

〈논 문〉

축대칭 경계적분법에 의한 항공기 가스터빈 로터디스크 구조해석에 관한 연구

공창덕* · 정석주**

(1996년 3월 11일 접수)

A Study on Structural Analysis for Aircraft Gas Turbine Rotor Disks Using the Axisymmetric Boundary Integral Equation Method

Chang Duk Kong and Suk Choo Chung

Key Words : Axisymmetric Boundary Integral Equation Method(축대칭 경계적분법), Turbine Rotor Disk(터빈 로터디스크), Low Cycle Fatigue Life(저주기 피로수명), Critical Speed(임계속도)

Abstract

A design process and an axisymmetric boundary integral equation method for precise structural analysis of the aircraft gas turbine rotor disk were developed. This axisymmetric boundary integral equation method for stress and steady-state thermal analysis was improved in solution accuracy by applying an implicit technique for Cauchy principal value evaluation, a subelement technique for weak singular integral evaluation and a double exponential integral technique for internal point solution near boundary surfaces. Stresses, temperatures, low cycle fatigue lives and critical speeds for the turbine rotor disk of the thrust 1421 N class turbojet engine were analysed in a practical calculation model problem.

1. 서 론

항공기 가스터빈의 로터디스크는 터빈 블레이드와 마찬가지로 엔진의 수명을 좌우하는 중요한 구성품으로, 가스터빈의 블레이드 경우는 기능상 그 형상 결정이 대부분 공력적인 변수에 의해 좌우되는 반면, 터빈디스크의 형상은 구조적인 응력분포에 의해 형상이 결정되며 최종적으로 회전축의 진동 또는 임계속도에 의해 수정되어진다. 터빈 디스크는 블레이드에 비해 비교적 낮은 온도하에 운용

되므로 크리프(creep)현상에 의한 파단보다는 매우 높은 응력하에 작동되는 피로파괴의 형태를 보인다. 따라서 디스크의 피로수명은 디스크내에서 발생하는 최대 응력에 의해 좌우되므로 요구되는 적절한 피로수명을 얻기위해서 과도한 응력이 디스크내에서 나타나지 않도록 디스크의 형상을 설계해야 한다.

터빈 디스크에서 발생하는 중요한 응력은 고속회전에 의한 디스크 림부분에서 블레이드에 의해 발생하는 응력과 디스크 자체 질량에 의해 생기는 원심응력이며, 또한 터빈을 통과하는 고온가스에 의해 림부분으로부터 디스크 중심으로 열이 전달되면서 발생하는 온도 차이에 의한 열응력이다. 이 열

*회원, 조선대학교 우주항공공학과

**회원, 서울산업대학교 기계설계학과

응력은 정상상태 열응력과 과도상태의 열응력으로 구분되며 일반적으로 과도상태 열응력이 더 크다고 볼 수 있으나 터빈 디스크에서는 원심력이 지배적이므로 회전속도가 최대가 되어 복합응력이 최대가 될 때에는 작동시간이 어느정도 경과한 뒤이므로 열응력은 정상상태로 볼수있다.

일반적으로 디스크 중심부분에 구멍이 있는 경우는 이 구멍(bore) 부분에서 최대 응력이 발생하지만 구멍이 없고 볼트구멍이 있는 경우 볼트 주위에 발생하며, 림부분에 블레이드를 끼기위한 슬롯(slot)이 있는 경우 이 주위에 응력 집중이 생기며 이를 고려하여야 한다.

전술한 바와 같이 터빈 디스크는 림하중, 원심하중, 열하중이 복합적으로 작용하는 축대칭구조물로서 적절한 수명이 요구된 형상을 설계하기 위해 정확한 응력해석 방법이 필요하다.

터빈 로터디스크와 같은 축대칭 구조물을 응력해석할 수 있는 여러가지 수치해석 방법들 중 경계적분법(boundary integral equation method; BIE)은 그동안 수학적 복잡성과 기하학적 제한성때문에 널리 사용되지 못하였으나 입력 자료량과 계산시간의 감소로 인한 경제성이 타 수치적 해석방법 보다는 비교적 높아, 최근에 와서 활발히 연구되고 있다.

축대칭 구조물의 경계적분법은 Kermadis⁽¹⁾와 Mayr⁽²⁾에 의해 시도되었는데, 이는 축대칭핵함수(axisymmetric kernel function)를 구하는 방법으로, 삼차원 Kelvin해를 이용하여 원주경로를 따라 적분하는 삼차원 접근방법(3-D approach method)을 사용하였으나 구체적인 수치해석적 방법은 제시하지 않았다. Cruse et al⁽³⁾은 축대칭 경계적분법을 처음으로 체계화시켰고, 적분변환법을 이용하여 축대칭핵함수를 구하는 방법과, 특이적분인 Cauchy 주치(principle value)를 축대칭아닌 평면 변형의 경우로 근사시켰고 2차요소를 사용하였으나, 열응력 계산시에 온도구배항을 빠뜨리는 문제를 남겼다. Mayr et al⁽⁴⁾은 수치계산에 있어, 경계조건 적용방법을 개선하였고, Cathie et al⁽⁵⁾은 탄소성 축대칭문제에 경계적분법을 최초로 시도하였다. Tsuta et al⁽⁶⁾과 Tanaka⁽⁷⁾는 삼차원 Kelvin해를 이용하여 축대칭핵함수를 해석적 적분대신 수치적 적분으로 구하여 대칭 및 비대칭문제에 적용하였고, 또한 특이적분 계산시 Subelement기법을 적용하였고, 코너의 표면력 불연속(traction discontinuity)문제에 다절점개념(multi-node concept)을

이용하여 코너를 평활(smooth)하게 실제 기하학적 모양과는 다르게 하여 큰 오차를 유발시켰다. Bakr et al^(8,9)은 축대칭핵함수를 Hankel 변환법을 이용하여 해석적으로 구하는 직접 축대칭접근방법(direct axisymmetric approach method)을 제시하였고 열탄성문제의 해석 예를 보였으며, Abdul-Mihsein et al^(10,11)은 원심력문제의 해석 예를 보였으며, 축대칭문제를 3차원 문제로 해석하였다. 또한 Banerjee et al⁽¹²⁾은 링하중, 열탄성 및 원심물체력이 복합적으로 작용하는 전형적 축대칭문제인 가스터빈 축대칭구조물을 3차원 문제로 해석하였다. 국내에서도 이차 또는 삼차원 응력해석이나 접촉문제(contact problem) 및 응력확대계수(stress intensity factor)를 구하는 문제에 경계적분법이 연구되고 있고, 축대칭 경계적분법에 대한 연구도 시도 되었으나⁽¹³⁾ 열탄성과 원심물체력 항이 생략되었고 내점해의 특이적분 문제들을 구체적으로 제시하지 못했다.

본 연구에서는 터빈 디스크와 같은 축대칭구조물의 정확한 응력해석을 위해 다음과 같은 연구 결과가 제시되었다.

첫째, Cruse,⁽³⁾ Bakr et al^(8,9) 그리고 Abdul-Mihsein⁽¹⁰⁾ 등이 각각 부분적으로 다룬 압력하중, 열하중 및 원심 하중들에 관한 축대칭 경계적분법들의 연구내용을 개선하고 체계화하여 실제의 축대칭 탄성문제를 해석할 수 있는 전산 프로그램을 개발하였다. 그리고 경계적분법의 수치계산에 있어 전체 해의 정확도에 큰 영향을 주는 특이적분인 Cauchy 주치(principal value) 계산에 Brebbia⁽¹⁴⁾ 및 Bakr⁽⁸⁾의 강체이동개념(rigid body translation concept)을 확장한 Implicit 기법을 이용하였고, 주치의 영향을 받는 인접요소들의 비주치 계산에는 Tanaka⁽⁷⁾의 Subelement 기법을 개선 적용하였으며, 경계 가까이에 발생하는 특이적분항의 계산에는 Higashimachi⁽¹⁷⁾의 이중 지수형 적분기법을 이용하였다.

둘째, 축대칭 정상열전도 해석문제에 의한 경계적분법은 Shippy et al,⁽¹⁸⁾ Bakr et al⁽⁹⁾들이 제시한 방법들을 종합, 주치계산 방법들을 개선하고 응력해석 경계적분법과 연관되어 해석할 수 있는 프로그램을 개발하였다.

