

〈논 문〉

유한요소법에 의한 열점탄성 응력해석

심우진* · 박인규**

(1995년 12월 28일 접수)

Thermoviscoelastic Stress Analysis by the Finite Element Method

Woo-Jin Sim and In-Kyu Park

Key Words: Thermoviscoelastic(열점탄성), Thermorheologically Simple(열유동학적으로 단순한), Hereditary Integral(유전적분), Viscoelasticity Matrix(점탄성 물성행렬), Finite Element Method(유한요소법)

Abstract

Uncoupled, quasi-static and linear thermoviscoelastic problems are analyzed in time domain by the finite element approximation which is developed using the principle of virtual work and viscoelasticity matrices instead of shear and bulk relaxation functions as in usual formulations. The material is assumed to be isotropic, homogeneous and thermorheologically simple, which means that the temperature-time equivalence postulate is effective. The stress-strain laws are expressed by relaxation-type hereditary integrals. In spatial and time discretizations, isoparametric quadratic quadrilateral finite elements and linear time variations are adopted. For explicit derivations, the viscoelastic material is assumed to behave standard linear solid in shear and elastically in dilatation. Two-dimensional examples are solved under general temperature distributions $T = T(x, t)$, and compared with other approximate solutions to show the versatility of the presented analysis.

1. 서 론

등방성 선형 점탄성재료의 등온일 경우에 대한 해석법들은 이미 많이 알려져 있으며, 저자의 경우에는⁽¹⁻⁵⁾를 발표하였다. 그러나 점탄성재료는 일반적으로 온도의 영향을 많이 받으며, 그 거동현상도 모두 동일하지는 않다. 본 논문에서는 현재 공학적으로 널리 사용되고 있는 중합체(polymer)계통의 선형 점탄성재료(예를 들어, 플라스틱)의 열적 거동해석에 국한하기로 한다. 그러한 재료는 온도의 영향을 받았을 때 열유동학적으로 단순하게(thermo-

rheologically simple) 거동하는 것으로 알려져 있다.^(6,7) 그러한 재료의 응력-변형도 관계식에서의 물성행렬은 시간과 위치의 복합함수가 되며, 수학적으로는 물성이 마치 불균일(inhomogeneous)한 것처럼 보이게 한다. 그러므로 이를 유한요소 공식화할 경우 기존의 등온적 해석보다는 더 복잡하고 세밀한 계산이 요구된다. 지금까지 그러한 재료의 열점탄성 해석에 관해서는 많은 연구가 수행되어 왔으며, 유한요소법에 의한 연구는 대표적으로⁽⁸⁻¹¹⁾을 들 수가 있다. 그리고 경계요소법에 의한 연구⁽¹²⁾도 최근에 진행중에 있다.

본 논문에서는 열유동학적으로 단순한 점탄성재료가 외적·열적 하중을 받을 때의 준-정적 선형 점탄성 문제를 유한요소법을 이용해서 해석한다. 이

*회원, 금오공과대학교 기계설계공학과

**회원, 금오공과대학교 대학원 기계설계공학과

를 위하여 기존의 유한요소해법⁽⁸⁻¹¹⁾과는 다른 절차의 공식화 과정을 제시한다. 즉, 그들⁽⁸⁻¹¹⁾은 전단과 체적 이완함수들(식 (4a, b) 참조)을 이용해서 전개하였으며, 본 논문에서는 점탄성 물성행렬(식 (9a) 참조)을 이용해서 전개한다. 그 이유는 기존의 탄성적 해석절차 및 결과를 이용할 수가 있고, 또한 3차원이나 다른 공학분야의 문제들로의 확장 응용이 수월하기 때문이다. 그러나 유전적분으로 인한 과거에 계산된 모든 종속변수들의 저장문제(history or memory effects)가 개선해야할 문제로 남는다.

끝으로, 제시된 유한요소해법의 타당성을 보이기 위하여 일반적 온도분포 $T = T(x, t)$ 조건하의 2차원 문제들을 해석하여 기존의 발표된 근사해들과 수치정확도가 비교되며, 그들의 해석에서 고려되지 않았던 점들을 지적한다. 그리고 강성행렬 계산시 수치적분, 매쉬형상 그리고 시간증분이 미치는 영향을 조사한다. 프로그램의 정확성을 확인하고, 타 논문에서는 해석되지 않았던 공학적으로 중요한 문제들을 새로이 해석하여 제시한다.

2. 지배방정식

‘열유동학적으로 단순한’(thermorheologically simple, 이하 TRS) 점탄성문제의 지배방정식은 등온, 등방성, 선형, 점탄성문제의 지배방정식들⁽¹³⁻¹⁵⁾과 유사하나, 응력-변형률 관계식에서 조금 다르다:

(i) 평형방정식

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(x, t)}{\partial x_j} + f_i(x, t) = 0 \quad (1)$$

여기서, $\sigma_{ij}(x, t)$: 응력, x : 공간벡터, x_j : 직교 좌표성분, f_i : 체적력, t : 시간이다.

(ii) 변형률-변위 관계식

$$\epsilon_{ij}(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial x_i} \right\} \quad (2)$$

여기서, $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$: 변형률, u_i : 변위이다.

(iii) 응력-변형률 관계식

먼저 응력과 변형률의 편차성분들을 다음처럼 정의한다.

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}, \quad \sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \quad (3a)$$

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \epsilon_m \delta_{ij}, \quad \epsilon_m = \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \quad (3b)$$

여기서, s_{ij} : 편차응력, e_{ij} : 편차변형률, σ_m : 평균응력, ϵ_m : 평균변형률, δ_{ij} : Kronecker's delta이다. 그리고, 응력-변형률 관계식은 이완적분형, 지연적분형 그리고 미분형으로 묘사할 수 있는데 여기서는 이완적분형 표현을 사용하기로 하며, 전단변형 및 체적변형의 두 관계식으로 나누어 기술된다. 즉,

$$s_{ij}(x, t) = \int_{-\infty}^t G_1(\xi - \xi') \frac{\partial}{\partial t'} e_{ij}(x, t') dt' \\ = G_1(\xi) * de_{ij}(x, t) \quad (4a)$$

$$\sigma_{kk}(x, t) = \int_{-\infty}^t G_2(\xi - \xi') \frac{\partial}{\partial t'} \{ \epsilon_{kk}(x, t') \\ - 3\alpha_0 \theta(x, t') \} dt' \\ = G_2(\xi) * de\{ \epsilon_{kk}(x, t) - 3\alpha_0 \theta(x, t) \} \quad (4b)$$

여기서, ξ 는 등가시간(reduced time)으로서

$$\xi = \xi(x, t) = \int_0^t \phi(T(x, \lambda)) d\lambda, \quad \xi' = \xi(x, t') \quad (5)$$

로 정의되며, ϕ 는 이전함수(shift function)^(6,7)이다. $G_1(\xi)$, $G_2(\xi)$ 는 등온의 경우에 해당되는 이완함수들 $G_1(t)$, $G_2(t)$ 의 t 변수 대신에 ξ 를 대입한 것이다. 그리고,

$$G_1(\xi) = 2\mu(\xi), \quad G_2(\xi) = 3k(\xi) \quad (6)$$

의 관계식을 가지며 $\mu(t)$, $k(t)$ 는 탄성론에서의 전단계수 및 체적계수의 의미를 갖는다. 그리고 부호 *는 Stieltjes convolution⁽¹³⁾이다. θ 는 등가온도(pseudo temperature)로서

$$\theta(x, t) = \frac{1}{\alpha_0} \int_{T_0}^{T(x, y)} \alpha(T') dt', \quad \alpha_0 = \alpha(T_0) \quad (7)$$

