

<논 문>

초기 비틀림각을 갖는 회전 외팔보의 굽힘진동

박정훈* · 유흥희**

(1996년 1월 27일 접수)

Bending Vibration of a Pretwisted Rotating Cantilever Beam

Jung Hun Park and Hong Hee Yoo

Key Words : Bending Vibration(굽힘진동), Pretwisted Rotating Cantilever Beams(초기 비틀림각을 갖는 회전 외팔보), Natural Frequency Loci Veering(고유진동수 궤적 휨), Natural Frequency and Mode Shape Variation(고유진동수와 모드형상 변화)

Abstract

Equations of chordwise and flapwise bending motions of pretwisted rotating cantilever beams are derived. The two motions are coupled to each other due to the pretwist angle of the beam cross section. As the angular speed, hub radius ratio, and pretwist angle vary, the vibration characteristics of the beam change. It is found that eigenvalue loci veering phenomena and associated mode shape variations occur between two vibration modes due to the pretwist angle. The effect of the pretwist angle on the critical angular speed is also investigated.

1. 서 론

회전운동을 하는 외팔보 형태를 가진 기계구조물은 발전용 터빈이나 헬리콥터 날개 등 터보 기계에 주로 많이 사용되고 있다. 이러한 기계구조물들을 새로이 설계하거나 혹은 성능을 평가하고 개선시킴에 있어서 그 진동특성의 정확한 예측은 매우 중요한 요소이다. 외팔보의 회전운동은 원심방향 관성력을 발생시켜서 이로인한 진동특성의 변화를 일으킨다. 따라서 이러한 변화를 예측하기 위한 연구가 많이 이루어져 왔다.

회전 외팔보의 굽힘진동 해석방법은 Southwell과 Gough가⁽¹⁾ 1920년에 발표한 문헌에 발표한 것이 최초인 것으로 알려져 있다. 이 방법은 Rayleigh energy 평형이론에 근거하여 보의 회전에 따른 고유진동수의 변화만을 예측하는 방법으로 식의 간명

성을 그 장점으로 한다. 그 후 Schilhansl⁽²⁾은 회전 외팔보의 굽힘진동 방정식을 유도하고 이에 Ritz방법을 적용해서 Southwell 등이 제시한 고유진동수 예측을 위한 방정식의 계수들을 더 정확하게 구하는 방법을 제시하였다. 20세기 후반에 이루어진 전산기의 발전은 종래 해석적 방법을 지양하고 수치적인 방법으로 문제를 해결하려는 연구 결과들을 초래하였다. Putter와 Manor⁽³⁾는 굽힘진동 방정식에 모드함수를 이용한 근사화방법을 적용하여 고유치 행렬식을 유도하고 이를 수치적으로 해석하여 종래보다 더욱 정확한 결과를 얻었다. 이러한 수치해석방법은 더욱 복잡한 형태의 보의 해석을 가능하게 하였으며 Hoa⁽⁴⁾는 Tip-mass를 가진 회전 외팔보의 해석을 하였고, 최근 Kuo 등⁽⁵⁾은 고정단의 탄성변형효과와 보단면의 변화까지 고려한 해석결과를, Yokoyama⁽⁶⁾는 Timoshenko보에 대한 해석결과를 각각 발표하였다. 이러한 연구는 해석적 모드함수를 이용한 근사화 방법뿐만 아니라 유한요소법을 이용한 결과들도 많이 발표되고 있는

*한양대학교 대학원

**회원, 한양대학교 기계설계학과

데 예를 들어 참고문헌 (4)는 유한요소법을 근사화 방법으로 사용하고 있으며 이 방법을 사용하면 구조물의 일반적인 형상을 다룰 수 있다는 장점을 갖게 된다. 최근에는 유한요소 방법으로부터 모드함수를 추출하여 사용하는 복합적 방법들도 쓰이고 있다.

모든 기존 연구들이 보형상의 변화와 고려하는 효과 그리고 근사화 방법에 연구의 초점을 두고 있다면 Kane 등⁽⁷⁾은 외팔보의 운동방정식 유도를 위한 새로운 방법을 제시하였다. 종래의 모델링 방법은 일정각속도 운동시 발생하는 원심 관성력에 의한 인장변위율을 굽힘방향 운동방정식에 대입하여 선형 굽힘진동 방정식을 구하는 과정으로 요약될 수 있다. 이 방법은 그 유도과정의 일관성이 명확하지 않으며 매우 복잡하여 대부분의 문헌에서 자세히 기술되지 않는다. Simo⁽⁸⁾는 이 과정을 평면 회전운동을 하는 외팔보에 대해 비선형 동적 모델링 방법을 통해 비교적 자세히 보여 주었다. 이러한 종래의 방법에 비해 Kane 등에 의해 제시된 새로운 모델링은 유도되는 운동방정식이 선형으로 아무런 대입과정이 필요없이 바로 진동해석에 사용할 수 있는 장점을 지닌다. Yoo 등⁽⁹⁾은 이 모델링 방법을 더욱 간명하게 발전시켰다. 본 논문에서는 Yoo 등에 의해 제시된 모델링 방법을 이용하여 자유단의 단면이 고정단의 단면에 비해 초기 상태에서 비틀림을 갖는 외팔보의 진동해석을 수행하고 기존의 모델링 방법에 의한 결과들과 비교하여 정확성을 검증하는데 연구의 목적을 두었다. 본 연구는 참고문헌(9)에 제시된 동적 모델링을 초기 비틀림각을 갖는 회전 외팔보의 진동해석에 최초로 적용하였고, 그 결과로서 두 개의 고유진동수 계적간에 발생하는 휨(veering)현상과 그를 수반한 모드형상 변화를 최초로 발견하였다는 점에 그 공헌도를 갖는다. 본 논문에서 제시된 진동해석 모델링 방법은 기존의 모델링 방법에 비해 훨씬 간단하다는 점에서 장점을 갖는다고 할 수 있다.