셋째, 로터 조립체의 보다 정확한 임계속도 해석을 위해 Ekong et al⁽¹⁹⁾의 방법에 Herz의 식을 이용하여 베어링 강성변화를 고려할수 있도록 개선된

프로그램을 개발하였다.

넷째, Manson-Coffin 피로수명 선도를 이용하여 요구된 수명에 만족하는지를 검토하고 불만족 경우 형상수정하여 상기 프로그램들을 이용하여 만족할때까지 반복계산하는 절차를 수립하였다.

2. 축대칭 경계적분법에 의한 응력 해석

2.1 정식화

축대칭 탄성체가 Fig. 1과 코너를 포함한 정규 경계 표면 Γ 로 둘러싸인 영역 Ω 로 구성되어 있으며 경계는 표면력 t_i 가 주어진 경계표면 Γ_1 과 변위 \bar{u}_i 가 주어진 경계표면 Γ_2 로 구성되어 있을 경우 하중점 p 의 변위에 대해 다음과 같은 Somigliano의 Identity가 구해진다. ^(14,15,16)

$$u_i(p) = - \int_{\Gamma} T_{ij}(p, Q) u_j(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma} U_{ij}^*(p, Q) b_j(Q) d\Omega + \int_{\Omega} U_{ij}^*(p, Q) b_j(Q) d\Omega \quad (1)$$

축대칭문제로 변환하고 하중점 p 을 경계점 P 로 접근시킬 경우 다음과 같은 경계적분방정식이 구해진다.

$$C_{ij}(P) u_j(P) = -2\pi \int_{\Gamma} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) r_Q d\bar{\Gamma} + 2\pi \int_{\Gamma} U_{ij}(P, Q) t_j(Q) r_Q d\bar{\Gamma}$$

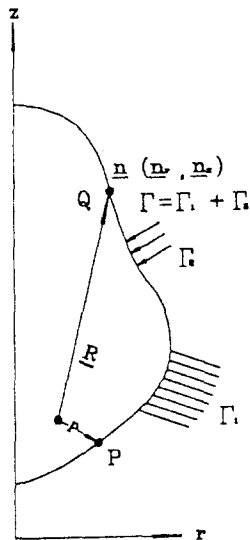


Fig. 1 A typical plane through the axis of symmetry

$$+ 2\pi \int_{\Omega} U_{ij}(P, Q) b_j(Q) d\Omega \quad (2)$$

구해진 축대칭 변위 해함수는 $U_{rr}(P, Q)$ 는 다음과 같으며 타성분 변위 해함수 U_{rz}, U_{zr}, U_{zz} 및 표면력 해함수들인 $T_{rr}, T_{rz}, T_{zr}, T_{zz}$ 도 같은 방법으로 구해진다. ⁽⁸⁾

$$U_{rr}(p, Q) = \frac{A}{r_p r_Q C} \left\{ [(3-4\nu)(r_p^2 + r_Q^2) + 4(1-\nu)(z_p - z_Q)^2] K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) + [-C^2(3-4\nu) - \frac{(z_p - z_Q)^2(r_p^2 + r_Q^2 + (z_p - z_Q)^2)}{D}] E\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \right\} \quad (3)$$

$$A = \frac{1}{16\pi^2 G(1-\nu)}$$

$$C = [(r_p + r_Q)^2 + (z_p - z_Q)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$m = \frac{2\sqrt{r_p r_Q}}{C}$$

$$D = (r_p - r_Q)^2 + (z_p - z_Q)^2 \quad (4)$$

또한 $K\left(m, \frac{\pi}{2}\right)$ 는 제1종 완전타원적분, $E\left(m, \frac{\pi}{2}\right)$ 는 제2종 완전타원적분이다. ⁽²⁵⁾

열탄성 해함수 $K_{r1}(p, Q)$ 와 원심력 해함수 $P_{r1}(P, Q)$ 는 다음과 같으며, $K_{r2}, K_{z1}, K_{z2}, P_{r2}$ 도 같은 방법으로 구해진다. ^(9, 10)

$$K_{r1}(p, Q) = \frac{\alpha(1+\nu)}{8\pi^2(1-\nu)} \int_0^{2\pi} \left[\frac{n_r \cos \theta}{R} - \frac{(r_Q \cos \theta - r_p)}{R_2} \cdot \frac{\partial R}{\partial n} \right] d\theta \quad (5)$$

$$P_{r1}(p, Q) = \frac{1}{16\pi^2 G} \int_0^{2\pi} \left[\frac{n_r^2 \cos^2 \theta}{R} - \frac{(r_Q r_p \cos^2 \theta)}{R} - \cos \theta R \right] n_r d\theta \quad (6)$$

여기서, T_{ij}, U_{ij} 는 각각 축대칭 표면력 해함수 및 변위 해함수이고 Kelvin^(14, 15)에 의해 주어진 삼차원 해함수를 원통좌표계로 변환함으로써 구해지며 b_j 는 물체력항으로서 열탄성 해함수와 원심력 해함수로 나타낼 수 있다. ^(14, 15)

C_{ij} 는 특이적분평가치로서 Cauchy 주치(principal value) K_{ij} 를 포함하며 $C_{ij} = \delta_{ij} - K_{ij}$ 로 나타낼 수 있다.^(3, 14)

(2)식을 수치적으로 계산하기위해 경계 Γ 를 적당한 갯수의 요소로 분할하여 이산화(discretization)하며 요구해의 정밀도를 높이기위해 2차의 형상함수를 사용한 경우 다음과 같은수치적분식이 유도된다.

$$\begin{aligned} & C_{rr}^i u_i^r + C_{zz}^i u_i^z \\ &= 2\pi \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left[-u_m^r \int_{-1}^{+1} T_{rr} \Psi_n r_Q J d\zeta \right. \\ &\quad - u_m^z \int_{-1}^{+1} T_{rz} \Psi_n r_Q J d\zeta + t_m^r \int_{-1}^{+1} U_{rr} \Psi_n r_Q J d\zeta \\ &\quad + t_m^z \int_{-1}^{+1} U_{rz} \Psi_n r_Q J d\zeta + \Phi_n^r \int_{-1}^{+1} K_{r1} \Psi_n r_Q J d\zeta \\ &\quad \left. + \left(\frac{d\Phi}{dn} \right)_n \int_{-1}^{+1} T_{r2} \Psi_n r_Q J d\zeta + \frac{\rho\omega^2(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \int_{-1}^{+1} P_{r1} \Psi_n r_Q J d\zeta + \rho\omega^2 \int_{-1}^{+1} P_{r2} \Psi_n r_Q J d\zeta \right] \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & C_{zr}^i u_i^r + C_{zz}^i u_i^z \\ &= 2\pi \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left[-u_m^r \int_{-1}^{+1} T_{zr} \Psi_n r_Q J d\zeta \right. \\ &\quad - u_m^z \int_{-1}^{+1} T_{zz} \Psi_n r_Q J d\zeta + t_m^r \int_{-1}^{+1} U_{zr} \Psi_n r_Q J d\zeta \\ &\quad + t_m^z \int_{-1}^{+1} U_{zz} \Psi_n r_Q J d\zeta + \Phi_n^z \int_{-1}^{+1} K_{z1} \Psi_n r_Q J d\zeta \\ &\quad \left. + \left(\frac{d\Phi}{dn} \right)_n \int_{-1}^{+1} K_{z2} \Psi_n r_Q J d\zeta \right] \quad (8) \end{aligned}$$

여기서, $\int_{-1}^{+1} (\cdot) d\zeta$ 의 (\cdot) 의 함수들은 ζ 의 함수들로 표시되며 상첨자 i 는 하중점을 표시한다. 그리고 u_m^n 은 m 번째 요소의 n 번 절점의 r 방향 변위를 의미한다. 또한 J 는 Jacobian이다. G 점 Gauss수치적분법을 이용하여 $\int_{-1}^{+1} f(\zeta) d(\zeta)$ 의 적분을 다음과 같이 계산할 수 있다.⁽¹³⁾

$$\int_{-1}^{+1} f(\zeta) d\zeta \approx \sum_{g=1}^G f(\zeta_g) W_g \quad (9)$$

전 경계점에 대해 수치 경계적분법을 적용하며 다음과 같이 선형 대수방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} [H]\{u\} &= [G]\{t\} + [K_1]\{\Phi\} + [K_2]\left\{ \frac{d\Phi}{dn} \right\} \\ &\quad + \frac{\rho\omega^2(1-2\nu)}{2(1-\nu)} [P_1] + \rho\omega^2 [P_2] \quad (10) \end{aligned}$$

식 (10)에 경계조건을 대입하여 우항의 미지항을 좌항에 미지항을 분리하여 정리하면 다음과 같은 선형대수 방정식이 얻어진다.

$$[A]\{X\} = \{Y\} \quad (11)$$

윗식은 Gauss-Jordan 역행렬법을 이용해서 풀 수 있다.