처럼 정의된다. 식 (7)에서 $\alpha(T)$ 는 온도의 지배를 받는 열팽창계수이며, α_0 는 기준온도 T_0 에서의 값이다. 만약 $\alpha(T) = \alpha_0 =$ 일정 이라면

$$\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 \quad (8)$$

가 된다. 식 (4a, b)가 등온일 경우의 관계식⁽³⁻⁵⁾과 다른 점은 이완함수의 독립변수가 ξ 로 바뀌었다는 것과 열변형을 고려했다는 점이다. 그리고 구성방

정식 (4a, b)는 다음처럼 하나의 식으로 표현될 수가 있다. 즉,

$$\sigma_{ij}(x, t) = D_{ijkl}(\xi) * d\{\varepsilon_{kl}(x, t) - \varepsilon_0(x, t) \delta_{kl}\} \quad (9a)$$

$$= 2\mu(\xi) * d\varepsilon_{ij}(x, t) + k(\xi) * d\{\varepsilon_{kk}(x, t) - 3\varepsilon_0(x, t)\} \delta_{ij} \quad (9b)$$

$$= s_{ij}(x, t) + \sigma_m(x, t) \delta_{ij} \quad (9c)$$

식 (9a)에서 $D_{ijkl}(\xi)$ 는 $G_1(\xi)$, $G_2(\xi)$ 로 구성되는 온도중속의 점탄성 물성행렬(viscoelasticity matrix)의 텐서표기이며, 탄성문제 해석에서의 탄성행렬과 같은 개념으로서 4절에서 설명한다.

$$\varepsilon_{ij}(x, t) = \varepsilon_{ij}^e(x, t) + \varepsilon_0(x, t) \delta_{ij} \quad (10)$$

이며, ε_{ij} 는 총변형률, ε_{ij}^e 는 외력에 의한 변형률, 그리고 ε_0 는 열변형률이다. 즉,

$$\varepsilon_0(x, t) = \alpha_0 \theta(x, t) \quad (11)$$

(iv) 초기 및 경계조건 :

$$u_i(x, t) = \varepsilon_{ij}(x, t) = \sigma_{ij}(x, t) = 0, \quad t < 0 \quad (12)$$

그리고

$$u_i(x, t) = U_i(x, t) \quad \Gamma_u \text{에서} \quad (13a)$$

$$t_i(x, t) = \sigma_{ij}(x, t) n_j(x) \quad \Gamma_t \text{에서} \quad (13b)$$

여기서, Γ_u , Γ_t 는 변위 및 표면력 조건이 주어지는 경계면으로써 두면의 경계가 시간에 따라 변하지 않아야 한다.

3. 유한요소방정식

먼저, TRS 점탄성재료의 준-정적, 등방성, 선형 해석을 위한 변분공식화 과정을 간단히 요약하면 다음과 같다. 즉,

$$\int_{\Omega} \{\sigma_{ij,j}(x, t) + f_i(x, t)\} \delta u_i(x, t) d\Omega = 0 \quad (14)$$

여기서, δ 는 변분기호, Ω 는 영역을 나타내는 기호이다.

식 (14)를 부분적분하고, divergence 이론을 사용하면 최종적으로 다음의 결과를 얻을 수가 있다. 즉,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma_{ij}(x, t) \delta \varepsilon_{ij}(x, t) d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} t_i(x, t) \delta u_i(x, t) d\Gamma + \int_{\Omega} f_i(x, t) \delta u_i(x, t) d\Omega \end{aligned} \quad (15)$$

여기서, 식 (15)는 준-정적, 선형 점탄성문제에 대한 가상일의 원리의 표현이라고 생각할 수 있다.

식 (9a)를 식 (15)에 대입하고 정리하면

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} D_{ijkl}(\xi) * d\varepsilon_{kl}(x, t) \delta \varepsilon_{ij}(x, t) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} t_i(x, t) \delta u_i(x, t) d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} f_i(x, t) \delta u_i(x, t) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} D_{ijkl}(\xi) * d\varepsilon_0(x, t) \delta_{kl} \delta \varepsilon_{ij}(x, t) d\Omega \end{aligned} \quad (16)$$

가 된다. 식 (16)은 준-정적 선형 열점탄성 문제의 해석을 위한 변분공식이다.

한편, 유한요소방정식의 유도는 식 (16)에서 종속함수 $u_i(x, t)$ 가 변수분리 형태로 표현된다고 가정함으로써 출발한다. 즉,

$$u_i(x, t) = \sum_{n=1}^N \Psi_n(t) u_i^n(x) \quad (17)$$

여기서, t 는 현재의 시간절점 N 에 해당하는 시간이며, $\Psi_n(t)$ 는 전 시간구간에 관한 내삽함수(global time interpolation functions), $u_i^n(x)$ 는 $t = t_n$ 에서의 변위장으로서 미지함수, 그리고 n 은 임의의 시간절점이다.

식 (16)에서 체적력항을 무시하고, 식 (17)을 대입시키고 정리하면

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} D_{ijkl}(\xi) * du_{kl,i}(x, t) \delta u_{ij}^N(x) d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} t_i(x, t) \delta u_i^N(x) d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} D_{ijkl}(\xi) * d\varepsilon_0(x, t) \delta_{kl} \delta u_{ij}^N(x) d\Omega \end{aligned} \quad (18)$$

이 된다. 식 (18)에서 시간변수에 관한 유전적분(hereditary integral) 항을 풀기 위해서 시간축을 등간격으로 나누고 변위함수 $u_i(x, t)$ 가 각 시간구간에서 선형적으로 변화한다고 가정한다.^(4,5) 즉,

$$u_i(x, t) = \sum_{n=1}^{N-1} \{\phi_1(t) u_i^n(x) + \phi_2(t) u_i^{n+1}(x)\} \quad (19)$$

여기서, $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ 는 $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ 에서 시간에 관한 선형의 내삽함수로서

$$\phi_1(\tau) = \frac{t_{n+1} - \tau}{\Delta T}, \quad \phi_2(\tau) = \frac{\tau - t_n}{\Delta T} \quad (20)$$

이며, 시간절점은 다음처럼 정의한다.

$$t_n = (n-1)\Delta T, \quad t_{n+1} = n\Delta T \quad (21)$$

식 (20)을 식 (18)에 대입하면,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} D_{ijkl}(\xi) u_{k,l}(x, 0) \delta u_{i,j}^N(x) d\Omega \\ & + \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^{N-1} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} D_{ijkl}(\xi - \xi') dt' \right] \{u_{k,l}^{n+1}(x) \\ & - u_{k,l}^n(x)\} \delta u_{i,j}^N(x) d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} t_i(x, t) \delta u_i^N(x) d\Gamma + \int_{\Omega} \int_{0^+}^t D_{ijkl}(\xi - \xi') \\ & \frac{\partial}{\partial t'} \{\epsilon_0(x, t') \delta_{kl}\} dt' \delta u_{i,j}^N(x) d\Omega \quad (22) \end{aligned}$$

