

〈논 문〉

다변수 변분해법에 의한 비적합 8절점 육면체 요소

주상백* · 신호철**

(1995년 2월 8일 접수)

Incompatible Three-Dimensional Hexagonal Finite Elements by Multivariable Method

Sang-Baek Ju and Hyo-Chol Sin

Key Words: Incompatible Displacement(비적합변위), Multivariable Variational Formulation(다변수 변분해법), Incompressibility Locking(비압축 강성과잉현상)

Abstract

This paper introduces two three-dimensional eight-node hexagonal elements obtained by using multivariable variational method. Both of them are based on the modified Hellinger-Reissner principle to employ incompatible displacements and assumed stresses or assumed strains. The internal functions of element are introduced to an element formulation through two different methods: the first one uses the functions determined directly from the element boundary condition of the incompatible displacements; while the second, being a kind of B-bar method, employs the modification technique of strain-displacement matrix to pass the patch test. The elements are evaluated on the selective problems of bending and material incompressibility with regular and distorted meshes. The results show that the new elements perform with good accuracy in both of deformation and stress calculation and they are insensitive to distorted geometry of element.

1. 서 론

최근 구조해석 분야에 있어서 3차원 구조물의 변형 및 응력해석에 대한 요구가 커짐에 따라 계산의 정확성과 경제성이 높은 3차원 육면체 요소개발에 관한 연구가 활발하게 진행되고 있다. 초기의 변위에 기초한 유한요소 정식화에 있어서 3차원 육면체 요소에는 등매개변수법에 의한 적합 8절점 serendipity 형상함수가 사용되었다. 그러나, 변위에 기초한 등매개 적합 육면체 요소의 결과하는 그 수렴성이 보장되지만, 해의 정확성이 불충분하고 요소형상의 찌그러짐에 있어 해의 손상이 큰 것으로 알

려져 있다. 이러한 변위기저 적합 유한요소의 문제점은 2차원 막요소에서와 마찬가지로 비압축성 혹은 근사 비압축성 재료의 해석($\nu \rightarrow 0.5$)이나 고차의 미분방정식으로 기술되는 굽힘문제 등에서 급격하게 강성이 커지는 현상이 나타난다.

변위기저 적합요소의 거동을 개선하려는 시도로서, Wilson 등⁽¹⁾은 요소 내부에 고차의 내부변위함수를 도입함으로써 전체요소의 변위에 대한 형상함수를 완전 보간함수화한 비적합요소 Q6를 제안하였다. 그러나, Q6는 요소의 형상이 사각형 혹은 평행사변형일 때를 제외하고는 패치테스트를 통과하지 못하므로 이에 대한 해결책으로 Talyor 등⁽²⁾은 요소의 비적합변위로부터 유도된 변형을 행렬에 대한 감차수치적분을 한 QM6를 제안하였다. 원래, QM6는 평면요소로 제안되었으나 그 기법은 3

*서울대학교 터보동력기계센터

**회원, 서울대학교 기계설계학과

차원의 요소로까지 확장이 가능한 것으로 알려져 있으나, 축대칭요소에서의 적용은 불가능하다.

최근의 변위에 기초한 3차원 요소에 대한 연구성과로는 Chandra와 Prathap⁽³⁾이 추가적인 내부 변위에 의한 새로운 3차원의 육면체 요소를 들 수 있다. 그러나, 이 요소는 변형에 대한 결과가 우수한 반면, 응력값에 대한 해의 정확성이 매우 떨어지고 요소의 찌그러짐에 대한 해의 손상이 크다.

한편, 혼합변분원리를 이용한 가상응력요소의 등장에 따라 이에 대한 연구가 활발하게 진행되고 있는데, 주로 이 분야에 대한 연구는 응력에 대한 보간함수의 선택문제에 대한 것으로, 최근의 이에 관한 연구성과로는 Pian과 Wu⁽⁵⁾의 최적응력장 도입법이 주목할 만하다.

