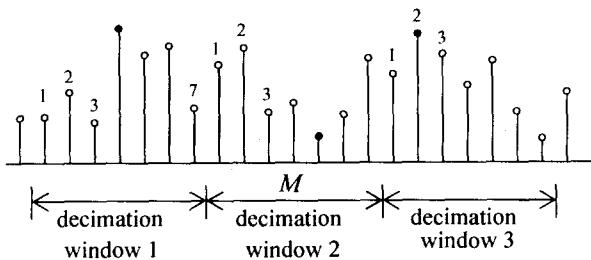
$$y(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x(n-k) \quad (9)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(M-1)/2} \quad (10)$$

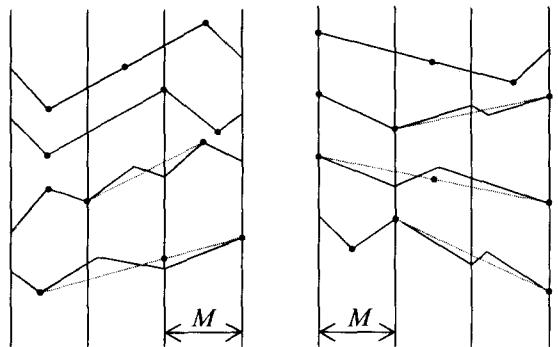
으로서 저역통과 필터링에 해당되며 $0 \sim f_s/M$ [Hz] 주파수 범위에 있는 신호 성분들의 디스플레이 충실도를 향상 시킨다. 데시메이션 비율이 우수값일 경우, $kf_s/M (k=1, 2, \dots, M-1)$ 에서 영점(zero)을 갖으며, 특히 $f_s/2$ 에서 항상 영점을 포함하는 저역통과 FIR(Finite Impulse Response) 필터를 실현한다. 이러한 필터는 대략 f_s/M 의 밴드폭을 갖고 있으며 이 밴드폭은 정현파형의 한 arcade와 아주 유사한 통과대역 특성을 나타낸다⁵⁾. 데시메이션 비율이 기수값일 경우, 영점은 kf_s/M 에 위치하고 있으나 $f_s/2$ 에서 영점은 존재하지 않는다. 그러므로 작은 값의 데시메이션 비율을 사용할 때 우수값의 M 을 사용하여 실현한 필터의 특성이 기수값의 M 을 사용한 경우에 비해 유리하다. 그림 3은 $M=4$ 인 경우를 보여주고 있다.

신호의 visualization 문제는 멀티레이터 샘플링 이론을 직접 적용하여 해결될 만큼 간단하지 않다. 전문가의 육안으로 느끼는 영향을 감안할 때 앤리에싱과 밴드폭의 감소문제를 절충할 수 있는 확실한 방법은 없다. 관점에 따라서는 약간의 앤리에싱은 인정하고 높은 주파수의 신호성분들이 감쇄없이 디스플레이하는 것이 더 바람직할 수도 있다. 본 논문에서는 필터링의 특성과 육안으로 판단할 때 신호의 디스플레이 충실도와의 관계를 조사하기 위해서 원 신호를 필터링하는 몇 가지 방법들을 비교하고자 한다.

이를 실현하기 위해 원 신호를 몇 가지 가능한 데시메이션 방법들을 사용하여 M 만큼 데시메이션시킨다. 데시메이션 방법으로는 $f_s/(2M)$ 의 차단주파수를 갖는 FIR 필터를 사용하여 멀티레이터 샘플링 이론에 근거를 둔 정상적인 데시메이션 방법과 데시메이션 구간에서 신호의 특성을 가장 잘 나타낼 수 있는 정점(최대 및 최소점)을 선택하는 피크(peak) 탐지방법, 그리고 간격 M 만큼 일정하게 떨어진 샘플값만을 단순히 취하는 방법들을 사용하였으며, 본 논문에서는 이러한 방법들은 “표준 데시메이터 (canonical decimator)”, “피크 데시메이터 (peak decimator)”, 그리고 “단순 데시메이터 (straight decimator)”로 각각 명명되었다.