이 된다. 식 (22)를 등온의 경우^(4,5)의 결과식과 비교하면 이완함수 D_{ijkl} 이 ξ 의 함수, 즉 시간변수 이외에 공간변수의 함수이며, 열변형이 고려된 점이 다르다. 식 (22)를 유한요소법의 개념을 도입하여 행렬식으로 표현하면 다음에서처럼 등방성 선형 열점탄성 문제해석을 위한 유한요소방정식이 유도된다. 즉,

$$\begin{aligned} & [K(\xi - \xi')]_{N-1}^N \{u^N - u^{N-1}\} \\ & = - \sum_{n=1}^{N-2} [K(\xi - \xi')]_{n+1}^{n+1} \{u^{n+1} - u^n\} \\ & - \Delta t [K(\xi)] \{u^1\} + \Delta t \{F\} \quad (23) \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} & [K(\xi - \xi')]_{N-1}^N \\ & = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} [B]^T [D(\xi - \xi')]_{N-1}^N [B] d\Omega \quad (24a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [K(\xi - \xi')]_{n+1}^{n+1} \\ & = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} [B]^T [D(\xi - \xi')]_{n+1}^{n+1} [B] d\Omega \quad (24b) \end{aligned}$$

$$[K(\xi)] = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} [B]^T [D(\xi)] [B] d\Omega \quad (24c)$$

$$\{F\} = \{F_s\} + \{F_0\} \quad (24d)$$

$$\{F_s\} = \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma^e} [N]^T \{t_i(x, t)\} d\Gamma \quad (24e)$$

$$\begin{aligned} \{F_0\} & = \sum_{e=1}^E \left[\int_{\Omega^e} [B]^T [D(\xi)] \{\epsilon_0(x, 0)\} d\Omega \right. \\ & \left. + \int_{\Omega^e} \int_{0^+}^t [B]^T [D(\xi - \xi')] \{\dot{\epsilon}_0(x, t')\} dt' d\Omega \right] \quad (24f) \end{aligned}$$

$$[D(\xi - \xi')]_{n+1}^{n+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} [D(\xi - \xi')] dt' \quad (24g)$$

$$[D(\xi)] = [D_{ijkl}(\xi)] \quad (24h)$$

식 (24a~h)에서 $[N]$ 은 형상함수 행렬, $[B]$ 는 변형률-변위 행렬로서,⁽¹⁶⁾ $\{F_s\}$ 는 표면력, $\{F_0\}$ 는 열변형에 의한 외력, 그리고 $\{\epsilon_0(x, t)\} = \frac{\partial}{\partial t} \{\epsilon_0(x, t) \delta_{kl}\}$ 이다. 열점탄성 행렬 $[D(\xi)]$ 는 시간과 공간의 함수로서 재료의 물성이 불균질한 것처럼 보이게 한다.

4. 점탄성 물성행렬의 적분

등온, 등방성, 선형 점탄성 문제해석을 위한 점탄성 물성행렬 $[D(t)]$ 및 그것의 시간에 관한 적분 $[\underline{D}(t-\tau)]_{n+1}^{n+1}$ 에 대한 표현은 참고문헌⁽³⁻⁵⁾에 유도되어 있으며, 그때 수식적 표현을 위하여 점탄성 재료는 정수압 변형시 탄성의 성질을 갖고, 전단변형시 표준화된 3요소 고체모델의 특성으로 거동함을 가정하였다. 즉,

$$\begin{aligned} \mu(t) & = \mu_0 \{c + (1-c) e^{-t/\tau_0}\} \\ k(t) & = k_0 \quad (25) \end{aligned}$$

여기서, μ_0 , k_0 는 초기탄성계수, c 는 상수, τ_0 는 이완시간이다. 그리고 본 논문에서는 평면변형의 경우를 예로써 전개하기로 한다.

TRS 점탄성재료에 대한 물성행렬은 등온 경우의 점탄성 물성행렬 $[D(t)]$ 에 t 를 ξ 로 바꾸어 구한다. 즉,

$$[D(\xi)] = \begin{cases} d_{11} = d_{22} = p_4 + p_5 e^{-\beta_1 \xi} + p_6 e^{-\beta_2 \xi} \\ d_{12} = d_{21} = q_4 + q_5 e^{-\beta_1 \xi} + q_6 e^{-\beta_2 \xi} \\ d_{33} = w_1 + w_2 e^{-\lambda \xi} \end{cases} \quad (26)$$

여기서, d_{ij} 는 온도종속인 경우의 점탄성 물성행렬 $[D(\xi)]$ 의 요소를 의미하며 상수들 p_4 , p_5 , p_6 , q_4 , q_5 , q_6 , w_1 , w_2 , β_1 , β_2 , λ 는 참고문헌⁽³⁻⁵⁾에 수록되어 있으며, 혼돈을 피하기 위해서 참고문헌의 표기에서의 ξ_1 , ξ_2 를 본 논문에서는 β_1 , β_2 로 α 를 c 로 $\lambda = \tau_0^{-1}$ 로 바꾸었다. 그리고 평면응력의 경우를 취급할 때는 p_4 , p_5 , p_6 , q_4 , q_5 , q_6 , β_1 , β_2 대신 p_1 , p_2 , p_3 , q_1 , q_2 , q_3 , γ_1 , γ_2 를 대입하면 된다.

한편 식 (23)을 풀기 위해서는 등식 우측에서의 유전적 강성행렬들 및 힘벡터를 먼저 계산해야 한다. 그리고 강성행렬, 예를 들어 식 (24b) 계산을 위해서는 $[\underline{D}(\xi - \xi')]_{n+1}^{n+1}$ 가 수식적으로 표현되면 좋는데 이것은 몇가지 가정을 통해서 가능하다. 이를

설명하기 위해서 식 (26)의 대표적인 항을 택하여 전개하기로 한다. 즉,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} p_5 e^{-\beta_1(\xi-\xi')} dt' \quad (27)$$

식 (27)에서 ξ 는 식 (5)에서 보듯이 일반적으로 t 와 x 의 함수로서 $T=T(t)$ 와 $T=T(x)$ 의 경우에는 완전적분이 가능하다. 그러나 $T=T(x, t)$ 일 경우에 이론적으로 완전한 적분은 불가능하다. 그러므로 수치적분에 의존하거나, 혹은 다른 근사적 해법에 의존해야 한다. 본 논문에서는 $T=T(x, t)$ 의 경우를 취급하며 심프슨법칙(Simpson's rule)⁽¹⁷⁾을 이용하여 ξ 를 근사적으로 구한다. 심프슨 법칙에 의하면 함수 $F(t)$ 의 구간 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 근사적인 수치적분을 다음처럼 표현하고 있다.

$$\int_{t=a}^{t=b} F(t) dt = \frac{b-a}{6} \left[F(a) + 4F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F(b) \right] \quad (28)$$

그러므로 ξ_n 과 $\xi(=\xi_N)$ 는 다음처럼 구할 수가 있다.

$$\begin{aligned} \xi_n &= \xi_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \phi(x, \lambda) d\lambda \\ &= \xi_{n-1} + \frac{\Delta t}{6} \left[\phi(x, t_{n-1}) \right. \\ &\quad \left. + 4\phi\left(x, \frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right) + \phi(x, t_n) \right] \end{aligned} \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_N = \xi_{N-1} + \int_{t_{N-1}}^{t_N} \phi(x, \lambda) d\lambda \\ &= \xi_{N-1} + \frac{\Delta t}{6} \left[\phi(x, t_{N-1}) \right. \\ &\quad \left. + 4\phi\left(x, \frac{t_{N-1}+t_N}{2}\right) + \phi(x, t_N) \right] \end{aligned} \quad (29b)$$

여기서, 이전함수 $\phi(x, \lambda) = \phi(T(x, \lambda))$ 이다. 그리고 만약 시간구간 $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ 사이에서 $\phi(x, t)$ 가 일정하다고 가정한다면 식 (27)은 다음처럼 계산된다.⁽¹⁸⁾ 즉,

$$\begin{aligned} &\int_{t_n}^{t_{n+1}} p_5 e^{-\beta_1(\xi-\xi')} dt' \\ &= \frac{p_5 \Delta t}{\beta_1(\xi_{n+1}-\xi_n)} [e^{-\beta_1(\xi-\xi_{n+1})} - e^{-\beta_1(\xi-\xi_n)}] \end{aligned} \quad (30)$$

식 (30)을 이용하면 식 (24g)는 다음과 같이 된다.

$$[D(\xi-\xi')]_{t_n}^{t_{n+1}}$$

$$= \begin{cases} d_{11} = d_{22} = p_4 \Delta t \\ \quad + \frac{p_5 \Delta t}{\beta_1 \Delta \xi_n} [e^{-\beta_1(\xi-\xi_{n+1})} - e^{-\beta_1(\xi-\xi_n)}] \\ \quad + \frac{p_5 \Delta t}{\beta_2 \Delta \xi_n} [e^{-\beta_2(\xi-\xi_{n+1})} - e^{-\beta_2(\xi-\xi_n)}] \\ d_{12} = d_{21} = q_4 \Delta t \\ \quad + \frac{q_5 \Delta t}{\beta_1 \Delta \xi_n} [e^{-\beta_1(\xi-\xi_{n+1})} - e^{-\beta_1(\xi-\xi_n)}] \\ \quad + \frac{q_5 \Delta t}{\beta_2 \Delta \xi_n} [e^{-\beta_2(\xi-\xi_{n+1})} - e^{-\beta_2(\xi-\xi_n)}] \\ d_{33} = w_1 \Delta t \\ \quad + \frac{w_2 \Delta t}{\lambda \Delta \xi_n} [e^{-\lambda(\xi-\xi_{n+1})} - e^{-\lambda(\xi-\xi_n)}] \end{cases} \quad (31)$$

여기서, $\Delta \xi_n = \xi_{n+1} - \xi_n$ 이다.