2. 진동방정식 유도

본 연구에서는 다음 가정들을 사용하였다. 첫째, 보의 단면적은 일정하고 재질은 균질하고 등방성이다. 둘째, 전단효과와 단면관성효과는 고려치 않는다. 즉 오일러 보 이론을 사용한다. 셋째, 단면상의 탄성축과 도심은 서로 일치한다. 즉 편심에 의한

효과는 고려하지 않는다. Fig. 1은 변형률이 없이 초기 비틀림각을 갖는 보의 형상을 나타낸다. 그림에서 보의 탄성축과 중심축은 동일 선상에 위치한다. 그림에서 α 는 보의 변형이 없을 때 자유단의 단면이 고정단의 단면에 비해 비틀린 각도를 나타낸다. 그림에서 \hat{a}_1 과 \hat{b}_1 은 서로 일치하며 \hat{a}_2 와 \hat{b}_2 혹은 \hat{a}_3 와 \hat{b}_3 는 서로 α 의 각을 이룬다. Fig. 2는 탄성축상의 점들의 변형시 위치변화를 나타낸다. 탄성축상에 위치한 임의의 질점 P_0 가 변형후 P 의 위치로 움직일 때 그 변위벡터는 \vec{u} 로 나타내고 있으며 그의 \hat{a}_1 , \hat{a}_2 , \hat{a}_3 방향 성분은 각각 u_1 , u_2 , u_3 로 나타내고 있다. 또한 s 는 임의의 질점에서 인장된 길이를 나타낸다. 연속체의 방정식을 근사화하기 위해 s , u_2 , u_3 를 다음과 같이 가상모드를 이용하여 근사화 한다.

$$s(x, t) = \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{1j}(x) q_j(t) \tag{1}$$

$$u_2(x, t) = \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{2j}(x) q_j(t) \tag{2}$$

$$u_3(x, t) = \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{3j}(x) q_j(t) \tag{3}$$

여기서, ϕ_{1j} , ϕ_{2j} , ϕ_{3j} 는 s , u_2 , u_3 를 나타내기 위한 가상모드들이며 q_j 는 일반좌표를 나타내고 μ 는 그 갯수이다. 가상모드 함수로는 기하학적 경계조건만(geometric boundary conditions) 만족시키는 함수군이나 기하학적 경계조건은 물론 자연적 경계조건들도(natural boundary conditions) 만족시키는 함수군을 모두 사용할 수 있으나 후자 경우가 해의

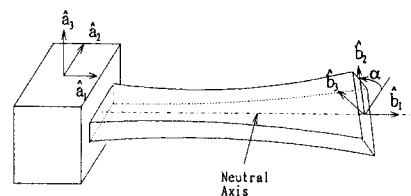


Fig. 2 Deformation of the neutral axis of beam

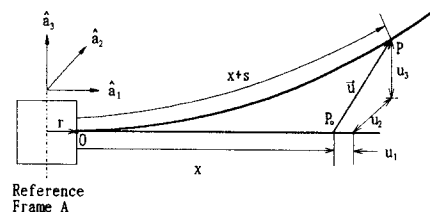


Fig. 1 Configuration of a pretwisted cantilever beam

수렴이 빠르므로 흔히 사용된다. 본 논문에서는 회전하지 않는 외팔보의 고유함수들을 가상모드 함수들로 사용하였다. 식 (1)~(3)의 표현은 식 전개상의 편의를 위한 것이며 세 변수는 실제 동일한 모드좌표에 대해 연성되어 있지 않다. 즉 다음식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \phi_{1i} &= 0 \quad (i \geq \mu_1 + 1) \\ \phi_{2i} &= 0 \quad (i \leq \mu_1 \text{ OR } i \geq \mu_1 + \mu_2 + 1) \\ \phi_{3i} &= 0 \quad (i \leq \mu_1 + \mu_2) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, μ_1 은 s , μ_2 는 u_2 , 그리고 μ_3 는 u_3 를 위한 모드 함수의 수들을 각각 나타내며, 따라서 $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \mu$ 이다.