(a) Straight decimation and detection of peak points



(b) Examples of representative peak points

그림 4. 정수 M 에 의한 단순 데시메이터와 피크 데시메이터의 예

Fig. 4. Examples for straight and peak decimator by an integer factor M

피크 데시메이터는 데시메이션 창(window), M 에 속하는 모든 시간 간격에서 피크 탐지 알고리즘⁷⁾을 사용하여 정점들을 결정한 후 실질적으로 각 창에서의 신호를 대표할 수 있는 피크점들을 찾는 방법이다. 이러한 피크점들의 집합이 데시메이션된 샘플점들에 해당된다. 그림 4(a)는 데시메이션 창내에서 신호의 정점들을 보여주고 있으며 (검게 표시된 샘플점들), 이러한 정점들의 분포로부터 데시메이션 구간을 대표할 수 있는 새로운 피크점들의 탐색은 현재의 데시메이션 창내의 정점과 그 이전과 이후의 창내의 정점들을 근거로 하여 실험에 의해 경험적으로 구해졌는데, 주파수 정보를 보존하면서 신호의 평활화를 이루기 위해 조사되는 구간들에서 신호의 변환점인 최대점과 최소점을 보존하고 이를 사이에서는 기울기의 평균을 취하는 원칙에 따라서 결정되었다. 본 연구에서는 대략 50개의 서로 다른 방법이 사용되었으며 그림 4(b)는 새로운 피크 점들에 대한 예를 보여주고 있다.

단순 데시메이터는 데시메이션 창에서 일정한 시간 간격에 있는 샘플점들을 규칙적으로 선택하는 가장 간단한 방법으로서 M 개의 서로 다른 샘플점들로 구성된 집합 중

하나가 된다. 그림 4(a)는 $M=7$ 인 경우에 데시메이션된 샘플점들을 보여주고 있다. 예를 들면 데시메이션 창내에서 첫 번째 샘플점들로 구성되어 있는 샘플들의 집합(그림에서 '1'로 표시)과 두 번째 샘플점들로 구성되어 있는 샘플들의 집합(그림에서 '2'로 표시) 등 7개의 서로 다른 샘플점들의 집합이 구해질 수 있다. 그러므로 단순 데시메이터는 선택된 샘플점에 따라서 보간된 결과는 데시메이션 창마다 서로 다를 수가 있다.

데시메이션된 신호로부터 원 신호를 재생시키기 위해 위의 3가지 방법들에 대해 같은 보간과정을 사용하여 보간된 결과를 서로 비교하였다. 보간과정에서는 데시메이션 과정에서와 같은 배율 M 배 만큼 보간시켰고, anti-imaging 저역통과 필터는 표준 데시메이터에서 사용된 필터와 동일한 필터를 사용하였다. 표준 데시메이터에서 사용된 FIR 저역통과 필터는 Parks과 McClellan 알고리즘⁶⁾을 이용하여 좁은 변이대역을 갖도록 설계하였으며 필터 계수의 차수는 31이다. 차단 주파수, $f_c = f_s / (2M)$ 으로서 $f_s = 250[\text{Hz}]$ 이므로 데시메이션 비율 M 값에 대응되는 차단주파수는 다음과 같다: $M=2$ $f_c = 62[\text{Hz}]$, $M=3$ $f_c = 42[\text{Hz}]$, $M=4$ $f_c = 31[\text{Hz}]$, $M=6$ $f_c = 21[\text{Hz}]$, $M=10$ $f_c = 12[\text{Hz}]$.

실험 결과

뇌파신호는 여러 개의 활동신호로 구성되어 있는데 본 논문에서 사용된 시험 데이터는 alpha, sigma와 beta 활동신호로서 신호의 최소 크기와 최소 혹은 최대 주파수 범위에 의해 정의된다⁵⁾: alpha(6-14[Hz]), sigma(9-16[Hz]), 그리고 beta (14-31[Hz]). 이 정의를 근거로 하여 데이터 파일로부터 육안으로 한 종류의 뇌파 활동신호를 선정하고 신호크기와 주파수 성분을 조사한 후 선정된 신호부분을 여러 번 반복함으로써 충분히 긴 시간동안 지속되는 신호로 만든 다음 시험하였다.