Chen과 Cheung⁽⁴⁾은 독립적인 변위장과 응력장, 변형률장에 의한 범함수식을 사용하여 혼합형태의 새 요소를 소개하였다.

본 연구의 저자들⁽⁶⁾은 비적합변위와 독립적인 응력장 또는 독립적 변형률장을 포함하는 두가지 수정된 Hellinger-Reissner 변분원리를 사용하여 두가지 형태의 새로운 평면요소, ISO(incompatible stress-optimized element, 비적합 최적응력장 요소)와 IAS(incompatible assumed-strain element, 비적합 가상변형률 요소)를 제안하였다. ISO 요소는 우선 수정된 Hellinger-Reissner 범함수에 Lagrange 승수법에 의해 도입된 비적합변위에 대한 경계조건으로부터 완전 다항식으로 기술된 응력장의 초기 보간함수를 최적화한 것이며, IAS는 절점적합조건을 만족하는 비적합변위를 도입하고 hourglass 벡터에 의한 적합변위장과 ISO의 응력장 대신 독립된 변형률장을 도입하여, 이 3가지 독립적인 물리장에 의하여 Hellinger-Reissner 원리에 의한 정식화를 수행한 것이다.

본 연구의 목적은 ISO와 IAS의 평면요소에 적용된 비적합 다변수 변분법을 3차원 8절점요소로 확장 적용하여 이 이론이 3차원에서도 적용가능함을 밝히는 것이다. 또한, 개발된 요소를 사용하여 선택된 3차원 선형탄성문제를 통해 본 연구의 요소의 거동을 언급한 최근의 3차원 8절점 요소들과 비교 분석코자 한다.

2. 3차원에서의 비적합변위에 의한 응력장의 최적화

Fig.1은 3차원 물리좌표계와 주좌표계 상의 8절

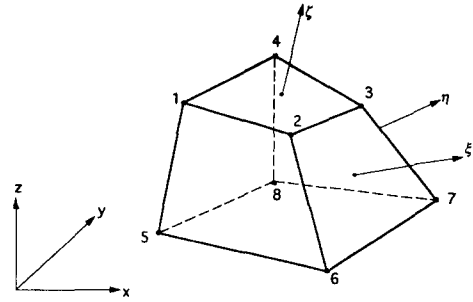


Fig. 1 Three dimensional hexagonal element

점 육면체 요소를 나타내고 있다. 주좌표계 상의 등매개좌표변수를 ξ, η, ζ 라 하면, 등매개변수법에 의해 물리좌표계 변수 x, y, z 는 다음과 같이 절점좌표변수의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta, \zeta) &= a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta + a_4\xi\eta + a_5\eta\zeta \\ &\quad + a_6\xi\zeta + a_7\xi\eta\zeta \\ y(\xi, \eta, \zeta) &= b_0 + b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta + b_4\xi\eta + b_5\eta\zeta \\ &\quad + b_6\xi\zeta + b_7\xi\eta\zeta \\ z(\xi, \eta, \zeta) &= c_0 + c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta + c_4\xi\eta + c_5\eta\zeta \\ &\quad + c_6\xi\zeta + c_7\xi\eta\zeta \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, 각 절점좌표변수는

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 \\ a_6 & b_6 & c_6 \\ a_7 & b_7 & c_7 \\ a_8 & b_8 & c_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 \\ x_7 & y_7 & z_7 \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix}$$

와 같고, 따라서, 등매개변수법에 따라 적합변위 u_0 는 식 (1)의 각 절점변수에 의해 표현된다. 3차원 등매개변수 변환을 위한 Jacobian 행렬은 다음의 식과 같다.