5. 유한요소방정식의 수치계산

본 절에서는 유한요소방정식 식 (23)의 계산과정을 일반적인 온도분포 $T=T(x, t)$ 경우에 대하여 그 진행절차를 몇단계 살펴보기로 한다.

(i) $N=1, t=(N-1)\Delta t=0(\xi=0)$ 의 경우 :

식 (23)의 마지막 두 항만이 사용된다. 즉,

$$\int_a [B]^T [D(0)] [B] d\Omega \{u^1\} = \{F_s\} + \{F_0\} \quad (32)$$

위식에서 $\{F_s\}$ 의 계산은 보통의 탄성이나 등온의 점탄성 경우와 동일하다. $\{F_0\}$ 의 계산에서 $t=0$ 의 경우에는 식 (24f)에서 첫째항만이 고려된다. 즉 $\{u^1\}$ 은 열탄성해와 동일한 의미를 갖는다. 그리고 만약 열팽창계수가 일정하다면 식 (8), (11)로부터 열변형률벡터 $\{\epsilon_0(x, t)\}$ 는 다음처럼 된다. 즉,

$$\begin{aligned} \{\epsilon_0(x, t)\} &= \{\alpha_0(T(x, t) - T_0) \delta_{ki}\} \\ &\text{평면응력의 경우} \end{aligned} \quad (33a)$$

$$\begin{aligned} \{\epsilon_0(x, t)\} &= (1+\nu) \{\alpha_0(T(x, t) - T_0) \delta_{ki}\} \\ &\text{평면변형률의 경우} \end{aligned} \quad (33b)$$

(ii) $N=2, t=2\Delta t$ 의 경우 :

$$\begin{aligned} &[K(\Delta \xi)] \{u^2 - u^1\} \\ &= -\Delta t [K(\xi)] \{u^1\} + \Delta t \{F_s\} + \{F_0\} \\ &[K(\Delta \xi)] \{u^2\} \\ &= [[K(\Delta \xi)] - \Delta t [K(\xi)]] \{u^1\} + \Delta t \{F_s\} + \{F_0\} \end{aligned} \quad (34)$$

여기서, $[K(\Delta \xi)] = [K(\xi - \xi')]_{N-1}^N$ 이며 식 (24a)를 참조하고, $[K(\xi)]$ 는 식 (24c)를 참조하며, 이들 강성행렬들에 관한 것은 다음 단계 (iii)에서 자

세히 설명하기로 한다. 한편 식 (24f)의 $\{F_0\}$ 를 전
개시키면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{F_0\} &= \sum_{\xi=1}^{\xi} \int_{\Omega^e} [B]^T [D(\xi)] \{\varepsilon(x, 0)\} d\Omega \\ &+ \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{\xi=1}^{\xi} \int_{\Omega^e} [B]^T [\underline{D}(\xi - \xi')] \varepsilon_0^{n+1} \\ &\quad \{\varepsilon_0^{n+1}(x) - \varepsilon_0^n(x)\} d\Omega \\ &= -\frac{1}{\Delta t} \sum_{\xi=1}^{\xi} \int_{\Omega^e} [B]^T [\underline{D}(\xi - \xi')] \varepsilon_0^n \\ &\quad - \Delta t [D(\xi)] \{\varepsilon_0^n(x)\} d\Omega \\ &- \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^{N-2} \sum_{\xi=1}^{\xi} \int_{\Omega^e} [B]^T [\underline{D}(\xi - \xi')] \varepsilon_0^{n+2} \\ &\quad - [\underline{D}(\xi - \xi')] \varepsilon_0^{n+1}(x) d\Omega \\ &+ \frac{1}{\Delta t} \sum_{\xi=1}^{\xi} \int_{\Omega^e} [B]^T [\underline{D}(\xi - \xi')] \varepsilon_0^n \{\varepsilon_0^n(x)\} d\Omega \end{aligned} \quad (35)$$

현단계 ($N=2$)에서는 식 (35) 등식우측의 두번째
항이 무시된다. 그리고 식 (35)의 유도에 있어서

$$\varepsilon_0(x, t) = \sum_{n=1}^{N-1} \{\phi_1(t) \varepsilon_0^n(x) + \phi_2(t) \varepsilon_0^{n+1}(x)\} \quad (36)$$

즉, 각 시간구간에서 열변형률이 선형적으로 변
한다는 가정을 사용하였다. 참고로, 열탄성문제에
서는 $[D]$ 가 일정하고, 등온의 점탄성문제에서는
 $[D(t)]$ 가 시간의 함수, 그리고 현재의 문제에서는
 $[D(\xi)]$ 가 시간뿐 아니라 공간변수의 함수가 된
다는 점이다. 그러므로, 수치계산시 특히 가우스 적
분하여 요소강성계수 행렬을 만들 때 가우스점의
위치가 바뀔 때마다 $[D(\xi)]$ 계산을 새로 해야
한다.

(iii) $N \geq 3$, $t = (N-1)\Delta t$ 의 경우 :

일반적인 경우로써 $1 \leq n \leq N-2$ 범위를 가지며,
식 (23)의 $\sum_{n=1}^{N-2}$ 기호가 적용된다. 즉,

$$\begin{aligned} [K(\Delta\xi)] \{u^N\} &= \sum_{n=1}^{N-2} [K(\xi, n)] \{u^{n+1}\} \\ &+ [K'(\xi)] \{u^1\} + \Delta t \{F\} \end{aligned} \quad (37)$$

여기서,

$$\begin{aligned} [K(\Delta\xi)] &= [K(\xi - \xi')] \varepsilon_{n-1} \\ &= \int_{\Omega} [B]^T [\underline{D}(\xi - \xi')] \varepsilon_{n-1} [B] d\Omega \end{aligned} \quad (38)$$

이다. 그리고 식(31)로부터

$$[\underline{D}(\xi - \xi')] \varepsilon_{n-1}$$

$$\begin{cases} \underline{d}_{11} = \underline{d}_{22} = p_4 \Delta t + \frac{p_5 \Delta t}{\beta_1 \Delta \xi_{N-1}} [1 - e^{-\beta_1 \Delta \xi_{N-1}}] \\ \quad + \frac{p_6 \Delta t}{\beta_2 \Delta \xi_{N-1}} [1 - e^{-\beta_2 \Delta \xi_{N-1}}] \\ \underline{d}_{12} = \underline{d}_{21} = q_4 \Delta t + \frac{q_5 \Delta t}{\beta_1 \Delta \xi_{N-1}} [1 - e^{-\beta_1 \Delta \xi_{N-1}}] \\ \quad + \frac{q_6 \Delta t}{\beta_2 \Delta \xi_{N-1}} [1 - e^{-\beta_2 \Delta \xi_{N-1}}] \\ \underline{d}_{33} = w_1 \Delta t + \frac{w_2 \Delta t}{\lambda \Delta \xi_{N-1}} [1 - e^{-\lambda \Delta \xi_{N-1}}] \end{cases} \quad (39)$$

이며, 여기서, $\Delta \xi_{N-1} = \xi_N - \xi_{N-1}$ 이다.