그림 5~8은 활동신호들에 대한 데시메이션과 보간된 결과들을 보여주고 있으며 데시메이터 방법들에 대한 디스플레이 평가는 보간된 결과들에 대해서 조사되었다. 그림 5는 $M=6$ 일 때 alpha(9[Hz]) 활동신호에 대한 결과로서 단순 데시메이터의 경우 완벽하지는 않으나 모든 데시메이션 방법들이 alpha 활동신호를 큰 왜곡없이 디스플레이하고 있음을 보여주고 있다. 이 사실은 낮은 주파수의 뇌파신호들은 정확하게 재생될 수 있음을 의미한다. 실험에 의하면 시험신호가 sigma(12[Hz]) 활동신호이고 $M=6$ 일 때 가장 우수한 데시메이터는 피크 데시메이터 이었으며 다른 데시메이터들도 여전히 활동신호를 만족스럽게 표시하였다.

그림 6은 $M=6$ 에서의 beta(21[Hz]) 활동신호에 대한

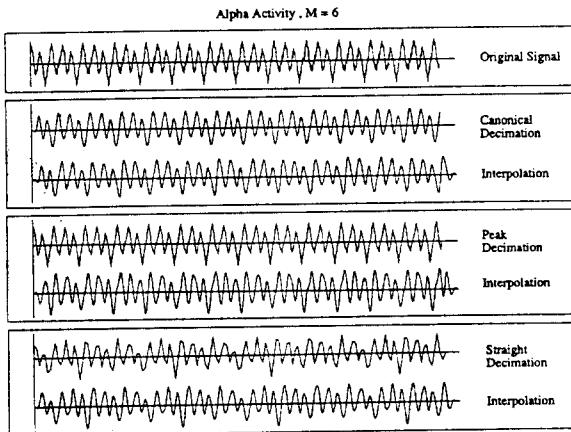


그림 5. $M=6$ 일 때 3가지 데시메이션 방법들에 대한 alpha 활동신호의 디스플레이

Fig. 5. Display of alpha activity by a factor $M=6$ for 3 different decimation methods

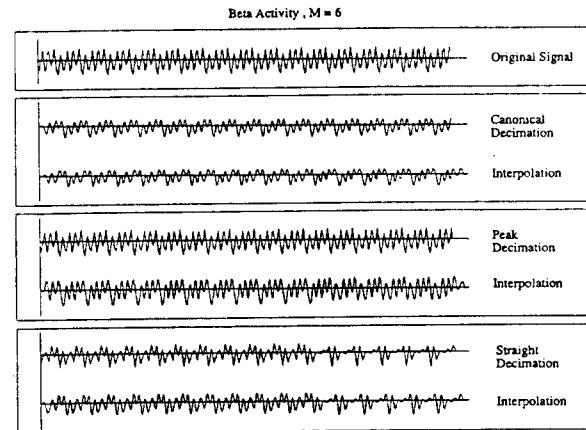


그림 6. $M=6$ 일 때 3가지 데시메이션 방법들에 대한 beta 활동신호의 디스플레이

Fig. 6. Display of beta activity by a factor $M=6$ for 3 different decimation methods

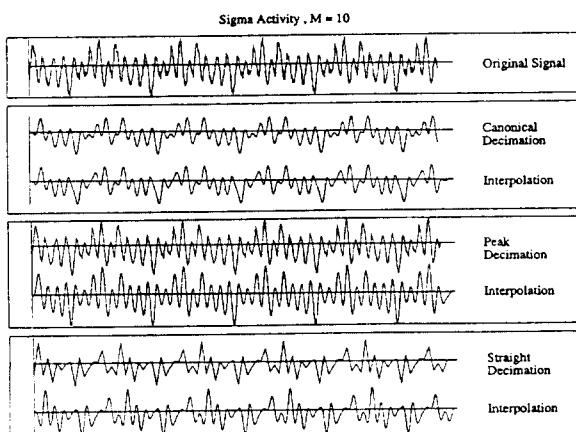


그림 7. $M=10$ 일 때 3가지 데시메이션 방법들에 대한 sigma 활동신호의 디스플레이

Fig. 7. Display of sigma activity by a factor $M=10$ for 3 different decimation methods