2. 수치해석 방법의 개선

2.1 특이적분항의 계산

하중점 P 와 임의의 경계점 Q 가 일치할 경우 R 이 '0'이 됨으로 변위와 표면력 핵함수항에 특이적분이 발생하는데 표면력 핵함수 적분시는 $O(1/R)$ 의 Cauchy주치를 포함한 강한 특이가 나타나고, 변위 핵함수 및 물체력 핵함수적분에는 $O(R/R)$ 의 약한 특이가 나타나 특수적분기법이 필요하게 된다.

첫째, 강한 특이적분항의 계산에는 Brebbia등⁽¹⁴⁾이 2차원 문제에 적용하였던 강제이동 개념을 이용 축대칭문제의축방향에 적용시켰고, 반경방향 경우는 평면변형 또는 평면응력의 경계조건을 적용하는 Implicit 기법이 제시되었다. 즉 강한 특이의 Z 방향 성분은 축방향으로 강제이동 개념을 적용하면 표면력 $t_r = t_z = 0$ 가 되며 축방향 주치를 포함한 표면력 핵함수는 대각항을 제외한 적분행렬로 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} H_{rz} \\ H_{zz} \end{pmatrix}_{ii} = \begin{pmatrix} C_{rz} \\ C_{zz} \end{pmatrix} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \begin{pmatrix} H_{rz} \\ H_{zz} \end{pmatrix}_{ij} \quad (12)$$

다음 강한 특이의 반경 방향성분은 다음식에서 평면변형 문제일 경우 $t_r = n_r$, $t_z = 2\nu n_z$, $u_r = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} r$, $u_z = 0$ 을 적용하고, 평면응력 문제일 경우 $t_r = n_r$, $t_z = 0$, $u_r = \frac{1-\nu}{E} r$, $u_z = \frac{-2\nu}{E} z$ 를 적용한다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_{rr} \\ H_{zr} \end{bmatrix}_{ii} &= \begin{pmatrix} C_{rr} \\ C_{zz} \end{pmatrix}_{ii} = \frac{1}{u_{ri}} \left[\sum_{j=1}^{NOD} \begin{bmatrix} G_{rr} & G_{rz} \\ G_{zr} & G_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \begin{pmatrix} t_r \\ t_z \end{pmatrix}_j \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{NOD} \begin{bmatrix} H_{rr} & H_{rz} \\ H_{zr} & H_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \begin{pmatrix} u_r \\ u_z \end{pmatrix}_j \right] - u_{zi} \begin{pmatrix} H_{rz} \\ H_{zz} \end{pmatrix}_{ii} \quad (13) \end{aligned}$$

설명된 Implicit기법의 타당성을 검토하기 위해 V-돛치 피료시핀 예제를 이용, 각 경계에서 Cauchy 주치를 포함한 $C_{ij} (= \delta_{ij} - K_{ij})$ 를 평가하였다. Cruse⁽³⁾의 해석적 결과와 비교된 경계절점은 120°코너점(절점번호 17), Smooth한 경계절점(절점번호 25), 90°코너점(절점번호 41)이며, 비교결과는 Table 1과 같다. 이때 축방향 경계조건인 강

Table 1 Comparison of principal values K_{ij} due to the Cruse analytic method⁽¹⁾ and the implicit method. ($C_{ij} = \delta_{ij} - K_{ij}$)

Principal values Method		Surface	Smooth		90° Coner		120° Coner	
			C_{rr}	C_{zz}	C_{rr}	C_{zz}	C_{rr}	C_{zz}
Curuse sol. ⁽³⁾			0.500	0.500	0.250	0.250	0.383	0.284
Implicit sol.	Plane strain B.C.+Rigid		0.499	0.500	0.249	0.250	0.382	0.284
	Plane strain B.C.+Rigid		0.500	0.500	0.250	0.250	0.382	0.284

체이동개념을 적용한 C_{zz} 값은 Cruse의 해석치와 거의 일치한다. 그러나 반경방향의 3가지 경계조건을 적용한 C_{rr} 값에 있어서 평면응력조건과 평면변형조건은 Smooth경계(0.499, 0.500), 90°코너(0.249, 0.250), 120°코너(0.382, 0.382)로 Cruse⁽³⁾ 해석치 Smooth(0.500), 90°코너(0.250), 120°코너(0.383)와 거의 일치함을 확인하였다.

둘째, 약한 특이적분항의 계산에는 Tanaka⁽⁹⁾가 2차원 문제에 적용했던 Subelement 기법을 축대칭 문제에 확장적용하였다. 즉 이 방법은 하중점과 적분점이 일치하여 특이항이 존재시 특이점을 포함하는 요소 및 인접요소를 3개씩 분할하여 오차를 최소화한 방법으로 인접요소는 3등분하고, 특이점을 포함한 요소는 0.9 : 0.9 : 0.2(코너점일 때는 0.9 : 0.9 : 0.4)로 나누어 계산하는 방법을 적용하였다.

2.2.2 이중지수형 적분을 이용한 내점해의 개선

내점의 응력 또는 변위를 구할 때 내점이 경계에 너무 가까이 접근하면, 탄성체의 기본해에 $O(1/R)$ 및 $O(R/R)$ 의 특이항을 포함하기 때문에 해의 오차가 발생함으로 Higashimachi⁽¹⁷⁾의 이중지수형 적분법을 이용 내점해의 개선을 도모하였다.

$|\zeta|=1$ 에서 특이점이 존재하는 함수 $f(\zeta)$ 를 생각하면, $I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$ 에 대해 $\xi = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)$ 의 특이성을 갖는 변수로 치환한다. 이 때

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)\right) \frac{\pi}{2} A(t) dt \quad (14)$$

여기서, 구간 $-1 < \zeta < 1$ 은 $-\infty < t < \infty$ 로 변환되었는데, 이때 h 를 체형폭이라 하면 $t = hn$ 이 되고, $dt = h$ 가 되어, 수치적분형태로 바꿀수 있다.

$$I = \frac{\pi}{2} h \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left\{\tan\left(\frac{\pi}{2} \sinh(nh)\right)\right\} A(nh) \quad (15)$$

그러나 윗식은 $\pm\infty$ 의 구간을 갖기 때문에 계산이 불가능하므로 적분가능범위로 축소시켜야만 한다. 그런데 이 때 $A(t) = A(nh) = A(\pm 2.5) \approx 1.36 \times 10^{-7}$ 이므로, $t = \pm 2.5$ 에서 I 가 급속히 영에 수렴하여 이 구간에서만 계산하면 된다. 이 적분의 이 점은 $|\zeta| \rightarrow 1$ 일때 $A(t) \rightarrow 0$ 로 빨리 영에 수렴하여 오차의 축적을 어느 정도 방지할수 있다. 만일 $|nh| \leq 2.5$ 일 경우, $h = 0.01$ 이라면 500회의 계산이 요구되어 해의 정확도는 증가되는 반면 계산시간은 증대된다. 내점해를 구할 때 내점의 위치가 경계로부터 어느 정도 거리일 때, 이중지수형 적분을 적용할 것인가 하는 것은 계산시간을 절약한다는 측면에서 매우 중요하다. 실제 계산결과를 살펴보면, 내점에서 경계까지 거리 R 이 해당요소 길이의 0.5배 내에 있을 때 Gauss 수치적분법은 오차가 커진다. 따라서 거리 R 이 요소길이의 0.5배 보다 클 때는 Gauss 수치적분법을 사용하고, 요소 길이의 0.5배 보다 작을 때는 이중지수형 수치적분법을 사용한다.

3. 축대칭 탄성 경계적분법의 평가

제시된 경계적분법의 평가를 위해 엄밀해가 존재하는 전형적 예제를 해석하였다.