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2)$$

이때, Jacobian의 각 행렬성분은

$$\begin{aligned} J_{11} &= a_1 + a_4\eta + a_6\zeta + a_7\eta\zeta \\ J_{12} &= b_1 + b_4\eta + b_6\zeta + b_7\eta\zeta \\ J_{13} &= c_1 + c_4\eta + c_6\zeta + c_7\eta\zeta \\ J_{21} &= a_2 + a_4\xi + a_5\zeta + a_7\xi\zeta \\ J_{22} &= b_2 + b_4\xi + b_5\zeta + b_7\xi\zeta \\ J_{23} &= c_2 + c_4\xi + c_5\zeta + c_7\xi\zeta \\ J_{31} &= a_3 + a_6\xi + a_5\eta + a_7\xi\eta \\ J_{32} &= b_3 + b_6\xi + b_5\eta + b_7\xi\eta \\ J_{33} &= c_3 + c_6\xi + c_5\eta + c_7\xi\eta \end{aligned}$$

이고, Jacobian의 역행렬을 다음과 같이 정의한다.

$$J^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서,

$$\det J = J_{11}J_{22}J_{33} + J_{12}J_{23}J_{31} + J_{13}J_{21}J_{32} - J_{13}J_{22}J_{31} - J_{11}J_{23}J_{32} - J_{12}J_{21}J_{33}$$

이고, 이에 따라 Jacobian 역행렬에 의한 3차원 상의 변형률변위관계 미분작용소는

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = J^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (4)$$

와 같이 표현된다.

3차원 상의 비적합변위 \mathbf{u}_λ 의 일정변형률 만족조건은

$$\int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u}_\lambda d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{u}_\lambda d\xi d\eta d\zeta = 0 \quad (5)$$

이 되고, 비적합변위장의 보간함수를 전체 변위의

보간 함수 완전성을 만족하도록 다음과 같이 가정한다.

$$\mathbf{u}_\lambda = \begin{Bmatrix} u_\lambda \\ v_\lambda \\ w_\lambda \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_\lambda \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{N}_\lambda^* \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{N}_\lambda^q \boldsymbol{\lambda}^q \quad (6)$$

$$\mathbf{N}_\lambda^* = \begin{bmatrix} 1-\xi^2 1-\eta^2 1-\zeta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\xi^2 1-\eta^2 1-\zeta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\xi^2 1-\eta^2 1-\zeta^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_\lambda^q = \begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & \eta & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{*T} = [\lambda_1^* \lambda_2^* \lambda_3^* \dots \lambda_7^* \lambda_8^* \lambda_9^*]$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{qT} = [\lambda_1^q \lambda_2^q \lambda_3^q \dots \lambda_7^q \lambda_8^q \lambda_9^q]$$

비적합변위 u_λ , v_λ , w_λ 는 좌표계 변환에 대해 독립적인 값을 취해야 하므로, 각 방향의 비적합변위는 같은 보간함수로 구성된다. 따라서 식 (5)를 만족하는 u_λ 의 보간함수는 v_λ , w_λ 의 보간함수와 같다. 식 (5)에 의하여 u_λ 의 $\boldsymbol{\lambda}^q (= [\lambda_1^q \lambda_2^q \lambda_3^q])$ 를 구하면,

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1^q \\ \lambda_2^q \\ \lambda_3^q \end{Bmatrix} = -\mathbf{L}_\lambda^{qT} \mathbf{L}_\lambda^* \begin{Bmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \\ \lambda_3^* \end{Bmatrix} \quad (7)$$

이 되고, 여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\lambda^q &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} d\xi d\eta d\zeta \\ \mathbf{L}_\lambda^* &= 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \xi j_{11} & \xi j_{12} & \xi j_{13} \\ \xi j_{21} & \xi j_{22} & \xi j_{23} \\ \xi j_{31} & \xi j_{32} & \xi j_{33} \end{bmatrix} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (8)$$

이 된다. 그러므로 u_λ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} u_\lambda &= \{ [1-\xi^2 1-\eta^2 1-\zeta^2] \\ &\quad - [\xi \eta \zeta] \mathbf{L}_\lambda^{qT} \mathbf{L}_\lambda^* \} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