반경 r 인 강체축 A 가 \hat{a}_3 방향으로 일정한 속력 Ω 로 회전할 때 A 의 각속도와 O 점의 속도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{\omega}^A = \Omega \hat{a}_3 \quad (5)$$

$$\vec{v}^O = r\Omega \hat{a}_2 \quad (6)$$

이때 P 점의 속도 \vec{v}^P 는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \vec{v}^P &= [\dot{u}_1 - \Omega u_2] \hat{a}_1 + [\dot{u}_2 + \Omega(r + x + u_1)] \hat{a}_2 \\ &\quad + \dot{u}_3 \hat{a}_3 \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)에 나타나는 u_1 은 s 와 u_2 로 표시되어야 하며 이를 위해 다음의 근사화된 관계식이 유도되어(참고문헌 (9) 참조) 사용되어진다.

$$s = u_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left[\left(\frac{du_2}{d\sigma} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{d\sigma} \right)^2 \right] d\sigma \quad (8)$$

속도 \vec{v}^P 를 이용하면 시스템의 운동방정식은 다음식으로부터 유도될 수 있다.

$$\int_0^L \rho \left(\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \frac{d\vec{v}^P}{dt} dx + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, \dots, \mu) \quad (9)$$

여기서, L 과 ρ 는 외팔보의 길이와 단위길이당 질량을 각각 나타내며, U 는 탄성에너지로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + EI_3 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 + EI_2 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2EI_{23} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right) \right] dx \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, E 는 보의 영계수, A 는 단면적이다. 임의의 단면에서 보의 2차 면적모멘트와 프로덕트를 나타내는 I_2 , I_3 와 I_{23} 를 주면적 모멘트 I_2^* 와 I_3^* 로 나

타내면

$$I_2(x) = \frac{I_2^* + I_3^*}{2} + \frac{I_2^* - I_3^*}{2} \cos(2\theta) \quad (11)$$

$$I_3(x) = \frac{I_2^* + I_3^*}{2} - \frac{I_2^* - I_3^*}{2} \cos(2\theta) \quad (12)$$

$$I_{23}(x) = \frac{I_2^* - I_3^*}{2} \sin(2\theta) \quad (13)$$

$$\theta \triangleq \frac{\alpha}{L} x \quad (14)$$

여기서, θ 는 보의 임의의 단면에서 비틀림각을 나타내며, 따라서 보의 고정단에서 $\theta=0$, 보의 자유단에서 $\theta=\alpha$ 이다. 이상 식들을 이용하여 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\mu} M_{ij}^{11} \ddot{q}_j - \sum_{j=1}^{\mu} 2\Omega M_{ij}^{12} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{\mu} [K_{ij}^S - \Omega^2 M_{ij}^{11}] q_j \\ = \Omega^2 Q_{1i} + r\Omega^2 P_{1i} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\mu} M_{ij}^{22} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{\mu} 2\Omega M_{ij}^{21} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{\mu} [K_{ij}^{B23} + K_{ij}^{B2}] q_j \\ + \sum_{j=1}^{\mu} \Omega^2 [rK_{ij}^{GA2} + K_{ij}^{GB2} - M_{ij}^{22}] q_j = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\mu} M_{ij}^{33} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{\mu} [K_{ij}^{B32} + K_{ij}^{B3}] q_j \\ + \sum_{j=1}^{\mu} \Omega^2 [rK_{ij}^{GA3} + K_{ij}^{GB3}] q_j = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

여기서,

$$M_{ij}^{ab} \triangleq \int_0^L \rho \phi_{ai}(x) \phi_{bj}(x) dx \quad (18)$$

$$K_{ij}^{GAa} \triangleq \int_0^L \rho(L-x) \phi_{ai,x}(x) \phi_{aj,x}(x) dx \quad (19)$$

$$K_{ij}^{GBa} \triangleq \int_0^L \frac{\rho}{2} (L^2 - x^2) \phi_{ai,x}(x) \phi_{aj,x}(x) dx \quad (20)$$

$$K_{ij}^S \triangleq \int_0^L EA \phi_{1i,x}(x) \phi_{1j,x}(x) dx \quad (21)$$

$$K_{ij}^{B2} \triangleq \int_0^L EI_3 \phi_{2i,xx}(x) \phi_{2j,xx}(x) dx \quad (22)$$

$$K_{ij}^{B3} \triangleq \int_0^L EI_2 \phi_{3i,xx}(x) \phi_{3j,xx}(x) dx \quad (23)$$

$$K_{ij}^{Bab} \triangleq \int_0^L EI_{23} \phi_{ai,xx}(x) \phi_{bj,xx}(x) dx \quad (24)$$

$$P_{ai} \triangleq \int_0^L \rho \phi_{ai}(x) dx \quad (25)$$

$$Q_{ai} \triangleq \int_0^L \rho x \phi_{ai}(x) dx \quad (26)$$

식 (19)~(24)에서

$$\phi_{ai,x}(x) \triangleq \frac{\partial \phi_{ai}(x)}{\partial x} \quad (27)$$

$$\phi_{ai,xx}(x) \triangleq \frac{\partial^2 \phi_{ai}(x)}{\partial x^2} \quad (28)$$