식 (38)의 $[K(\Delta\xi)]$ 는 $T = T(x)$ 일 경우 일정하
나, $T = T(x, t)$ 의 경우에는 시간과 공간함수의
비선형적 결합이 되므로 매번 새로 계산하여야 하
며, 이는 $[K(\xi, n)]$, $[K'(\xi)]$ 계산에서도 마찬가
지이다 :

$$\begin{aligned} [K(\xi, n)] &= \int_{\Omega} [B]^T [\underline{D}(\xi - \xi')] \varepsilon_{n-2} \\ &\quad - [\underline{D}(\xi - \xi')] \varepsilon_{n-1} [B] d\Omega \end{aligned} \quad (40)$$

여기서,

$$\begin{aligned} &[\underline{D}(\xi - \xi')] \varepsilon_{n-2} - [\underline{D}(\xi - \xi')] \varepsilon_{n-1} \\ &= \begin{cases} \underline{d}_{11} = \underline{d}_{22} = \frac{p_5 \Delta t}{\beta_1 \Delta \xi_A} [e^{-\beta_1(\xi - \xi_{n+2})} - e^{-\beta_1(\xi - \xi_{n+1})}] \\ \quad - \frac{p_5 \Delta t}{\beta_1 \Delta \xi_B} [e^{-\beta_1(\xi - \xi_{n+1})} - e^{-\beta_1(\xi - \xi_n)}] \\ \quad + \frac{p_6 \Delta t}{\beta_2 \Delta \xi_A} [e^{-\beta_2(\xi - \xi_{n+2})} - e^{-\beta_2(\xi - \xi_{n+1})}] \\ \quad - \frac{p_6 \Delta t}{\beta_2 \Delta \xi_B} [e^{-\beta_2(\xi - \xi_{n+1})} - e^{-\beta_2(\xi - \xi_n)}] \\ \underline{d}_{12} = \underline{d}_{21} = \frac{q_5 \Delta t}{\beta_1 \Delta \xi_A} [e^{-\beta_1(\xi - \xi_{n+2})} - e^{-\beta_1(\xi - \xi_{n+1})}] \\ \quad - \frac{q_5 \Delta t}{\beta_1 \Delta \xi_B} [e^{-\beta_1(\xi - \xi_{n+1})} - e^{-\beta_1(\xi - \xi_n)}] \\ \quad + \frac{q_6 \Delta t}{\beta_2 \Delta \xi_A} [e^{-\beta_2(\xi - \xi_{n+2})} - e^{-\beta_2(\xi - \xi_{n+1})}] \\ \quad - \frac{q_6 \Delta t}{\beta_2 \Delta \xi_B} [e^{-\beta_2(\xi - \xi_{n+1})} - e^{-\beta_2(\xi - \xi_n)}] \\ \underline{d}_{33} = \frac{w_2 \Delta t}{\lambda \Delta \xi_A} [e^{-\lambda(\xi - \xi_{n+2})} - e^{-\lambda(\xi - \xi_{n+1})}] \\ \quad - \frac{w_2 \Delta t}{\lambda \Delta \xi_B} [e^{-\lambda(\xi - \xi_{n+1})} - e^{-\lambda(\xi - \xi_n)}] \end{cases} \end{aligned} \quad (41)$$

이며, $\Delta \xi_A = \xi_{n+2} - \xi_{n+1}$, $\Delta \xi_B = \xi_{n+1} - \xi_n$ 이다. 그러
고 $[K(\xi, n)]$ 는 매시간마다 $N-2$ 개를 새로 계산하
야 한다.

$$[K'(\xi)] = \int_{\Omega} [B]^T [D'(\xi)] [B] d\Omega \quad (42)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 & [D'(\xi)] \\
 & = [D(\xi - \xi')]^2 - \Delta t [D(\xi)] \\
 & \begin{cases} d'_{11} = d'_{22} = \frac{\beta_2 \Delta t}{\beta_1 \Delta \xi_1} [e^{-\beta_1(\xi_1 - \xi_2)} - e^{-\beta_1(\xi_1 - \xi_1)}] - \Delta t p_5 e^{-\beta_1 \xi_1} \\
 \quad + \frac{\beta_2 \Delta t}{\beta_2 \Delta \xi_1} [e^{-\beta_2(\xi_1 - \xi_2)} - e^{-\beta_2(\xi_1 - \xi_1)}] - \Delta t p_6 e^{-\beta_2 \xi_1} \\
 d'_{12} = d'_{21} = \frac{q_5 \Delta t}{\beta_1 \Delta \xi_1} [e^{-\beta_1(\xi_1 - \xi_2)} - e^{-\beta_1(\xi_1 - \xi_1)}] - \Delta t q_5 e^{-\beta_1 \xi_1} \\
 \quad + \frac{q_6 \Delta t}{\beta_2 \Delta \xi_1} [e^{-\beta_2(\xi_1 - \xi_2)} - e^{-\beta_2(\xi_1 - \xi_1)}] - \Delta t q_6 e^{-\beta_2 \xi_1} \\
 d'_{33} = \frac{w_2 \Delta t}{\lambda \Delta \xi_1} [e^{-\lambda(\xi_1 - \xi_2)} - e^{-\lambda(\xi_1 - \xi_1)}] - \Delta t w_2 e^{-\lambda \xi_1} \end{cases} \quad (43)
 \end{aligned}$$

이며 $\Delta \xi_1 = \xi_2 - \xi_1$ 이고, $[K'(\xi)]$ 는 매시간 새로 계산해야 한다.

6. 응력 계산

TRS 모델에 관한 응력-변형률 관계식은 식(9)와 같으며 다음처럼 계산하게 된다. 즉,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}(x, \xi) & = D_{ijkl}(\xi) \epsilon_{kl}(x, 0) \\
 & + \int_0^t D_{ijkl}(\xi - \xi') \frac{\partial}{\partial t'} \epsilon_{kl}(x, t') dt' \\
 & - D_{ijkl}(\xi) \epsilon_0(x, 0) \delta_{kl} \\
 & - \int_0^t D_{ijkl}(\xi - \xi') \frac{\partial}{\partial t'} \epsilon_0(x, t') \delta_{kl} dt' \quad (44)
 \end{aligned}$$

식(44)를 수치계산하기 위하여 변형률 $\epsilon_{kl}(x, t)$ 와 $\epsilon_0(x, t)$ 는 각 시간구간에서 선형적으로 변화한다고 가정한다. 즉,

$$\epsilon_{ij}(x, t) = \sum_{n=1}^{N-1} \{ \phi_1(t) \epsilon_{ij}^n(x) + \phi_2(t) \epsilon_{ij}^{n+1}(x) \} \quad (45a)$$

$$\epsilon_0(x, t) = \sum_{n=1}^{N-1} \{ \phi_1(t) \epsilon_0^n(x) + \phi_2(t) \epsilon_0^{n+1}(x) \} \quad (45b)$$

식(45)를 식(44)에 대입하여 전개하는 과정은 식(22)의 좌측항의 수식 유도과정과 동일하다. 그러므로,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}(x, t) & = D_{ijkl}(\xi) \epsilon_{kl}(x, 0) \\
 & + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\{ \epsilon_{kl}^{n+1}(x) - \epsilon_{kl}^n(x) \}}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} D_{ijkl}(\xi - \xi') dt' \\
 & - D_{ijkl}(\xi) \epsilon_0(x, 0) \delta_{kl}
 \end{aligned}$$

$$- \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\{ \epsilon_0^{n+1}(x) - \epsilon_0^n(x) \} \delta_{kl}}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} D_{ijkl}(\xi - \xi') dt' \quad (46)$$

식(46)은 다음과 같은 행렬식으로 표현 가능하다.