3.1 내압 증공원통

평면 변형상태의 축대칭문제의 대표적 예로서 내압 $P_i=1$, 내반경 $R_i=100$, 외반경 $R_o=200$, 길이 $L=200$ 의 두꺼운 증공원통을 해석하여 참고문헌(14)의 엄밀해와 비교하였다. (Fig.2 참조)

해석에 사용된 재질의 기계적 특성은 $\nu=0.3$, $E=104$ 로 해석 결과는 Tables 2, 3 및 Fig. 3와 같다.

해석결과 2차요소 20개 및 8점의 Gauss 수치적

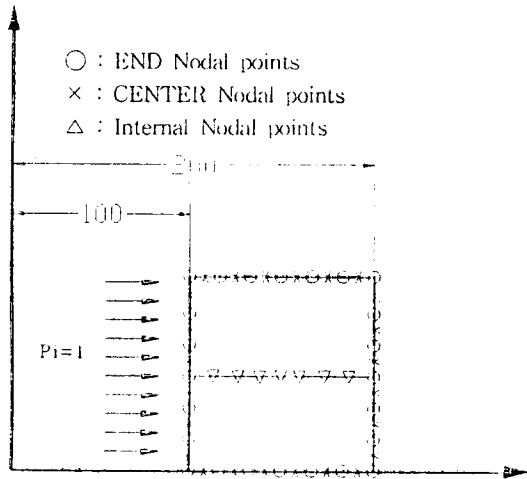


Fig. 2 Hollow cylinder mesh model

분을 사용한 경우, 엄밀해 |0.2%| 정도의 높은 정확도를 가지고 있음을 알 수 있었다. 또한 내점이 내반경 경계 가까이에 있을 때 경계와의 거리가 '0'에 접근함으로써 특이 발생하여 정확도가 떨어짐을 확인하였고, 이 경우 이중지수형 적분을 사용할 경우 해가 크게 개선됨을 알 수 있었으며 특히 내점과 경계와의 거리가 요소길이 절반 이하일 때 이중지수형 적분을 사용하는 것이 효과적임을 확인하였다.

3.2 열하중을 받는 일정 두께디스크

내경 $R_i=3$, 외경 $R_o=6$, 두께 $H=1$ 인 디스크가 내압 $P_o=1$ 이 작용하고 내경온도 $T_i=5$, 외부

Table 2 Comparison between analytic solution and BIE solution. (Hoop stress $\frac{\sigma_\theta}{P_i}$)

Radius (R/R _o)	Analyt. sol.	BIE sol. (20El, G.P=8)	Error (%)
0.55	1.435	1.430	-0.4
0.60	1.259	1.261	0.1
0.65	1.112	1.119	-0.3
0.70	1.014	1.014	0.0
0.75	0.926	0.923	-0.3
0.80	0.854	0.854	0.0
0.85	0.795	0.793	-0.3
0.90	0.745	0.744	-0.1
0.95	0.703	0.701	-0.2

온도 $T_o=3$ 의 정상 열전도상태인 경우를 해석하였다. 경계요소법에 의한 열응력을 구하기 위해서는 온도분포도 경계요소법에 의해 구해져야 한다.

다음에 설명될 경계요소법에 의해 구해진 온도분포에 의해 열응력이 해석되었다. 해석에 사용된 재료의 특성은 $\nu=0.3$, $E=1$, $\alpha=0.002$ 이며 해석 결과는 Table 4와 같다.

2차 요소 8개 및 4점의 Gauss 수치적분을 사용한 경우 엄밀해에 평균 |0.3%| 정도의 오차를 가지며, Bakr⁽⁹⁾의 경계적분법 해의 평균오차 |0.5%

Table 3 Comparison of hoop stresses due to the Gaussian intergration and the double exponential integration. (Hoop stress σ_θ/P_i)

Radius R $\times 10^2$	*R / L	Analytic sol.	20EL. Quad, G.P=4 (Analytic Kernel, Numeric differential)			
			Gauss onteg.	Error (%)	Double exp.	Error (%)
1.017	0.084	1.623	9.564	489.2	1.621	-0.1
1.033	0.167	1.582	3.890	145.8	1.578	-0.3
1.050	0.250	1.543	2.100	36.1	1.537	-0.3
1.067	0.340	1.505	1.638	8.9	1.499	-0.4
1.084	0.418	1.469	1.500	2.1	1.463	-0.4
1.100	0.500	1.445	1.439	-0.4	1.439	-0.4

*R : Distance between an internal point and a boundary point
L : Element Length

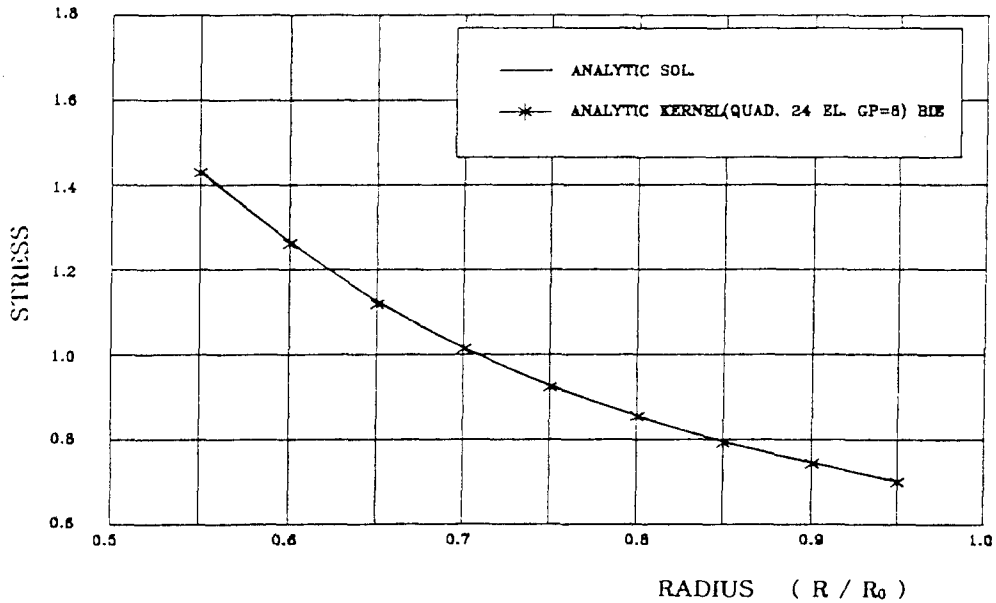


Fig. 3 Stress distribution in the hollow cylinder under internal pressure load

Table 4 Comparison of BIE Solution, analytical and Bakr BIE solution for the hoop stress in the constant thickness disk due to thermal and pressure loads

Radius (R/R ₀)	Analyt. sol. σ_{θ}/P_1		Present sol. (BIE)		Bakr sol. ⁽⁹⁾ (BIE)	
	Plane stress	Plane strain	σ_{θ}/P_1	Error (%)	σ_{θ}/P_1	Error (%)
0.500	1.664	1.663	1.663	0.	1.683	-1.5
0.383	1.321	1.311	1.301	-0.8	1.287	-1.8
0.667	1.083	1.083	1.088	0.4	1.086	0.3
0.750	0.926	0.926	0.921	-0.6	0.926	0.
0.833	0.814	0.814	0.815	0.1	0.827	1.6
0.917	0.731	0.731	0.729	-0.3	0.746	2.0
1.000	0.668	0.668	0.668	0.1	0.689	3.2

|보다도 낮아 해의 정확도가 높으며 특히 코너 부분에서 엄밀해에 대해 본 연구의 결과는 |0.1%|의 오차를 Bakr해는 |3.2%|의 오차를 가지므로 해의 정확도가 개선되었음을 알 수 있다.

3.3 원심하중하의 일정 두께디스크

내경 $R_i=2$, 외경 $R_0=10$, 두께 $H=1$ 인 디스크가 일정 각속도로 회전하면서 원심력을 받는 경우를 해석하였다.

사용된 재료의 기계적 특성은 $\nu=0.3$, $E=1$, $\rho\omega^2=10$ 이고, 해석결과는 Table 5와 같다.

2차요소 18개 및 4점의 Gauss 수치적분을 사용한 경우 엄밀해에 평균 |0.9%|의 오차를 가지며 Cruse⁽³⁾의 경계적분법해 평균오차 |1.7%|보다도 해의 정확도가 높으며 특히 코너에서 본 연구의 결과는 0.5%의 오차를 Cruse의 해는 5.8%의 오차를 나타내 정확도가 상당히 개선되었음을 알 수 있었다.