것으로, $f_s' = 41.7[\text{Hz}]$ 가 Nyquist 샘플링율 $2f_{\max} = 42 [\text{Hz}]$ 과 거의 동일한 주파수를 갖는 경우로서 단순 데시메이터는 이미 파형의 왜곡을 나타내었으며 표준 데시메이터는 파형의 크기를 감쇄시키는 반면 주파수 성분은 보존되었다. 피이크 데시메이터는 전반적으로 신호크기와 주파수면에서 모두 정확한 파형을 재생시켰다.

그림 7은 $M=10$ 일 때 sigma 활동신호에 대한 결과로서 여기서도 ($f_s' = 25[\text{Hz}]$) $\cong (2f_{\max} = 24[\text{Hz}])$ 이며 이 경우에도 피이크 데시메이터는 우수한 기법으로 나타났으며, 표준 데시메이터는 왜곡이 발생되는 현상을 보여주고 있으며, 단순 데시메이터는 활동신호를 크게 왜곡시켰을 뿐만 아니라 사용된 샘플점들의 위치에 의존하였다. 실험에 의하면 alpha 이하의 활동신호는 $M=10$ 이하일 때 3

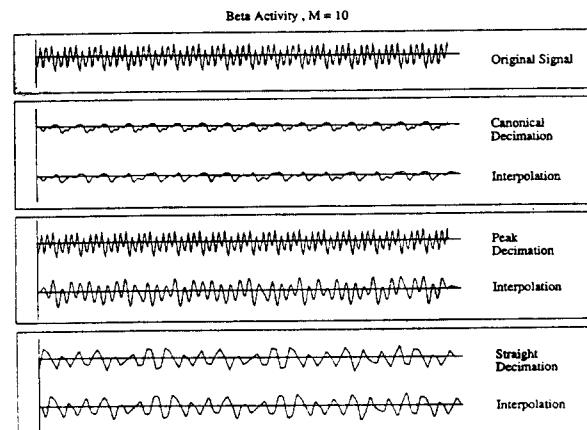


그림 8. $M=10$ 일 때 3가지 데시메이션 방법들에 대한 beta 활동신호의 디스플레이

Fig. 8. Display of beta activity by a factor $M=10$ for 3 different decimation methods

가지 방법 모두 충실히 표시하였다.

그림 8은 $M=10$ 일 때 beta 활동신호에 대한 결과로서, ($f_s' = 25[\text{Hz}]$) $< (2f_{\max} = 42[\text{Hz}])$ 이므로 Nyquist율보다 낮은 경우인데 피이크 데시메이터가 다소 우수하다 하더라도 이 경우 3가지 데시메이터 방법 모두 신호를 재생시킬 수 없음을 보여주었다.

일반적으로 데시메이터 신호가 파형주기당 5-6개의 샘플점보다 더 많은 점들을 갖도록 데시메이션 비율이 정해질 때 3가지 데시메이터 방법으로부터 모두 만족스러운 결과를 얻을 수 있었다. 표준 데시메이터는 신호크기를 감소시키는 경향이 있으나 주파수 성분은 변화되지 않았으며 단순 데시메이터는 국부적인 왜곡을 일으킬 수 있으나 그 결과는 여전히 양호하였다. 주기당 샘플점들의 수

표 1. 데시메이션 비율과 Nyquist 비율에 따른 데시메이터의 특성

Table 1. Characteristics of decimators based on decimation ratio and Nyquist rate

데시메이터	$M < 2 \cdot NL$	$M \approx NL$
파이크 데시메이터	• 양호	• 양호
표준 데시메이터	• 신호크기에 있어서 작은 감쇄 • 주파수 성분의 보존	• 신호크기에 있어서 큰 감쇄 • 주파수 성분의 보존
단순 데시메이터	• 국부적 왜곡발생	• 시간과 주파수 영역에서 왜곡

M : 데시메이션 비율, NL : Nyquist 한계(주기당 2 샘플)