Hourglass 벡터에 의한 3차원 상의 변위에 대한 기술방법은 2차원에서와 마찬가지로, Hellinger-Reissner 변분해법에 의한 강성행렬을 구성하는 과정에서 유용한 점을 제공한다. Hourglass 벡터에 의한 3차원 적합변위장은

$$\mathbf{u}_q = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = (\mathbf{\Delta}^T + x\mathbf{p}_x^T + y\mathbf{p}_y^T + z\mathbf{p}_z^T + \mathfrak{F}\mathbf{r}^T) \mathbf{u}_q, \quad (10)$$

가 되고 여기서,

$$\mathbf{p}_x = \frac{1}{8J_0} \begin{Bmatrix} -bc_{12} - bc_{23} - bc_{31} \\ -bc_{12} + bc_{23} - bc_{31} \\ -bc_{12} + bc_{23} + bc_{31} \\ -bc_{12} - bc_{23} + bc_{31} \\ bc_{12} - bc_{23} - bc_{31} \\ bc_{12} + bc_{23} - bc_{31} \\ bc_{12} + bc_{23} + bc_{31} \\ bc_{12} - bc_{23} + bc_{31} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_y = \frac{1}{8J_0} \begin{Bmatrix} -ca_{12} - ca_{23} - ca_{31} \\ -ca_{12} + ca_{23} - ca_{31} \\ -ca_{12} + ca_{23} + ca_{31} \\ -ca_{12} - ca_{23} + ca_{31} \\ ca_{12} - ca_{23} - ca_{31} \\ ca_{12} + ca_{23} - ca_{31} \\ ca_{12} + ca_{23} + ca_{31} \\ ca_{12} - ca_{23} + ca_{31} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_z = \frac{1}{8J_0} \begin{Bmatrix} -ab_{12} - ab_{23} - ab_{31} \\ -ab_{12} + ab_{23} - ab_{31} \\ -ab_{12} + ab_{23} + ab_{31} \\ -ab_{12} - ab_{23} + ab_{31} \\ ab_{12} - ab_{23} - ab_{31} \\ ab_{12} + ab_{23} - ab_{31} \\ ab_{12} + ab_{23} + ab_{31} \\ ab_{12} - ab_{23} + ab_{31} \end{Bmatrix}$$

$$lm_{ij} = l_i m_j - l_j m_i, \quad (11)$$

($l, m = a, b, c$ and $i, j = 1, 2, 3$)

이고,

$$J_0 = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

$$\mathfrak{F} = \xi \eta \zeta$$

$$\mathbf{\Delta} = \frac{1}{8} \mathbf{t} - a_0 \mathbf{p}_x - b_0 \mathbf{p}_y - c_0 \mathbf{p}_z, \quad \mathbf{t} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{8} \mathbf{h} - a_4 \mathbf{p}_x - b_4 \mathbf{p}_y - c_4 \mathbf{p}_z, \quad \mathbf{h}^T = [1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1]$$

이다.

Hourglass 벡터에 의한 변위에 의하여 변형률장

을 구하면 다음의 식이 된다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{u}_q = (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_q) \mathbf{q} \quad (12)$$

여기서,

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_x^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{p}_y^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{p}_z^T \\ \mathbf{p}_y^T & \mathbf{p}_x^T & 0 \\ 0 & \mathbf{p}_z^T & \mathbf{p}_y^T \\ \mathbf{p}_z^T & 0 & \mathbf{p}_x^T \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{B}_q = \begin{bmatrix} \mathfrak{F}, x\boldsymbol{\gamma}^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{F}, y\boldsymbol{\gamma}^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{F}, z\boldsymbol{\gamma}^T \\ \mathfrak{F}, y\boldsymbol{\gamma}^T & \mathfrak{F}, x\boldsymbol{\gamma}^T & 0 \\ 0 & \mathfrak{F}, z\boldsymbol{\gamma}^T & \mathfrak{F}, y\boldsymbol{\gamma}^T \\ \mathfrak{F}, z\boldsymbol{\gamma}^T & 0 & \mathfrak{F}, x\boldsymbol{\gamma}^T \end{bmatrix} \quad (14)$$

이다. 위에서 \mathbf{B}_0 는 적분에 의하지 않고 절점좌표 변수에 의해 표현될 수 있는 행렬이고, \mathbf{B}_q 는 hourglass 벡터의 직교성에 의하여 다음의 성질을 갖는다.