운동방정식 (16)과 (17)은 $\alpha=0$ 이거나 $I_2^*=I_3^*$ 인 경우를 제외하면 항상 서로 연성됨을(coupled) 알 수 있으며, 이 연성효과에 의한 진동특성 변화가 본 논문의 주요 관심사이다.

회전 외팔보의 경우 인장방향모드에 의한 고유진동수는 굽힘방향모드에 의한 진동수에 비해 일반적으로 훨씬 높다. 두 방향 모드간의 연성효과는 무차원 회전각속도가 상당히 높은 범위에서만 현저히 나타나므로(참고문헌 (10) 참조) 본 논문에서는 이를 무시하고 굽힘방향 운동방정식인 식 (16)과 (17)만을 이용하여 진동해석을 수행하였다.

식 (18)~(24)에서 ρ 와 E 의 값은 x 의 함수로 주어질 수 있다. 그러나 앞으로 이들의 값이 일정하다 가정하고 식 (16)과 (17)을 무차원화된 진동방정식으로 변환시키기 위해 다음과 같은 변수들을 정의한다.

$$\xi \triangleq \frac{x}{L} \quad (29)$$

$$\vartheta_{\alpha i} \triangleq \frac{q_{\alpha i}}{L} \quad (30)$$

$$\delta \triangleq \frac{r}{L} \quad (31)$$

$$\gamma \triangleq T\Omega \quad (32)$$

$$x \triangleq \frac{I_2^*}{I_3^*} \quad (33)$$

식 (32)에서 T 는 다음과 같이 정의되는 변수이다.

$$T \triangleq \left(\frac{\rho L^4}{EI_3^*} \right)^{1/2} \quad (34)$$

식 (33)을 이용하면,

$$\frac{I_2(x)}{I_3^*} = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x-1)\cos 2\theta \quad (35)$$

$$\frac{I_3(x)}{I_3^*} = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x-1)\cos 2\theta \quad (36)$$

$$\frac{I_{23}(x)}{I_3^*} = \frac{1}{2}(x-1)\sin 2\theta \quad (37)$$

이상의 관계식들을 이용하여 식 (16)과 (17)을 무차원화된 방정식들로 만들면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_3} \bar{M}_{ij}^{22} \ddot{\vartheta}_{2j} \\ & + [\bar{K}_{ij}^{B2} + \gamma^2 (-\bar{M}_{ij}^{22} + \delta \bar{K}_{ij}^{GA2} + \bar{K}_{ij}^{GB2})] \vartheta_{2j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_3} \bar{K}_{ij}^{B23} \vartheta_{3j} = 0 \quad (38) \\ & \sum_{j=1}^{\mu_3} \bar{M}_{ij}^{33} \ddot{\vartheta}_{3j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + [\bar{K}_{ij}^{B3} + \gamma^2 (\delta \bar{K}_{ij}^{GA3} + \bar{K}_{ij}^{GB3})] \vartheta_{3j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_3} \bar{K}_{ij}^{B32} \vartheta_{2j} = 0 \quad (39) \end{aligned}$$

여기서,

$$\bar{M}_{ij}^{ab} \triangleq \int_0^1 \psi_{ai}(\xi) \psi_{bj}(\xi) d\xi \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{ij}^{B2} \triangleq \int_0^1 \frac{1}{2} [(x+1) - (x-1)\cos(2\theta)] \\ \psi_{2i,\xi\xi}(\xi) \psi_{2j,\xi\xi}(\xi) d\xi \quad (41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{ij}^{B3} \triangleq \int_0^1 \frac{1}{2} [(x+1) + (x-1)\cos(2\theta)] \\ \psi_{3i,\xi\xi}(\xi) \psi_{3j,\xi\xi}(\xi) d\xi \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{ij}^{Bab} \triangleq \int_0^1 \frac{1}{2} [(x-1)\sin(2\theta)] \\ \psi_{ai,\xi\xi}(\xi) \psi_{bj,\xi\xi}(\xi) d\xi \quad (43) \end{aligned}$$

$$\bar{K}_{ij}^{GAa} \triangleq \int_0^1 (1-\xi) \psi_{ai,\xi}(\xi) \psi_{aj,\xi}(\xi) d\xi \quad (44)$$

$$\bar{K}_{ij}^{GBa} \triangleq \int_0^1 \frac{1}{2} (1-\xi^2) \psi_{ai,\xi}(\xi) \psi_{aj,\xi}(\xi) d\xi \quad (45)$$