$$\begin{aligned}
 \{\sigma(x, t)\} & = [D(\xi)] \{\epsilon^1(x)\} \\
 & + \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^{N-1} [D(\xi - \xi')]_{t_n}^{t_{n+1}} \{ \epsilon^{n+1}(x) - \epsilon^n(x) \} \\
 & - [D(\xi)] \{ \epsilon_0^1(x) \} \\
 & - \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^{N-1} [D(\xi - \xi')]_{t_n}^{t_{n+1}} \{ \epsilon_0^{n+1}(x) - \epsilon_0^n(x) \} \\
 & = - \frac{1}{\Delta t} [[D(\xi - \xi')]]_{t_0}^{t_1} \{ \epsilon^1(x) - \epsilon_0^1(x) \} \\
 & - \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^{N-2} [[D(\xi - \xi')]]_{t_n}^{t_{n+2}} \\
 & - [D(\xi - \xi')]_{t_n}^{t_{n+1}} \{ \epsilon^{n+1}(x) - \epsilon_0^{n+1}(x) \} \\
 & + \frac{1}{\Delta t} [D(\xi - \xi')]_{t_{N-1}}^{t_N} \{ \epsilon^N(x) - \epsilon_0^N(x) \} \quad (47)
 \end{aligned}$$

식(47)을 전개하는 과정은 6절의 내용과 유사하다. 그리고 식(47)의 계산을 위해서는 매시간 변위를 구한 후 변형률 $\{\epsilon^1\}, \{\epsilon^2\}, \dots, \{\epsilon^N\}$ 도 함께 계산하여 저장해 놓아야 하며, 또 열변형률도 필요함을 알 수 있다. $T = T(x)$ 의 경우, 열변형률은 시간에 무관하므로 $t=0$ 일 때 한 번만 계산하여 저장시켜놓고 계속 사용하면 되나, $T = T(x, t)$ 의 경우, $\{\epsilon_0^1(x)\}, \{\epsilon_0^2(x)\}, \dots, \{\epsilon_0^N(x)\}$ 까지 모든 값이 필요한데 각 단계마다 계산하여 저장시키려면 많은 기억용량이 필요하게 된다. 그러나, 본 해석에서는 온도분포가 미리 수식으로 주어지는 것으로 가정하였으므로 이들 열변형률을 저장시키지 않고 필요에 따라 그때그때 계산하여 사용하였다. 그러나 만약 온도분포를 수치적으로 계산하게 된다면 이들 열변형률 모두를 저장시켜야 할 것이다.

7. 수치계산 예

지금까지 유도·제시된 공식들의 타당성을 입증하기 위해서 이미 수치해가 알려져 있는 예제를 택하였다. 선택된 예제들은 $T = T(x, t)$ 의 온도분포 및 외력을 받으며, 평면변형조건으로 해석된다. 유한요소해석을 위해서 등매개변수(isoparametric) 2차 사각형 유한요소를 사용하였으며, 관련된 물성

치는 각 예제 속에서 열거된다. 그리고 식 (38), (40) 그리고 (42)의 요소강성행렬들의 영역적분시 3×3 가우스 수치적분법을 사용하였는데, 본 예제에서는 2×2 십지어 6×6 가우스 수치적분을 사용하여 결과를 검토하였으나 크게 차이가 없었으며, 메쉬분할의 영향을 더 많이 받음을 알 수가 있었다.

(1) $T=T(x, t)$ 온도분포 및 내압을 받는 튜브 이 예제는 참고문헌^(9,19)에서도 해석되어졌으며 본 논문에서도 그들과 동일한 데이터를 사용하였다. 수치해석을 위한 메쉬형상은 Fig. 1과 같으며 이전함수의 형상은 Fig. 2와 같다. 그리고 온도분포, 이전함수, 이완함수들의 계수(식 (25) 참조), 그리고 열탄성계수의 데이터는 다음과 같다.

$$\bar{\theta}(\bar{r}, \rho) = (1 - \bar{r})[1 - \exp(-2\rho)] \quad (48)$$

여기서, \bar{r} 는 무차원 반경 ($0 \leq \bar{r} \leq 1$)으로서 $\bar{r} = (r - a)/(b - a)$ 이며, ρ 는 무차원 시간, $\bar{\theta}$ 는 무차원 온도 ($0 \leq \bar{\theta} \leq 1$)이다. 그리고,

$$\begin{aligned} \phi(\bar{\theta}) &= 3981.1 \exp[-6.2172(1 - \bar{\theta}) \\ &\quad (1.333 + \bar{\theta} + 1.095\bar{\theta}^2)] \\ k_0 &= 2.5 \times 10^{10} \text{ dyne/cm}^2 = 25510.2 \text{ kg/cm}^2, \\ \mu_0 &= 830 \times 10^7 \text{ dyne/cm}^2 = 8469.388 \text{ kg/cm}^2, \\ \tau_0 &= 1 \text{ sec}, c = 0.000903614, \alpha_0 = 8 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}, \\ \nu(\xi) &= \frac{3k_0 - 2\mu(\xi)}{6k_0 + 2\mu(\xi)} \end{aligned}$$

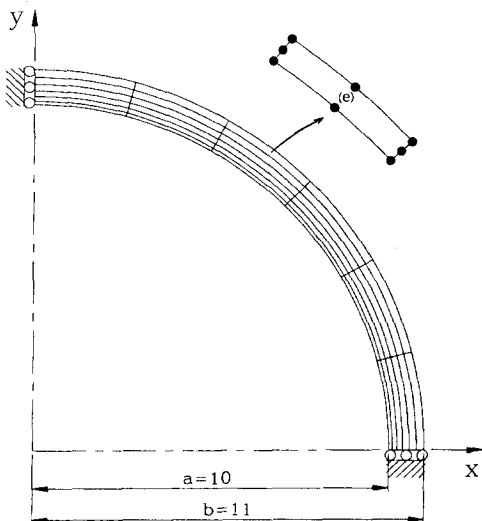


Fig. 1 Finite element model for the thermal stress analysis of a thin-walled viscoelastic tube

$$= \frac{1 - 0.3318 \exp(-\xi)}{2.0009 + 0.3318 \exp(-\xi)} \quad (49)$$

$\bar{\sigma}_\theta$ 는 무차원 응력으로서 $\bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta / 3\alpha\mu_0 = \sigma_\theta / 2.0327$ 이다.

(경우 1) 온도분포만을 받는 경우

불균일한 온도분포 $T=T(x, t)$ 를 받는 튜브 속의 응력분포에 대한 계산결과가 Fig. 3에 다른 수치결과들과 함께 무차원화되어져 비교되고 있다. 본 해석과 FEM에 의한 다른 해석⁽⁹⁾이 매우 잘 일치함을 알 수 있으며, 섭동이론(perturbation's scheme)을 사용해 유한차분법으로 계산된 결과⁽¹⁹⁾와는 튜브 안쪽에서 불일치를 보여주고 있다. 이것은 Taylor et. al.⁽⁹⁾에 의해서도 지적하였듯이 안쪽 경계에서 온도가 가장 높으므로 응력이 더 빨리 감

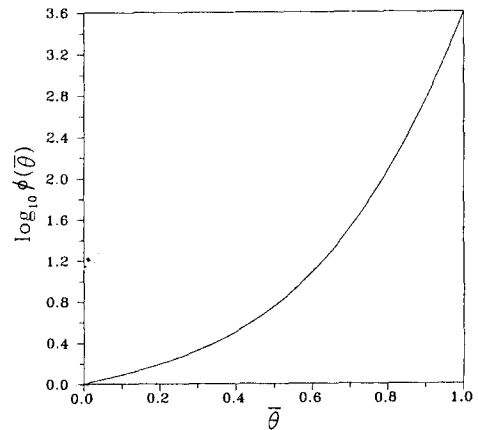


Fig. 2 Variation of the shift function

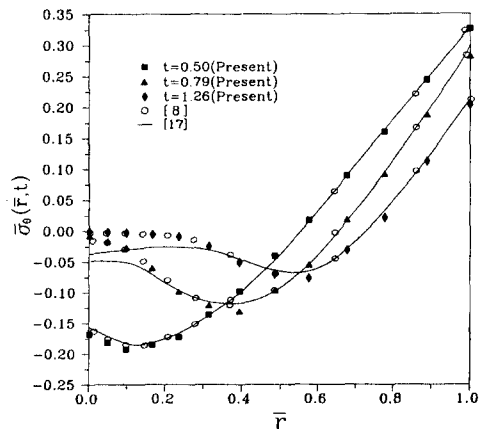


Fig. 3 Tangential stress distribution in a thin-walled viscoelastic tube subject to $T=T(x, t)$