가 Nyquist 한계치(주기당 2 샘플)에 가까워질수록 단순 데시메이터는 신호크기와 주파수 왜곡이 발생되었으며 표준 데시메이터는 신호의 주파수가 보존된다는 점에서 볼 때 좀더 나은 데시메이터로 간주될 수 있으나 큰 폭의 신호크기 감쇄가 일어난 반면 파이크 데시메이터는 여전히 좋은 결과를 보여 주었다. 물론 Nyquist 한계치보다 적은 샘플링일 경우 모두 왜곡된 신호를 초래하였다. 표 1은 Nyquist 한계치와 데시메이션 비율과의 관계에 대해서 데시메이터들의 특성을 설명하고 있다. 특히한 점은 데시메이션 비율에 의한 샘플링 주파수가 Nyquist 한계치에 접근함에 따라 파이크 데시메이션은 여전히 파형의 특성을 보존하고 있다는 사실이다.

결 론

본 논문의 목적은 뇌파신호를 모니터에 디스플레이할 때 단순한 샘플방법이나 멀티레이터 샘플링 이론으로는 어떤 임계값 부근에서 신호의 왜곡이 발생하므로 이러한 현상을 감소시키기 위해 멀티레이터 샘플링 개념을 일부 수정한 방법을 제시하고 다른 샘플링 방법들과의 특성을 비교하는데 있다. 실험 결과에 의하면 샘플링에 대한 이론적인 한계치에 접근함에 따라 더 정확한 신호의 재생, 즉, 파형 디스플레이의 충실도 관점에서 비교해 볼 때 비선형 기법인 파이크 데시메이터는 다른 방법보다 우수하였다. 또한 이를 이용하면 데시메이션 구간에서 평균적으로는 Nyquist 샘플율을 초과하지 않으나 일시적으로 이 한계치를 초과하는 신호에 대해 파이크 데시메이터 방법을 사용할 수 있으리라 판단된다. 이 경우 재생된 파형을 원신호와 비교해 볼 때 전체적으로 신호크기에 대한 오차는 발생할 수가 있으나 주어진 구간 내에서 신호의 주파수 정보를 간직하고 있는 최적의 샘플점을 취함으로써 한계치 부근에서도 파이크 데시메이션을 이용할 수 있다.

샘플점의 수가 Nyquist 한계치에 가까울 때 간단하지 않다.

왜냐하면 전체적으로 그리고 국부적으로 신호의 특성을 대표할 수 있는 샘플점들을 취할 때 선정될 가능성이 높은 샘플점들이 많다는 사실이다. 따라서 본 논문에서 사용된 단순한 조사방법 보다는 오차를 최대한 줄일 수 있고 신호특성을 간직할 수 있는 방법, 즉, 반복에 의한 최적화 방법등 보다 체계적인 파이크 선정방법이 개발되면 신호의 충실도를 향상시킬 수 있다.

참 고 문 헌

- Rabiner, L.R. and Crochere, R.E., "A novel implementation for narrowband FIR digital filters", IEEE Trans. on ASSP, ASSP-23, No. 5, pp. 457-464, 1975.
- Crochere, R.E. and Rabiner, L.R., "Multirate digital signal processing", Prentice-Hall, Inc., N.J., 1983.
- Roberts, R.A. and Mullis, C.T., "Digital signal processing", Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1987.
- Cunningham, E.P., "Digital Filtering : An introduction", Houghton Mifflin company, Boston, 1992.
- Principe, J.C. and Smith, J.R., "Design and implementation of linear phase FIR filters for biological signal processing", IEEE Trans. on Biomed. Eng., Vol. BME-33, No. 6, pp. 550-559, 1986.
- Parks, T.W. and McClellan, J.H., "Chebyshev approximation for nonrecursive digital filters with linear phase", IEEE trans. Circuit Theory, Vol. CT-19, pp. 189-194, 1972.
- Skordalakis, E., "Recognition of noisy peaks in ECG waveforms", Computers and Biomedical Research, Vol. 17, pp. 208-221, 1984.
- Principe, J.C. and Smith, J.R., "SAMICOS-A sleep analyzing microcomputer system", IEEE Trans. on Biomedical Engineering, Vol. BME-33, No. 10, pp. 935-941, 1986.