식 (38)과 (39)에서 ϑ_{2j} 와 ϑ_{3j} 로 구성된 column 벡터를 $\underline{\vartheta}$ 라 하고 이 벡터를 시간에 대한 조화함수로 가정하면

$$\underline{\vartheta} = e^{j\omega\tau} \underline{\eta} \quad (46)$$

여기서, ω 는 고유진동수에 T 를 곱한 무차원변수이며 $\underline{\eta}$ 는 각 모드형상을 대표하는 column벡터이다. 식 (46)를 이용하면 식 (38)과 (39)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\omega^2 \underline{M} \underline{\eta} = \underline{K} \underline{\eta} \quad (47)$$

여기서, \underline{M} 과 \underline{K} 는 대칭 정방행렬들로 그를 구성하는 행렬 요소들은 다음과 같다.

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \bar{M}^{22} & 0 \\ 0 & \bar{M}^{33} \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \bar{K}^{B22} & \bar{K}^{B23} \\ \bar{K}^{B32} & \bar{K}^{B33} \end{bmatrix} \quad (49)$$

여기서,

$$\bar{M}^{22} = (\bar{M}_{ij}^{22}) \quad (50)$$

$$\bar{M}^{33} = (\bar{M}_{ij}^{33}) \quad (51)$$

$$\bar{K}^{B23} = (\bar{K}_{ij}^{B23}) \quad (52)$$

$$\bar{K}^{B32} = (\bar{K}_{ij}^{B32}) \quad (53)$$

$$\bar{K}^{B22} = (\bar{K}_{ij}^{B2} + \gamma^2 (\delta \bar{K}_{ij}^{GA2} + \bar{K}_{ij}^{GB2} - \bar{M}_{ij}^{22})) \quad (54)$$

$$\bar{K}^{B33} = (\bar{K}_{ij}^{B3} + \gamma^2 (\delta \bar{K}_{ij}^{GA3} + \bar{K}_{ij}^{GB3})) \quad (55)$$

3. 수치해석

Fig. 3은 해석에 사용된 모드수의 증가에 따른 고유진동수들의 수렴을 대표적으로 보여주는데 임의의 경우에 ($\alpha=45^\circ$, $\delta=1$, $\chi=0.5$, $\gamma=100$) 대해서 수치해석을 수행한 결과이다. 이 결과는 양 굽힘방향 모드수가 각각 10개일 때 가장 낮은 4개의 고유진동수들이 거의 일정한 값에 수렴함을 시각적으로 보여준다. 굽힘방향 각각의 모드수가 9개일 때와 10개일 때의 결과를 수치적으로 비교해 본 결과 두 결과는 서로 약 0.1% 정도의 차이가 있음을 확인할 수 있었는데, 본 연구에서는 이정도 차이를 충분한 수렴으로 간주하고 이후 결과를 얻기 위해서 항상 양 굽힘방향으로 각각 10개의 모드들을 이용하여 수치해석을 수행하였다.

Fig. 4(a)와 Fig. 4(b)는 보의 초기 비틀림이 없을 때 ($\alpha=0^\circ$)와 있을 때 ($\alpha=45^\circ$)의 무차원 회전각속도 증가에 따른 가장 낮은 4개의 고유진동수 궤적을 보여주고 있다. 비틀림이 없는 경우 면내방향과 면외방향 굽힘진동식은 서로 연성되지 않으므로 서로 영향을 주지 않으며 두 고유진동수 궤적은 Fig. 4(a)와 같이 일정점에서 교차한다. 그러나 초기 비틀림이 있는 경우에는 $\chi \neq 1$ 이면 두 방정식이 서로 연성되어 영향을 주게되며 Fig. 4(b)에서 관찰할 수 있듯이 두 궤적은 일정거리까지 접근했다가 교차하지 않고 다시 멀어지는 현상이 발생하는데 이러한 현상을 veering현상이라 부른다(참고문헌 (11), (12) 참조). 이러한 현상에 대한 언급은 기존 문헌에서는 평판이나 박막과 같은 2차원 구조요소에 대

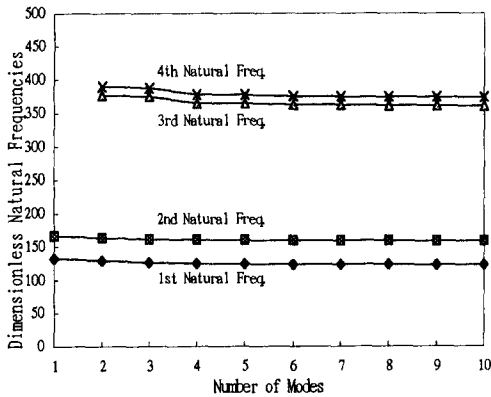
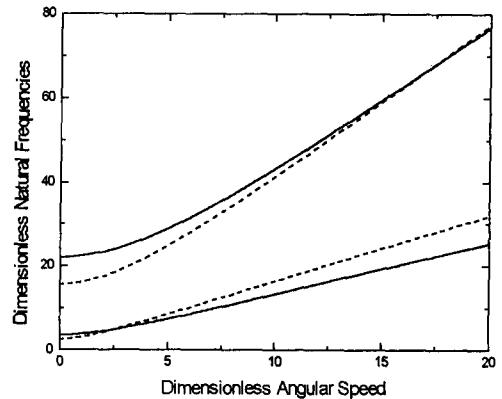