Table 5 Comparison of BIE solution, analytic solution and Cruse BIE solution for the hoop stress in the constant thickness with centrifugal load

Radius (R/R ₀)	Analyt. sol (σ _θ) × 10 ²	Present sol. (BIE)		Cruse sol. (BIE)	
		(σ _θ) × 10 ²	Error (%)	(σ _θ) × 10 ²	Error (%)
.2	8.320	8.212	-1.3	8.210	-1.3
.3	5.910	6.073	2.8	5.840	-1.2
.4	4.941	4.955	0.3	4.890	-0.6
.5	4.356	4.323	-0.8	4.330	-0.6
.6	3.893	3.900	0.1	3.890	0.1
.7	3.463	3.422	-1.2	3.480	0.5
.8	3.028	3.003	-0.8	3.080	1.7
.9	2.080	2.091	0.4	2.650	3.1
1.	2.080	2.091	0.5	2.200	5.8

4. 축대칭 경계적분법에 의한 정상열전도 해석

4.1 정식화

축대칭 열탄성 응력해석의 입력자료를 얻기 위해 축대칭 정상 열전도 문제를 고려할 경우 3장의 (1) 식과 유사하게 다음과 같은 축대칭 적분 Identity 가 구해진다.

$$\Phi(p) = -\int_r q^*(p, Q) \Phi(Q) dT + \int_r \Phi^*(p, Q) q(Q) dT \quad (16)$$

축대칭문제로 변환하고 하중점 P를 경계점 P로 접근시킬 경우 다음과 같은 경계적분방정식을 구할 수 있다.

$$C(P) \Phi(P) = -2\pi \int_r K_1(P, Q) \Phi(Q) r_Q d\bar{\Gamma} + 2\pi \int_r K_2(P, Q) \Phi(Q) r_Q d\bar{\Gamma} \quad (17)$$

여기서, C(P)는 주치를 포함하는 대각항으로 탄성문제와 같이 Implicit기법으로 구하며, K₁, K₂는 온도 핵함수로 포텐셜문제의 3차원 해를 원통좌표계로 변환하므로 구해지고, Φ는 온도, q는 온도 구배항이다.

수치적 접근식으로 표시하면 다음과 같이 표시할

수 있다.

$$C(P) \Phi(P) = -\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^3 \Phi_n^m(Q) \int_{-1}^{+1} K_1(P, Q) \Psi_n(\xi) r_Q(\xi) J(\xi) d\xi - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^3 \left(\frac{d\Phi(Q)}{dn} \right) \int_{-1}^{+1} K_2(P, Q) \Psi_n(\xi) r_Q(\xi) J(\xi) d\xi \quad (18)$$

진 경계점에 대해 적용하면 다음과 같은 선형 대수방정식이 얻어진다.

$$[H] \{\Phi\} = [G] \left\{ \frac{dQ}{dn} \right\} \quad (19)$$

4.2 축대칭 정상열전도 경계적분법의 평가

축대칭 탄성 경계적분법의 평가시 사용하였던 정상열전도 문제의 일정두께 디스크 문제가 해석되었다.

이 문제의 엄밀해는 Holman⁽²²⁾에 의해 다음과 같이 표시된다.

$$\Phi = \frac{\ln(r/P_i)}{\ln(R_o/R_i)} (\Phi_o - \Phi_i) + \Phi_i \quad (20)$$

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{\Phi_o - \Phi_i}{r \ln(R_o/P_i)} nr \quad (21)$$

해석결과를 Table 6과 같으며 온도분포는 엄밀해와 거의 같으며 온도구배항은 |1% 정도의 오차를 가짐을 알 수 있다.

Table 6 Comparison between BIE solution and analytic solution for temperature distribution in the constant thickness disk

	Temp. Φ		$\frac{d\Phi}{dn}$			
	Analyt.	BIE	Error (%)	Analyt.	BIE	Error (%)
0.500	5.000	5.000	0.	0.962	0.972	1.0
0.383	4.555	4.556	0.	0.	0.	0.
0.667	4.170	4.170	0.	0.	0.	0.
0.750	3.830	3.830	0.	0.	0.	0.
0.833	3.526	3.526	0.	0.	0.	0.
0.917	3.251	3.251	0.	0.	0.	0.
1.000	3.000	3.000	0.	-0.481	-0.487	1.2

5. 로터 조립체의 임계속도 계산에 의한 형상수정

로터디스크가 적당한 응력분포를 가지고 요구저주기 피로수명을 가지고 설계되었다하더라도 로터 조립체가 운용속도 범위내에서 공진현상을 일으킬 경우 치명적인 손상을 주므로 이에 대한 공진회전수(또는 임계속도)를 예측하여 터빈이나 압축기 디스크의 형상을 수정하든지 또는 베어링 부위의 강성을 조절해야 한다. 따라서 임계속도의 정확한 예측은 대단히 중요하다.

Ekong et al⁽¹⁹⁾은 Prohl⁽²⁰⁾의 집중질량법을 개선하여 다음과 같이 굽힘에 대한 진동방정식이 구해진다.

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \rho A \left(\frac{J_T}{\rho A} + \frac{EI}{aGA} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{J_T \rho}{aG} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} + i \Omega J_P \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} - i \frac{\Omega \rho}{aG} J_P \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} = 0 \quad (22)$$

여기서, A 는 회전축 단면적, J 는 디스크의 횡

질량 관성모멘트, α 는 단면형상계수(원형단면 0.75임), Ω 는 축의 회전각속도이다.

식 (22)을 풀기 위해서는 변위 및 시간영역으로 변수분리시킨 해를 가정한 다음 처짐, 회전, 모멘트, 전단력 등에 대한 경계조건을 대입하여 미지상수를 결정하고 각 요소를 분할한 다음 각 요소간 연속경계조건을 적용하여 계산한다. 특이할 점은 베어링의 강성계수 K 의 변화를 줄수 있도록 Ekong방법을 개선한 것이다.

베어링의 지지부의 강성 K 는 다음과 같이 2가지 방법에 의해 구해졌다. 첫번째 방법은 Hertz의 식을 이용하여 개략적 수치를 구했는데 그 식은 다음과 같다.

$$K = \frac{P}{\delta} = P \left[\frac{1}{\lambda^3 \sqrt{P^2 C_E^2}} \right] \quad (23)$$

여기서, P 는 작용하중, δ 는 변위.

$$K_D = \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2} \quad (24)$$

Table 7 Comparison between Prohl's solution and the present solution for critical speeds of Prohl's rotor ($K=10^8$)

Critical speed mode	Prohl solution	Present solution	Error (%)
1st mode	2230	2228	0.090
2st mode	4230	4445	5.083
3rd mode	11790	13040	10.602

D_1, D_2 는 베어링 접촉부위의 상대적 직경들이며

$$C_E = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \quad (25)$$

λ 는 $D_2/D_1=1$ 일 경우 0.825이며, ν 는 Poisson의 비이다. 두번째 방법은 본 연구의 경계적분법에 의한 것으로 평면경계요소를 이용하여 지지점에 가상 힘을 작용시키고 변위를 구하여 베어링 강성을 계산 할수있다.

임계속도 계산방법의 평가는 해가 잘 알려진 Prohl⁽²⁰⁾ 회전체와 비교하였다. 비교결과는 Table7과 같고 첫번째 모드는 1%, 두번째 모드는 5%, 세번째 모드는 10%, 정도 차이를 보이는데 대부분 설계시 두번째 모드까지 고려하므로 제시된 방법의 해가 Prohl해에 근접함을 알수 있다.

6. 가스터빈 로터디스크 구조설계 및 해석

6.1 로터디스크 설계 절차

가스터빈 로터디스크의 구조적 형상설계를 위해 다음과 같은 절차로 수행되었다.

첫째, 로터디스크의 일차적 형상결정으로 초기의 디스크 형상은 대개 유사한 종류의 타엔진의 전형적 디스크 형상을 토대로 설계하는데 예를 들면 터빈 블레이드를 설치할 수 있는 림을 설치하도록 하여, 림 아랫쪽은 무게질감을 위해 얇게 하여주되 응력집중을 피하기 위해 smooth한 곡선을 갖도록 하며, 로터축과 연결되는 부위로 갈수록 원심력의

영향을 고려 두껍게 하고 축과 연결 부위는 연결방법에 따라 처리한다. Mihsein⁽¹⁰⁾등은 최적 형상을 결정하기위해 축과의 연결부위 두께를 t_1 이라할때 반경 r 에 따르는 두께변화 t 를 $t=t_1 r^{-s}$ 으로 가정하였고, 응력의 정도에 따라 지수 s 를 결정하였다. 그러나 실제의 형상을 제작후 동, 정적 균형을 조절하기 위한 덧살부착 부위 등이 있어야 하므로 Mihsein의 형상을 최초 형상결정시만 이용된다. 이후 블레이드의 개략적 형상, 엔진 회전속도 및 공력적인 조건들이 결정되면 열해석없이 경계요소법 프로그램을 이용해 초기 응력해석을 행하고 그 결과를 토대로 디스크 형상을 수정하며, 만족할 만한 응력분포를 얻을 때까지 반복한다.