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_q d\Omega = \mathbf{0} \quad (15)$$

3차원 상의 응력장의 절점변수의 갯수는 Babuska-Brezzi 조건식에 따라,⁽⁵⁾

$$n_q + n_\lambda - R = (3 \times 8) + (3 \times 3) - 6 = 27$$

이 되므로, 초기 응력장의 절점변수는 최소 27개가 되어야 한다. 응력장을 상수항과 보간함수항으로 나누어 $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_c + \boldsymbol{\sigma}_h$ 로 표시할 때, 고차 다항식 행렬 $\boldsymbol{\sigma}_h$ 는 $\xi\eta, \eta\zeta, \zeta\xi$ 항을 첨가하여 다음과 같이 표시된다.

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}_h$$

$$= \begin{bmatrix} \xi \eta \zeta \eta \zeta 0 \\ 0 0 0 0 \xi \eta \zeta \zeta \xi 0 \\ 0 0 0 0 0 0 0 0 \xi \eta \zeta \xi \eta 0 \\ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 \xi \eta \zeta 0 \\ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 \xi \eta \zeta 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 \\ 0 \xi \eta \zeta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_7 \\ \beta_8 \\ \beta_9 \\ \vdots \\ \beta_{26} \\ \beta_{27} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

위의 과정을 통하여 구한 비적합변위와 독립적인 응력장함수를 포함하는 Hellinger-Reissner 범함수는 그 비적합변위에 대한 경계조건을 포함하여 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\Pi_{HR} = \int_{\Omega^e} \left[-\frac{1}{2} \sigma^T C^{-1} \sigma + \sigma^T (Du_q) + \sigma^T (Du_\lambda) \right] d\Omega + \int_{\Gamma^e} \sigma^T n^T u_\lambda d\Gamma \quad (17)$$

위의 식에서 비적합함수에 대한 경계조건 항은 응력장행렬 σ 를 σ_c 와 σ_h 로 분리할 때, 식 (5)의 조건에 의하여 σ_c 에 대한 항이 소거되고 Green이론에 의하여 체적적분 항으로 나타내면 다음의 식이 된다.

$$\int_{\Omega^e} [\sigma_h^T (Du_\lambda) + (D^T \sigma_h) u_\lambda] d\Omega = 0 \quad (18)$$

이산화된 비적합변위와 응력장행렬을 위의 식에 대입하여 $\beta^T T_M \lambda = 0$ 로 표시할 때, T_M 은 다음의 행렬식으로 표현된다.

$$T_M = \int_{\Omega^e} [N_\sigma^T B_\lambda + B_\sigma^T N_\lambda] d\Omega \quad (19)$$

여기서, B_λ 와 B_σ 는 다음과 같은 비적합변위와 응력에 대한 변형률-변위관계, 응력평형식을 의미한다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda &= Du_\lambda = (DN_\lambda) \lambda = B_\lambda \lambda \\ D^T \sigma &= (DN_\sigma) \beta = B_\sigma \beta \end{aligned}$$

식 (18)의 조건을 응력장행렬에 부여하기 위하여, T_M 을 다음의 두 부분으로 나누어 표시한다.

$$T_M \beta = T_{M1} \beta_1 + T_{M2} \beta_2 = 0 \quad (20)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \beta_1^T &= [\beta_7 \ \beta_{12} \ \beta_{17} \ \beta_{20} \ \beta_{21} \ \beta_{22} \ \beta_{24} \ \beta_{25} \ \beta_{26}] \\ \beta_2^T &= [\beta_8 \ \beta_9 \ \beta_{10} \ \beta_{11} \ \beta_{13} \ \beta_{14} \ \beta_{15} \ \beta_{16} \\ &\quad \beta_{18} \ \beta_{19} \ \beta_{23} \ \beta_{27}] \end{aligned}$$