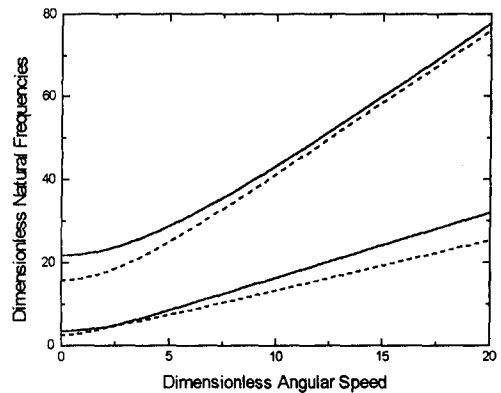
Fig. 3 Convergence of natural frequencies; $\alpha=45^\circ$, $\chi=0.5$, $\delta=1$ and $\gamma=100$

해서만 나타나고 있는데 본 논문의 결과는 이러한 현상이 1차원 구조요소인 보에서도 발생하는 것을 보여준다.

Table 1은 본 연구에서 구해진 수치해석결과들의 정확성을 검증하기 위해 우선 회전이 없는 경우에 대해서 기존의 결과들과(참고문헌 (13), (14)) 비교하고 있다. 이 결과는 서로 오차가 최대 약 0.1% 정도 이내에서 일치하며 이는 모드수의 사용 한도에 따른 수렴오차의 크기와 동일하므로 실제적으로 동등한 결과라 할 수 있다. Table 2는 보가 회전하는 경우 평판이론에 의한 결과와(참고문헌 (15)) 본 연구의 결과를 비교하고 있다. 두 결과는 서로 최대 오차 약 1.5% 정도 범위에서 일치하고 있음을 확인할 수 있었다. 이상의 비교연구는 본 연구에서 제시된 모델링의 신뢰성을 보여준다고 판단된다.



(a) Case of $\alpha=0^\circ$, $\delta=1$ and $\chi=0.5$



(b) Case of $\alpha=45^\circ$, $\delta=1$ and $\chi=0.5$

Fig. 4 Natural frequency variation versus angular speed

Fig. 5는 외팔보의 무차원 회전각속도와 고유 진동수가 일치하는 임계각속도의 위치를 보여주고 있다. Table 3은 $\chi=0.5$ 일 때(면내굽힘 강성이 면외 굽힘 강성보다 더 클 때) 초기 비틀림각의 증가에 따라 임계각속도가 다소 감소함을 보여주며, Table 4는 $\chi=2.0$ 일 때(면외굽힘강성이 면내굽힘 강성보다 더 클 때) 초기 비틀림각의 증가에 따라 임계각속도가 반대로 다소 증가함을 보여준다. Table 3은 또한 축반경의 증가에 따라서 임계각속

도의 변화가 점점 감소하는 것을 보여주고 있는데 이는 비틀림각은 구조강성만 바꾸며 회전에 의한 강성변화 효과와는 무관하기 때문에 축반경의 증가에 따른 회전관성효과가 커질수록 그 영향은 점점

Table 1 Comparison of natural frequencies ; $\chi=0.25, \gamma=0.0$

	α	Present	Ref.(16)	Ref.(17)
1st.	30°	1.7623	1.7630	1.7620
	60°	1.7748	1.7737	1.7742
	90°	1.7950	1.7948	1.7949
2nd.	30°	3.4793	3.4788	3.4787
	60°	3.3799	3.3790	3.3790
	90°	3.2425	3.2422	3.2426
3rd.	30°	11.1693	11.1681	11.1698
	60°	11.6046	11.6025	11.6064
	90°	12.2649	12.2631	12.2611
4th.	30°	21.4489	21.4451	21.4568
	60°	20.1545	20.1497	20.1769
	90°	18.7307	18.7246	18.7661

Table 2 Comparison of natural frequencies ; $\chi=1/400, \alpha=30^\circ$ and $\delta=2.0$

		1st.	2nd.
$\gamma=0.0000$	Ref. (18)	0.1766	1.0001
	Present	0.1763	0.9825
$\gamma=0.0882$	Ref. (18)	0.2217	1.0273
	Present	0.2200	1.0203
$\gamma=0.1763$	Ref. (18)	0.3166	1.1321
	Present	0.3157	1.1254
$\gamma=0.2645$	Ref. (18)	0.4277	1.2852
	Present	0.4288	1.2796