둘째, 디스크의 열해석 단계로 블레이드에서와는 달리 디스크의 단면내의 온도차이가 심하므로 이로 인해 큰 열응력을 받게되 디스크의 열해석은 매우 중요하며, 플랫폼 부분에서 가스온도 디스크 전/후면에 가해지는 냉각공기의 온도 및 각 부분에서 열 전달계수를 입력자료로 하여 디스크의 정상상태 온도분포를 본 연구에서 개발된 프로그램을 이용하여 계산한다.

셋째, 상세한 응력해석 단계로 열해석으로부터 구한 디스크의 온도, 블레이드에 의한 림하중, 디스크 자체의 원심하중 조건들을 입력자료로 경계요소법 프로그램을 이용하여 디스크의 정확한 응력분포를 구한다.

넷째, 회전축의 임계속도를 고려하기 위해 본 연

Table 8 Design specification summary of model 300 engine.

Item	Description
Type	Single shaft turbojet engine
Shaftspeed	40,500rpm (4.24×10^3 rad/s)
Pressure ratio	4.5
Thrust	1421 (N)
Turbine inlet average temperature	977°C
Life time	1hr \times 10 cycles
Number of turbine blades	47
Turbine blade root temperature	900°C
Turbine disc hub temperature	300°C
Material of turbine disc	INCO 792

구에서 개발된 Ekong et al⁽¹⁹⁾ 및 Prohl⁽²⁰⁾ 등이 제시한 해석방법을 개선한 프로그램을 이용하여 임계속도를 계산한 후 초기 형상을 수정한다.

다섯째, 디스크의 저주기 피로수명을 계산하는 단계로 사용된 재질에 대해 Manson-Coffin 그래프를 이용하여 네째단계에서 구해진 최대 응력에 대한 피로수명을 구해 요구수명을 만족치 않을 경우 형상을 수정 위의 단계를 반복한다.

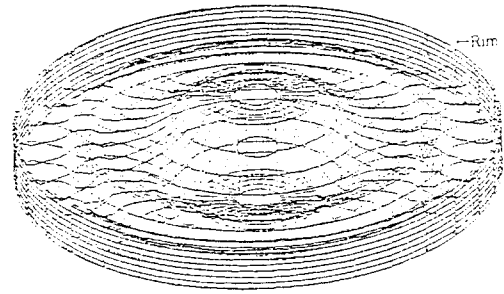


Fig. 4 3-D Configuration of the turbine rotor disk

6.2 응력해석

본 연구에서 해석된 추력 1421 N급 소형터보 제

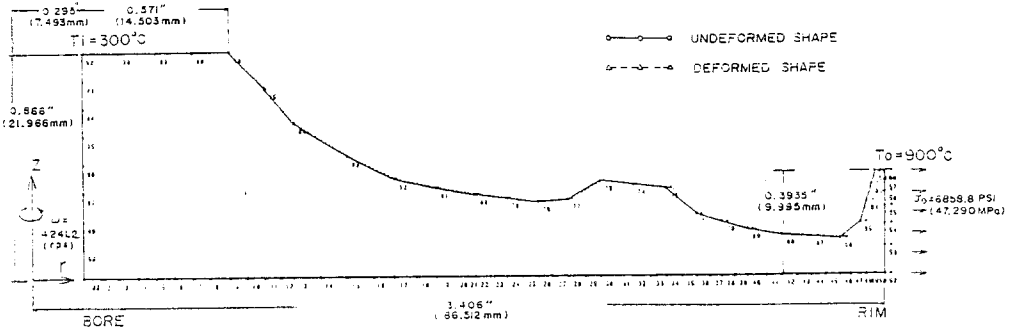


Fig. 5 BIE and FEM meshes for the turbine rotor disk

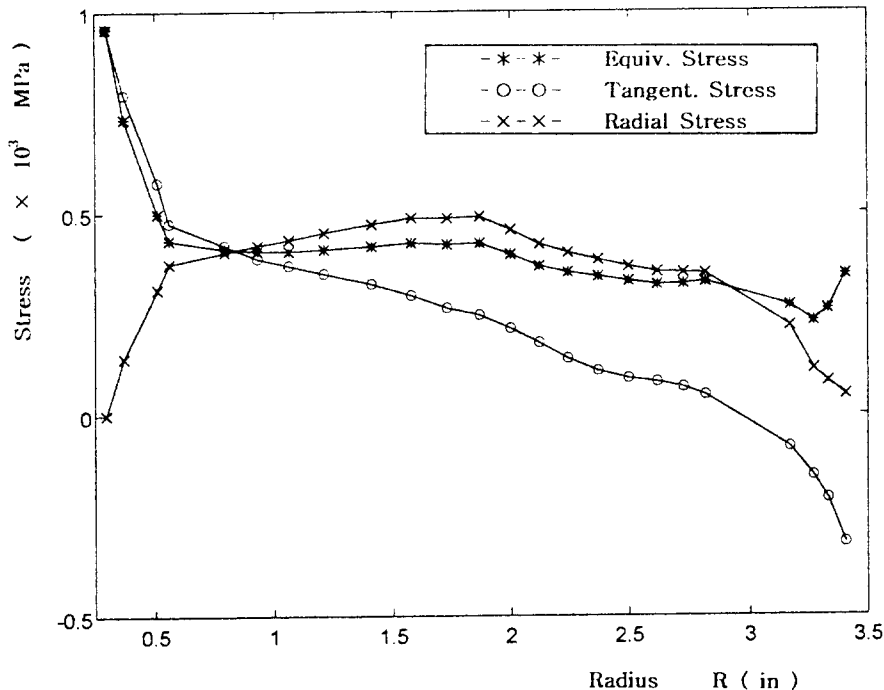


Fig. 6 Stress analysis results by BIE in the turbine rotor disk of model 300 turbojet engine

트엔진은 국내 최초 개발된 소모성 엔진으로 무인 항공기의 추진기관으로 사용되며 설계 요구조건은 Table 8과 같다. 터빈 로터디스크 설계형상은 Fig. 4와 같이 외경 부위의 림(rim)은 터빈블레이드를 장착키 위한 부분이고 허브 부위에 볼트체결을 위한 구멍이 있고 이를 통해 회전축에 연결된다.

사용된 재료의 기계적 특성은 $E=1.972 \times 10^2$ GPa (2.86×10^7 lbf/in), $\nu=0.3$, $\alpha=9.880 \times 10^{-6}$ m/m/°C, $\rho=8.0 \times 10^3$ kg/m³ (0.289 lbf/in³)이며, 부가된 하중 조건은 회전각속도 $\omega=4.24 \times 10^3$ rad/s, 블레이드에 의한 림하중 $P_0=4.729 \times 10$ MPa (6.859×10^3 lbf/in²), 내경온도 $T_i=300$ °C, 외경온도 $T_o=900$ °C이다.