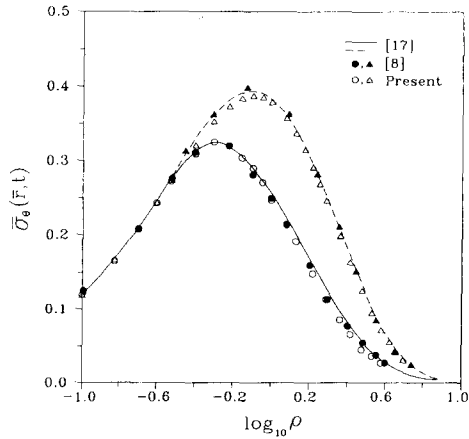


Fig. 4 Tangential stress distribution at outer radius of a thin-walled viscoelastic tube subject to $T = T(x, t)$. (—: temperature dependent properties, ---: temperature independent properties)

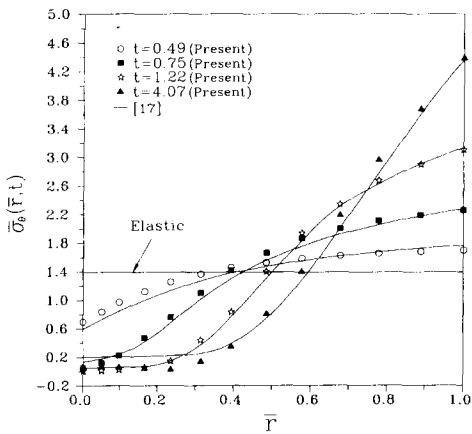


Fig. 5 Tangential stress distribution in a thin-walled viscoelastic tube subject to $T = T(x, t)$ and constant pressure

소해야 한다는 사실로부터 Lockett와 Morland⁽¹⁹⁾의 수치계산에서 오차가 발생되었음을 알 수 있다. 그리고 영(zero)으로 응력이 수렴하고 있지 않다. 이와는 반대로 바깥반경, 즉 온도의 영향이 작은 곳에서는 수치결과들이 서로 잘 일치함을 Fig. 4에서 보여주고 있다.

(경우 2) 온도분포 및 내압을 동시에 받는 경우

(경우 1)과 같은 온도분포를 가지고 동시에 일정한 크기의 내압을 동시에 받을 때 튜브 속의 응력 분포의 결과가 Fig. 5에서처럼 주어진다. 여기서

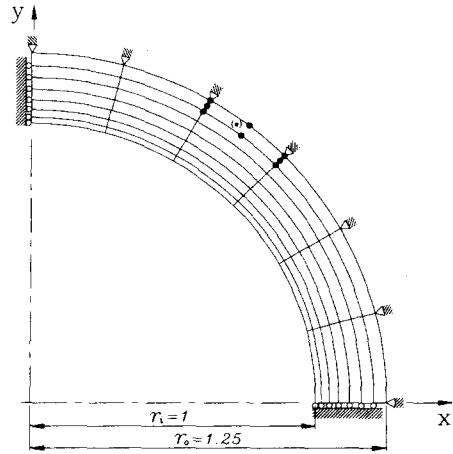


Fig. 6 Finite element model for the thermal stress analysis of a viscoelastic cylinder with fixed outer radius

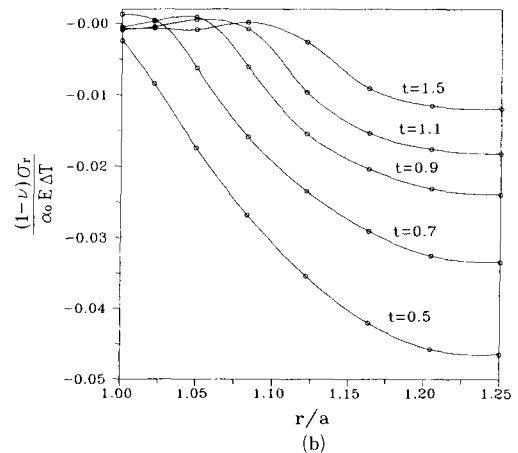
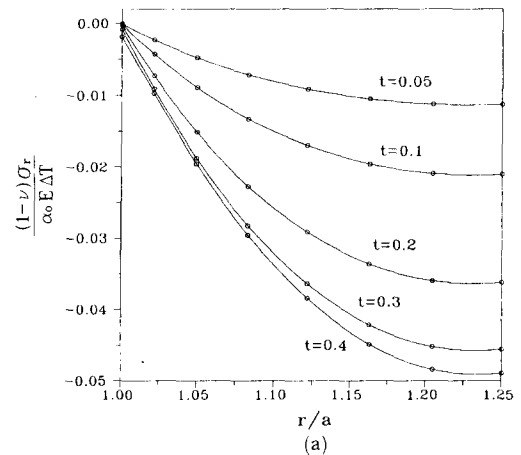


Fig. 7 Radial stress distribution in a viscoelastic cylinder with fixed outer radius subject to $T = T(x, t)$

실선은 참고문헌⁽¹⁶⁾의 결과인데, 응력분포의 경향은 거의 비슷하나 (경우1)에서처럼 튜브 안쪽에서 오차를 보이고 있다. 참고로 Fig. 5 계산에서는 점탄성재료의 구속에 의한 열응력이 포함되어 있지 않으며, 이것을 고려하면 그림의 결과와 경향은 비슷하나 좀 더 분리된 결과를 가져온다.⁽¹⁷⁾ 참고로 계산에서 사용된 내압 p 에 대한 데이터는 참고문헌 (19)에서 탄성일 때 무차원화된 점선응력이 $\bar{\sigma}_\theta = 1.39$ 이므로, $\sigma_\theta = 3\alpha\mu_0$, $\bar{\sigma}_\theta = 2.8255 \text{ kg/cm}^2$, $p = 0.28255 \text{ kg/cm}^2$ 로 가정하였다.

(2) $T=T(x, t)$ 온도분포를 받는 외부가 고정된 점탄성 원통
외부가 고정되고 온도분포 $T=T(x, t)$ 를 받는

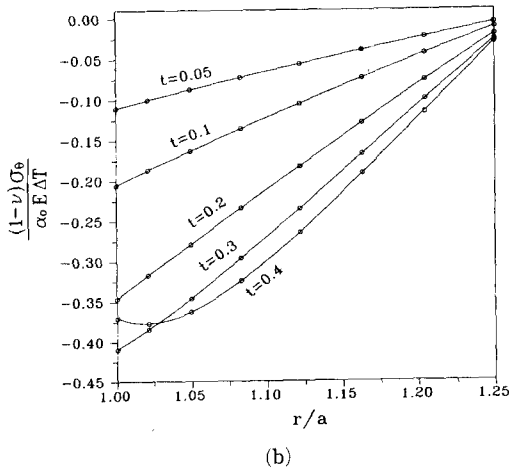
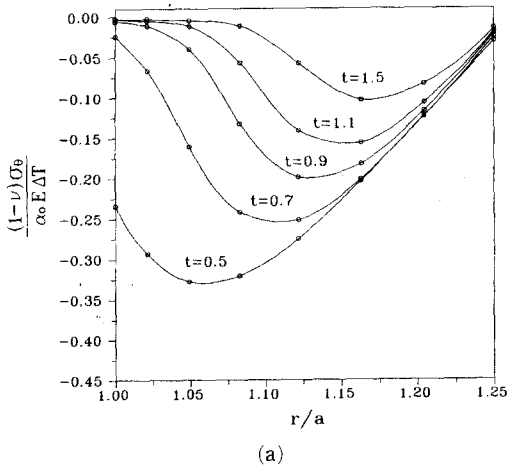