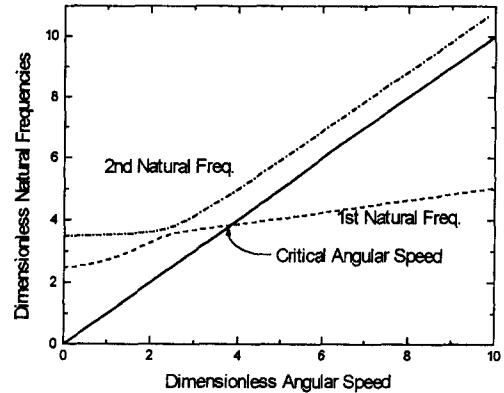


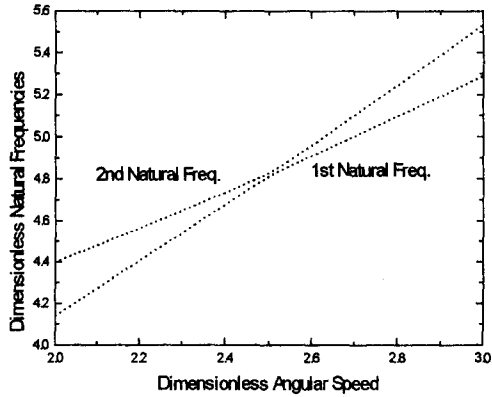
Fig. 5 Critical angular speed at $\alpha=45^\circ, \delta=0$ and $\chi=0.5$

Table 3 Critical angular speed versus hub radius ratio and pretwisted angle ; $\chi=0.5$

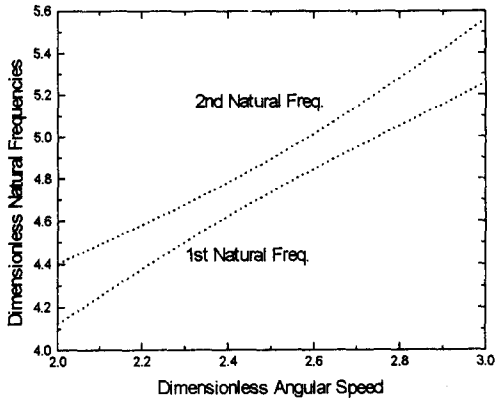
$\delta \backslash \alpha$	0°	15°	30°	45°
0.0	3.8774	3.8728	3.8591	3.8370
0.1	4.2934	4.2890	4.2763	4.2556
0.2	4.8686	4.8664	4.8528	4.8336
0.3	5.7294	5.7258	5.7152	5.6978
0.4	7.1871	7.1841	7.1749	7.1601
0.5	10.2666	10.2644	10.2571	10.2455

Table 4 Critical angular speed versus hub radius ratio and pretwisted angle ; $\chi=2.0$

$\delta \backslash \alpha$	0°	15°	30°	45°
0.0	3.8774	3.8808	3.8907	3.9067
0.1	4.2934	4.2970	4.3078	4.3251
0.2	4.8686	4.8725	4.8842	4.9030
0.3	5.7294	5.7336	5.7460	5.7660
0.4	7.1817	7.1914	7.2040	7.2244
0.5	10.2666	10.2706	10.2825	10.3008



(a) Case of $\alpha=5^\circ$, $\delta=1$ and $\chi=0.5$

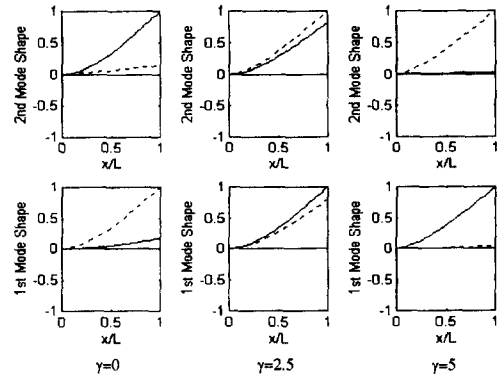


(b) Case of $\alpha=45^\circ$, $\delta=1$ and $\chi=0.5$

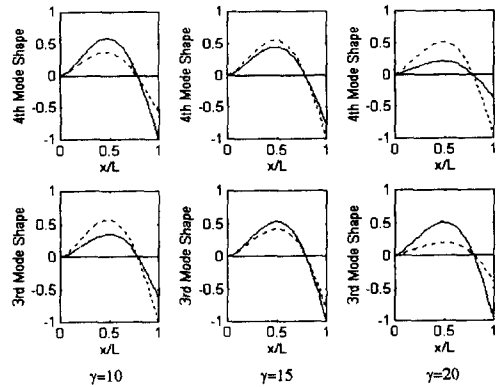
Fig. 6 Veering between first and second dimensionless natural frequencies

미약해지기 때문이다.