Table 9 Temperation and stress BIE analysis result in the turbine rotor disk of model 300 turbojet engine

Radius R (in)	Temp. $\Phi \times 10^2$ (°C)	Temp. Gradient $\frac{d\Phi}{dn} \times 10^2$ (°C/in)	Stress $\sigma_\theta \times 10^3$ (MPa)	Stress $\sigma_r \times 10^3$ (MPa)	Equivalent stress $\sigma_{eq} \times 10^3$ (MPa)
0.295	3.000	-4.256	0.958	0.	0.958
0.370	3.292	0.	0.794	0.141	0.734
0.510	3.711	0.	0.576	0.312	0.499
0.560	4.037	0.	0.475	0.374	0.433
0.790	3.213	0.	0.421	0.403	0.412
0.930	4.562	0.	0.388	0.421	0.406
0.060	4.784	0.	0.370	0.434	0.406
1.210	5.040	0.	0.351	0.452	0.411
1.410	5.390	0.	0.325	0.472	0.418
1.580	5.699	0.	0.296	0.488	0.426
1.730	5.976	0.	0.264	0.487	0.422
1.870	6.232	0.	0.247	0.491	0.425
2.000	6.465	0.	0.214	0.458	0.397
2.120	6.671	0.	0.178	0.423	0.368
2.240	6.862	0.	0.139	0.401	0.353
2.370	7.052	0.	0.108	0.384	0.343
2.500	7.236	0.	0.090	0.367	0.331
2.620	7.416	0.	0.080	0.354	0.322
2.730	7.601	0.	0.067	0.252	0.324
2.820	7.771	0.	0.047	0.350	0.329
3.170	8.545	0.	-0.082	0.219	0.270
3.270	8.760	0.	-0.154	0.112	0.231
3.332	8.876	0.	-0.210	0.081	0.260
3.406	9.000	1.605	-0.320	0.048	0.347

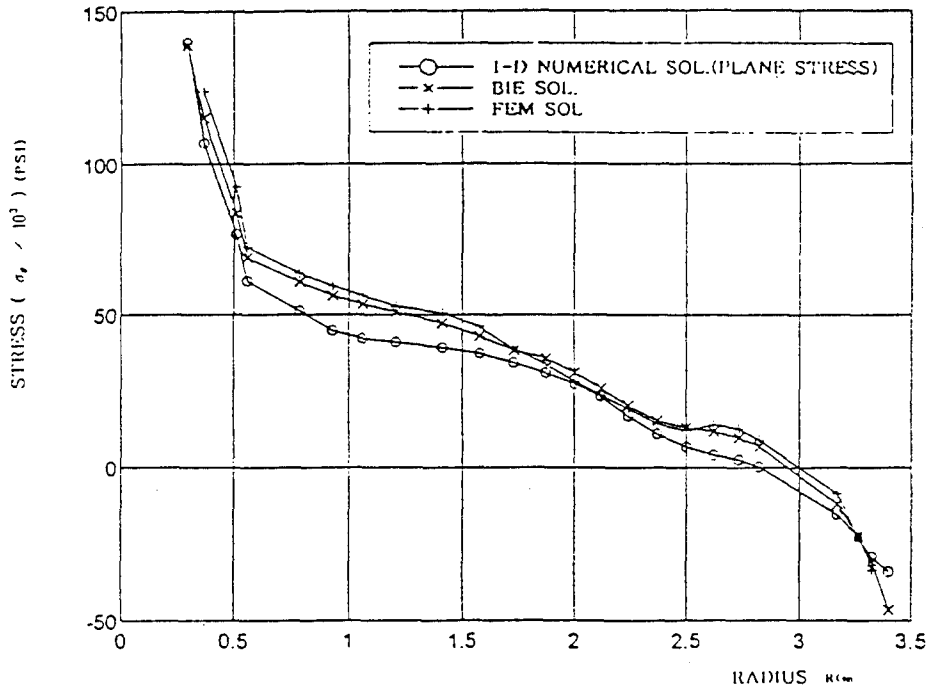


Fig. 7 Stress distribution in the turbine rotor disk due to combined load(Hoop stress)

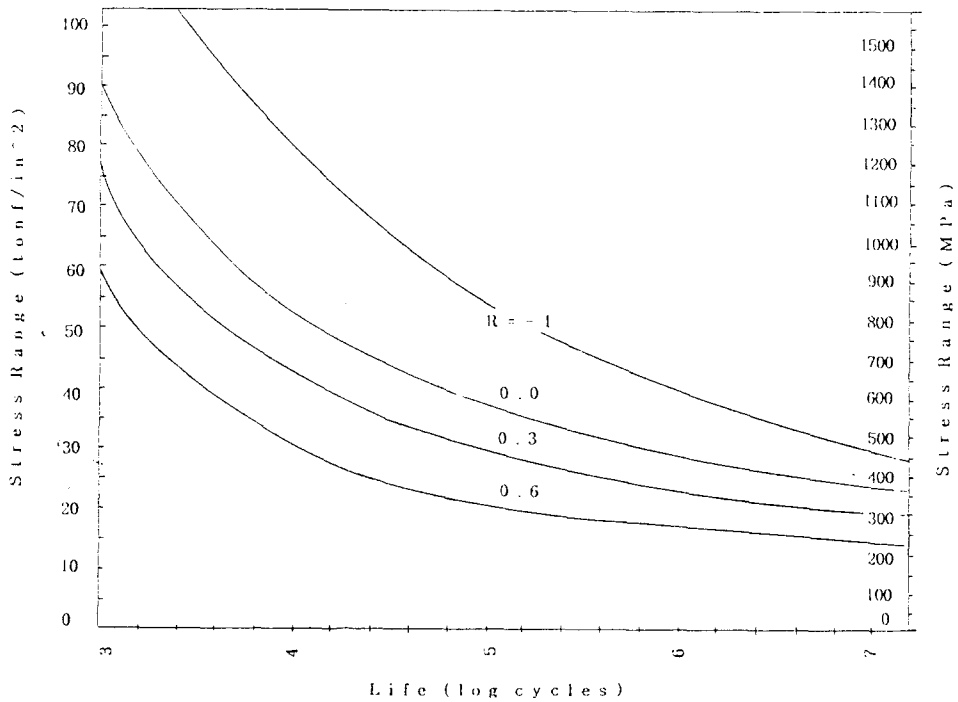


Fig. 8 Manson-Coffin fatigue life prediction In-792

Fig. 8 Manson-Coffin fautige life prediction In-792

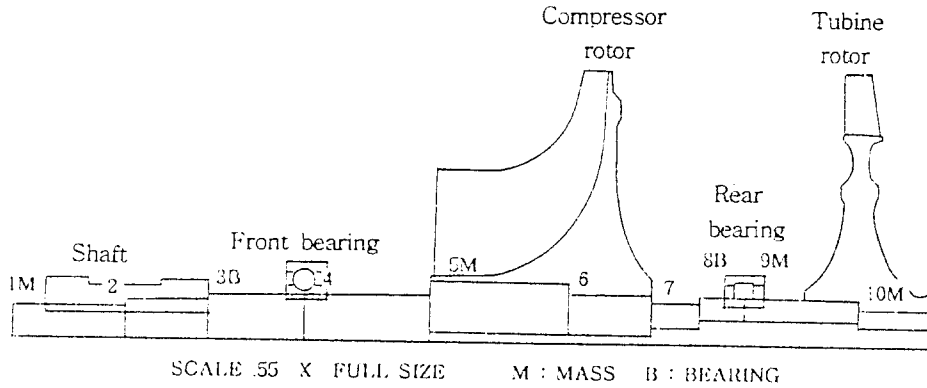


Fig. 9 Turbin rotor disk configuration of model 300 turbojet engine

사용된 경계적분법의 요소수는 46개, 형상함수는 2차 요소, Gauss 적분점수는 4개이다. (Fig. 5 참조) 열응력 계산을 위한 정상열전도에 의한 온도분포 계산결과와 응력해석 결과는 Fig. 6 및 Table 9과 같다. 경계요소법에 의한 해석결과를 유한요소법(FEM; Finite Element Method)과 1차원 수치 접근법에 의한 해석결과와 비교하였고 비교결과는 Fig. 8과 같다.

최대 응력부위는 허브의 보아 주위로 Von-Mises의 등가응력이 958 MPa이다. 이 응력에 대한 저주기 피로수명을 계산하기 위해 In-792 재질의 Manson-Coffin 피로수명 그래프 Fig. 8을 이용하였다.

최대 응력이 958 MPa이고 최대최소 응력비(R 는 $\sigma_{min}/\sigma_{max}$)를 '0'으로 가정할 경우 피로수명은 4570 Cycles이며 온도는 300°C이다. 안전율을 가스터빈사의 경험자료를 참고하여 2로 한다면 2285

Cycles를 얻는다. (24) 이는 소모성 터보제트엔진의 요구시동 가능 횟수 50회를 충분히 만족하며 1회 시동에 약 46회의 최대와 최소 회전속도를 반복할 수 있으므로 요구 수명을 충분히 만족하는 설계라 할수 있다.