Fig. 8 Tangential stress distribution in a viscoelastic cylinder with fixed outer radius subject to $T=T(x, t)$

점탄성 원통이 있다. 본 예제는 앞으로의 점탄성 원통 연구에 참고가 되도록 계산결과를 처음으로 제시한다. 재료의 모든 물성치는 예제(1)과 같게 하였으며, 온도분포도 예제 (1)의 경계조건을 갖도록 구하였다. 즉,

$$r=r_i=1 \text{에서, } \theta(1, t)=1-\exp(-2t)$$

$$r=r_o=1.25 \text{에서, } \theta(1.25, t)=0$$

그리고

$$\theta(r, t)=4(1.25-r)\{1-\exp(-2t)\},$$

$$1 \leq r \leq 1.25 \quad (50)$$

한편, 수치해석을 위하여 사용된 유한요소모델은 Fig. 6과 같으며, 무차원화시킨 σ_r , σ_θ 수치결과들을 Figs. 7, 8($a=r_i$)에 도시하였다. 두 응력이 모두 시간이 증가함에 따라 커지다가 다시 감소하는 경향을 보이고 있다. 그러나 다른 점은 σ_r 는 $r=r_i$ 에서 $r=r_o$ 로 갈수록 커지는데 반하여, σ_θ 는 $r=r_o$ 에서 전반적으로 응력이 가장 낮은 값을 보이고 있으며, $r=r_i$ 에서는 초기에는 심한 변화를 보이다가 시간이 흐름에 따라 영으로 수렴함을 보여 주고 있다. 또한 σ_θ 는 초기에 직선적으로 변화하다가 $t=0.3 \text{ sec}$ 이후부터는 그 최대값의 위치가 시간이 흐름에 따라서 바깥반경으로 이동하는 곡선적인 그래프를 보이고 있다.

8. 결 론

등방성, 선형 그리고 열유동학적으로 단순한 물성을 갖는 점탄성체가 준-정적 하중 및 일반적 온도분포 $T=T(x, t)$ 조건하에 있을 때의 열응력 해석을 위한 유한요소해법을 공식화하였다. 2차원 평면변형률 문제를 예제로 해석하였으며, 기존의 발표된 수치결과들과 비교하여 제시된 해법의 타당성을 입증하였다. 프로그램의 정확성을 확인한 후에 공학적으로 중요한 새로운 예제를 해석하여 앞으로의 연구에 도움이 되도록 하였다. 제시된 공식화 과정은 기존의 탄성적 해법과정과 유사하므로 이해하기 쉽고, 3차원이나 동적, 비선형 분야 등으로의 응용이 수월하다. 그러나 과거의 결과가 현재에 끼치는 영향이 고려되는 유전적 강성행렬들의 생성에 많은 계산이 요구되므로, 앞으로는 이들의 효율적 계산 내지는 순환공식(recursion formula)의 개발이 필요하다. 그 밖의 과거단계에서 계산된

변위, 변형률 그리고 등가시간 등이 저장되어야 하므로 데이터 처리에 큰 어려움이 있다. 참고로, 온도분포가 $T=T(x)$ 일 경우에는 시간증분이 크더라도 수치해가 정확하게 잘 계산된다. 그러나 온도분포가 $T=T(x, t)$ 의 경우에는 시간증분이 $T=T(x)$ 경우 때 보다 비교적 작아야 하는데, 그 이유는 물성행렬을 적분하기 위하여 각 시간구간 내에서 $\phi(x, t)$ 가 일정하다는 가정과 등가시간 ξ 의 근사적 계산에 연유된다. 그러나 시간이 지날수록 $\phi(x, t)$ 가 정상상태가 되므로 시간증분의 영향이 감소하게 된다.

참고문헌

- (1) Sim, W. J. and Kwak, B. M., 1988, "Linear Viscoelastic Analysis in Time Domain by Boundary Element Method," *Computers and Structures*, Vol. 29, No. 4, pp. 531~539.
- (2) Sim, W. J. and Kwak, B. M., 1990, "Time-Domain Boundary Element Analysis for Linear Viscoelastic Problem Subject to Body Force," *Comm. Appl. Num. Meth.*, Vol. 6, pp. 297~304.
- (3) 심우진, 이호섭, 1992, "유전적분형 물성방정식에 근거한 선형 점탄성문제의 시간영역 유한요소해석," 대한기계학회논문집, 제16권, 제8호, pp. 1429~1437.
- (4) 심우진, 이성희, 1993, "유전적분형 선형 점탄성문제의 유한요소법에 의한 효율적 해석," 한국전산구조공학회논문집, 제6권, 제2호, pp. 103~114.
- (5) Sim, W. J. and Lee, S. H., 1993, "Efficient Finite Element Formulation for Linear Viscoelastic Analysis Based on Hereditary-Type Constitutive Equations," Edited by B. M. Kwak and M. Tanaka, *Computational Engineering, PCCE '93 Seoul, Korea*, 1~5 November.
- (6) Morland, L. W. and Lee, E. H., 1960, "Stress Analysis for Linear Viscoelastic Materials with Temperature Variation," *Tran. Soc. Rheol.* IV, pp. 233~263.
- (7) Muki, R. and Sternberg, E., 1961, "On Transient Thermal Stresses in Viscoelastic Materials with Temperature Dependent Properties," *J. Appl. Mech.*, Vol. 28, pp. 193~207.
- (8) White, J. L., 1968, "Finite Elements in Linear Viscoelasticity," *Proceedings 2nd Conference Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-68-150*, pp. 489~516.
- (9) Taylor, R. L., Pister, K. S. and Goudreau, G. L., 1970, "Thermomechanical Analysis of Viscoelastic Solids," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 2, pp. 45~59.
- (10) Sankaran G. V. and Jana M. K., 1975, "Thermoviscoelastic Analysis of Axisymmetric Solid Propellant Grains," *AIAA/SAE 11th Propulsion Conference AIAA Paper No. 75~1343*.
- (11) Srinatha, H. R. and Lewis, R. W., 1981, "A Finite Element Method for Thermoviscoelastic Analysis of Plane Problems," *Comp. Meth. Appl. Eng.*, Vol. 25, pp. 21~33.
- (12) Lee, S. S. and Westmann, R. A., 1995, "Applications of High-Order Quadrature Rules to Time Domain Boundary Element Analysis of Viscoelasticity," *Int. J. Num. Eng.*, Vol. 38, pp. 607~629.
- (13) Christensen, R. M., 1982, *Theory of Viscoelasticity*, 2nd Edn., Academic Press, New York.
- (14) Flügge, W., 1975, *Viscoelasticity*, 2nd Edn., Springer-Verlag, Berlin.
- (15) Findly, W. N., Lai, J. S. and Onaran, K., 1976, *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials*, North-Holland, Amsterdam.
- (16) Zienkiewicz, O. C., 1977, *The Finite Element Method*, 3rd Edn., McGraw-Hill.
- (17) Reddy, J. N., 1993, *An Introduction to the Finite Element Method*, 2nd Edn., pp. 246~260, McGraw-Hill, Inc.
- (18) 박인규, 1996, "온도중속의 물성을 지닌 선형 점탄성문제의 유한요소해석," 석사학위논문, 금오공과대학교.
- (19) Lockett, F. J. and Morland, L. W., 1967, "Thermal Stresses in a Viscoelastic Thin-Walled Tube with Temperature Dependent Properties," *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 5, pp. 897~898, Pergamon Press.