Fig. 6은 초기 비틀림각과 축반경비의 차이에 따른 veering현상의 차이를 보여주고 있다. 초기 비틀림각이 큰 경우가(Fig. 6(b)) 작은 경우에(Fig. 6(a)) 비해서 veering현상이 완만하게 일어나는 것을 관찰할 수 있다. Fig. 7은 Fig. 4(b)에 나타난 첫번째와 두번째 궤적간의 veering영역과 세번째 네번째 궤적간의 veering영역에서 발생하는 모드형상의 변화를 보여주고 있는데 3차원 모드형상을 표시하기 위해서 면내방향과 면외방향의 모드를 각기 실선과 점선으로 나타내고 있다. 그림에서 첫번째 모드형상과 두번째 모드형상은 무차원 회전각속도가 2.5 근처에서 급작스러운 veering현상이 발생하며 2.5 근처에서는 첫번째와 두번째 모드의 형상이 비슷해지다가 각속도가 더 커지면 모드형상이 서로 바뀔 것을 보여주고 있다. 세번째와 네번째 궤적은 무



(a) Variations of first and second modes



(b) Variations of third and fourth modes

Fig. 7 Mode shape variations between modes

차원 회전각속도가 15 근처에서 서로 가장 접근하는데 앞의 경우와 달리 완만한 veering현상이다. 이 경우도 무차원 회전각속도가 15 근처에서 세번째와 네번째 모드의 크기가 비슷해지다가 각속도가 더 커짐에 따라 역시 모드형상이 서로 바뀔 것을 보여주고 있다.

5. 결론

본 논문에서는 초기 비틀림을 갖는 회전하는 외팔보의 고유 진동특성을 예측하기 위한 모델링 방법이 제시되었으며 이를 이용하여 해석결과를 도출하였다. 수치해석결과는 회전각속도, 축반경비, 초기 비틀림각의 변화에 따른 고유 진동수의 변화를 보여 주었는데 기존 수치해석 결과와 비교해 봄으로써 본 논문에서 제시된 방법의 정확성을 검증할 수 있었다. 본 논문에서는 특히 초기 비틀림각에

의해 고유진동수 체계가 서로 교차하지 않고 빗겨 나가는 휨현상(veering)이 1차원 구조요소인 보의 경우에도 존재할 수 있음을 보여 주었으며 veering 현상이 급격히 혹은 완만히 발생할 때 상관하는 두 모드형상도 서로 급격히 혹은 완만하게 바뀌는 것을 보여 주었다. 본 논문에서는 또한 초기 비틀림각이 임계각속도의 변화에 약간의 영향을 미치는 것도 보여주었다.

참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A. R. C. Reports and Memoranda No. 766.
- (2) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *J. of App. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, 25, pp. 28~30.
- (3) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *J. Sound and Vibration*, 56, pp. 175~185.
- (4) Hoa, S., 1979, "Vibration of a Rotating Beam with Tip Mass," *J. Sound and Vibration*, 67, pp. 369~381.
- (5) Kuo, Y. H., Wu, T. H. and Lee, S. Y., 1994, "Bending Vibration of a Rotating Non-uniform Beam with Tip Mass and an Elastically Restrained Root," *Computer & Structure*, Vol. 22, No. 2, pp. 229~236.
- (6) Yokoyama, T., 1988, "Free Vibration Characteristics of Rotating Timoshenko Beams," *Int. J. of Mech. Sci.*, Vol. 30, No. 10, pp. 743~755.
- (7) Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," *J. Guidance, Control, and Dynamics*, 10, pp. 139~151.
- (8) Simo, J. and Vu-Quoc L., 1987, "The Role of Non-linear Theories in Transient Analysis of Flexible Structures," *J. of Sound and Vibration*, 119(3), pp. 487~508.
- (9) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," *J. of Sound and Vibration*, 181(2), pp. 261~278.
- (10) 신상하, 유희희, 1995, "Gyroscopic Coupling 효과를 고려한 회전 외팔보의 진동해석," 한국항공우주학회, 춘계 학술대회 논문집, pp. 132~136.
- (11) Leissa, A. W., 1974, "On a Curve Veering Aberration," *Journal of Applied Mathematics and Physics(ZAMP)*, 25, pp. 99~111.
- (12) Perkins, N. C. and Mote, C. D., 1986, "Comment on Curve Veering in Eigenvalue Problems," *Journal of Sound and Vibration*, 106(3), pp. 451~463.
- (13) Carnegie, W. and Thomas, J., 1972, "The Coupled Bending-Bending Vibration of Pre-Twisted Tapered Blading," *J. Engineering for Industry*, pp. 255~266.
- (14) Dokumaci, E., Thomas, J. and Carnegie, W., 1967, "Matrix Displacement Analysis of Coupled Bending-Bending Vibrations of Pre-twisted Blading," *J. Mech. Eng. Sci.*, Vol. 9, No. 4, pp. 247~251.
- (15) Ramamurti, V. and Kielb, R., 1984, "Natural Frequencies of Twisted Rotating Plates," *J. Sound and Vibration*, 97(3), pp. 429~449.