다음은 설계된 터빈디스크가 회전체로 조립될 경우 임계속도의 해석으로 조립체의 형상은 Fig. 9와 같다. 해석결과는 Table 10과 같으며 베어링 강성이 2×10^{10} N/m으로 거의 강체에 가까울 경우이며, Wirhling비가 0., 1.0일 경우로 (여기서 0은 나선운동이 전혀 없는 보와 같은 진동이며 1.0은 질량불균형에 의한 나선운동이 극단적인 경우로 나타낸다) 첫번째 및 두번째 코드의 임계속도들이 각각 14370 rpm, 21291 rpm, 41310 rpm, 57413 rpm으로 모두 운용범위인 27,000 rpm에서 40,500 rpm 범위 밖에 존재하므로 안전하다 할수 있겠다. 이상과 같이 계산된 결과를 보면 응력준위, 저주기 피로수명, 임계속도 등이 설계목표에 부합되므로 설계된 형상은 적합한 설계형상이라 할수 있다.

Table 10 Critical speed in rotating assembly of model 300 turbojet engine

Whirling ratio	Critical speed (rpm)	
	1st mode	2nd mode
0.	14370	41310
0.2	15401	44301
0.4	16613	47824
0.6	18021	51483
0.8	19606	54758
1.0	21291	57413

7. 결 론

(1) 항공기 가스터빈 로터디스크와 같은 전형적 축대칭구조물은 엔진의 수명을 결정하는 중요한 구성품으로 본 연구에서 요구하는 수명을 만족하는 적절한 응력을 갖으며, 운용범위내 임계속도를 피하도록 하는 설계절차와 이를 위한 보다 정확한 응력 및 열해석을 위한 축대칭 경계적분법이 제시되었다.

(2) 본 연구에 의해 제시된 축대칭 경계적분법은 강한 특이인 Cauchy 주치 계산에 있어서는

Brebbia⁽¹⁴⁾의 Implicit기법을 확장 적용하였고, 약한 특이적분항 계산에는 Tanaka⁽⁷⁾의 subelement 기법을 이용하였고, 경계 가까이 내접해에 발생하는 특이적분항 계산에는 Higashmachi⁽¹⁷⁾의 이중지수형 적분기법을 적용하였고, 엄밀해가 존재하는 전형적 축대칭문제들을 가지고 평가하였다. 평가결과 엄밀해에 대해 평균 0.5% 이하의 오차를 가지며 동일 문제를 해석한 Bakr⁽⁴⁾ 및 Cruse⁽³⁾ 해보다도 정확도가 개선되었음이 확인 되었으며, 특히 코너에서 Subelement기법을 이용하여 Bakr⁽⁹⁾ 및 Cruse⁽³⁾의 해보다 정확도가 크게 개선 되었음을 확인하였다.

(3) 로터 조립체의 동적 안정성 판정을 위한 임계속도 해석에 있어 Herz식을 이용하여 베어링 강성변화를 고려할수 있도록 Ekong⁽¹⁹⁾의 방법을 개선하였다.

(4) 실제 구조설계 및 해석 예로서 추력 1421 N급 소형터보 제트엔진의 터빈디스크가 본 연구에 의해 축대칭 경계적분법에 적용 해석하여 최대 등가응력 958 MPa이 보아 부위에 발생됨을 확인하였고 In-792 재질을 사용할 경우 2285 Cycles의 저주기 피로수명을 가지며 첫번째, 두번째 모드의 임계속도들도 운용범위 밖에 있어 설계요구조건에 부합된 설계형상이 확인되었다.

후 기

본 연구는 1995년 조선대학교 연구지원비에 의해 연구되었으며, 자료제공과 조언을 주었던 Nottingham대학교 A. A. Becker 박사, 전 NPT 터빈사의 D. Moss씨에게 감사드립니다.

참고문헌

(1) Kermendis, T., 1975, "A Numerical Solution of Axially Symmetrical Elasticity Problems," *Int. J. Solids and Struct.*, pp. 493~500.

(2) Mayr, M., 1976, "The Numerical Solution of Axisymmetric Elastic Problems Using an Integral Equation Approach," *Mech. Res. Com.*, pp. 393~398.

(3) Cruse, T. A., Snow, D. W. and Wilson, R. B., 1977, "Numerical Solution in Axisymmetric

Elasticity," *Comp. and Strut.*, pp. 445~451.

- (4) Mayr, M., Drexler W. and Kuhn, G., 1980, "A Semi-analytical Boundary Integral Approach for Axisymmetric Elastic Bodies with Arbitrary Boundary Condition," *Int. J. Solids and Struct.*, pp. 863~871.
- (5) Cathie D. N. and Banerjee, P. K., 1980, "Numerical Solution in Axisymmetric Elastoplasticity by the Boundary Element Method," *Proc. 2nd Int. Symp. on Innovative Numerical Analysis in Applied Eng. Sciences.*, University Press of Verginina, pp. 331~339.
- (6) Tsuta, N. and Yamaji, S., 1993, "Boundary Element Analysis of Axisymmetric Solid of Revolution with Non-Symmetrical Problem," *Trans. JSME*, Vol. 48, No. 429, pp. 598~606.
- (7) Tanka, M., 1984, "Application of the Boundary Element Method to Machine Elements (Stress Analysis of Threaded Connection and Gears)," *Trans. JSME*, Vol. 49, No. 441, pp. 881~819.
- (8) Bakr A. A. and Fenner, R. T., 1983, "Use of the Hankel Transformation in Boundary Integral Methoda for Axisymmetric Problems," *Int. J. Numer. Methods in Eng.*, pp. 1765~1769
- (9) Bakr A. A. and Fenner R. T., 1983, "Boundary Integral Equation Anaysis of Axisymmetric Thermoelastic Problems," *J. Strain Analysis*, pp. 239~251.
- (10) Abdul-Mihsein, M. J., Bakr, A. A. and Parker, A. P., 1985, "Stress in Axisymmetric Rotating Bodies Determined by the Boundary Integral Equation Method," *J. Strain Analysis*, Vol. 20, No. 2, pp. 79~86.
- (11) Banerjee, P. K., Wilson R. B. and Miller N., 1988, "Advanced Elastic and Inelastic Three Dimensional Analysis of Gas Turbine Structures by BEM," *Int. J. Numer. Methods in Eng.*, Vol. 26, pp. 393~411
- (12) Banerjee, P. K., Wilson R. B. and Miller N., 1988, "Advanced Elastic and Inelastic Three Dimensional Analysis of Gas Turbine Structures by BEM," *Int. J. Number. Methods in Eng.*, Vol. 26, pp. 393~411.
- (13) Kong, C. D. and Kim, J. W., 1986, "Boundary

- Integral Equation Analysis of Axisymmetric Linear Elastic Problems," *Trans. KSME*, Vol. 10, No. 5, Sept. pp. 787~797.
- (14) Brebbia, C. A., 1984, *Boundary Element Techniques*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
- (15) Brebbia, C. A., 1978, *The Boundary Element Method for Engineers*, Halsted Press, New York.
- (16) Tanaka, M., 1986, *Fundamental of the Boundary Element Analysis*, Baihukan, Tokyo.
- (17) Higashimachi, T., 1983, "Interactive Structural Analysis System Using the Advanced Boundary Element Method," *5th Int. Conference Hiroshima*, Japan, Nov.
- (18) Shippy, D. J. and Rizzo, F. J., 1979, "A Boundary-integral Approach to Potential and Elasticity Problems for Axisymmetric Bodies with Arbitrary Boundary Conditions," *Mech. Res. Comm.*, pp. 99~103.
- (19) Ekong, I. E., Eshleman, R. L. and Bonthron, R. J., 1969, "Dynamics of Continuous Multimass Rotor System," *ASME Paper No. 69-VIBR-51*.
- (20) Prohl, M. A., 1945, "A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotor," *Trans. ASME, J. APPL. Mech.*, Vol. 12, No. 3, pp. 142~148.
- (21) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., 1974, *Theory of Elasticity*, Mc-Graw-Hill Book Co.
- (22) Holman, J. P., 1976, *Heat Transfer*, Tower Press, 4th Edition.
- (23) Becker, A. A., 1992, *The Boundary Element Method in EGINEERING*, Mc-Graw-Hill Book Co.
- (24) Noel Penny Turbine Ltd, *Turbine Thermal and Stress analysis*, Analysis Noto No 426/47, Issue No 1, Sep, 1991. pp. 8~9.
- (25) Cody, W. J., 1965, "Chebyshev Approximation for the Complete Elliptic Integral K and D," *Maths. Comput.*, pp. 105~112.