식 (20)을 이용하여 β_1 을 $\beta_1 = T_{M1}^{-1} T_{M2} \beta_2$ 와 같이 표시하면, 최종적인 고차의 응력장함수는

$$\sigma_h^f = \begin{bmatrix} \eta \zeta \eta \zeta 0 \\ 0 0 0 \xi \zeta \xi \zeta \xi 0 \\ 0 0 0 0 0 0 \xi \eta \zeta \xi \eta 0 \\ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 \xi \eta \zeta 0 \\ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 \xi \eta \zeta 0 \\ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 \xi \eta \zeta 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 \\ 0 \xi \eta \zeta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{27} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \xi 0 \\ 0 \eta 0 \\ 0 0 \zeta 0 \\ 0 0 0 \eta \zeta 0 \\ 0 0 0 0 0 \xi \zeta 0 \\ 0 0 0 0 0 0 0 \xi \eta \end{bmatrix} T_{M1}^{-1} T_{M2} \beta_2 \quad (21)$$

이 된다.

위에서 구한 최종적인 응력장의 차원은 초기 설정한 응력장 차원에서 비적합변위의 차원을 뺀 18이 되며, 이는 식 (17)의 Hellinger-Reissner 범함수의 Babuska-Brezzi 조건을 만족하지 못하므로 적합변위에 대한 에너지항을 소거한 다음과 같은 3차원 상의 Hellinger-Reissner 범함수식을 사용하자. 이 때, 식 (17)의 경계조건은 도입된 비적합변위함수와 응력 최적화과정에 의하여 소거된다.

$$\Pi_{HR}^{modified} = \int_{\Omega^e} \left[-\frac{1}{2} \sigma^T C^{-1} \sigma + \sigma^T (Du_q) \right] d\Omega$$

위의 범함수에 응력장을 식 (21)의 고차보간함수항과 응력장함수의 상수행렬을 합하여 $\sigma = \beta_c + N_\sigma^f \beta_h = N_\sigma \beta$ 로 표시하여 대입하면 다음과 같다.

$$\Pi_{HR}^{modified} = -\frac{1}{2} \beta^T H_{\sigma\sigma} \beta + \beta^T H_{\sigma q} q \quad (22)$$

여기서,

$$H_{\sigma\sigma} = \int_{\Omega^e} N_\sigma^T C^{-1} N_\sigma d\Omega$$

$$H_{\sigma q} = \int_{\Omega^e} N^T B_q d\Omega$$

이고, 변분법에 의하여 강성행렬을 구하면,

$$K = H_{\sigma q}^T H_{\sigma\sigma}^{-1} H_{\sigma q}$$

가 된다.

3. 3차원에서의 가상변형률에 의한 비적합 요소

이 장에서는 가상변형률에 의한 비적합 평면응력

요소 IAS⁽⁶⁾를 3차원 상으로 확장적용시키고자 한다. 적합변위와 내부변위로 분리된 변위장과 독립적으로 가정된 변형률장에 의해 Hellinger-Reissner 범함수식을 구성하면 다음과 같다.

$$\Pi_{HR} = \int_{\Omega^e} \left[\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} (\mathbf{D}\mathbf{u}_q) + \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} (\mathbf{D}\mathbf{u}_\lambda) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \right] d\Omega \quad (23)$$

여기서, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 은 독립적으로 가정된 변형률장행렬을 의미하며, $\mathbf{D}\mathbf{u}_q$ 와 $\mathbf{D}\mathbf{u}_\lambda$ 는 각각 적합변위와 비적합 변위로부터 변위-변형률 관계식에 의하여 유도된 변형률을 의미한다. 가상변형률장의 고차의 보간함수 행렬을 앞서의 식 (16)의 응력장의 초기 보간함수와 같도록 다음과 같이 가정하고,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_h = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}_h = \begin{bmatrix} \xi \eta \zeta & \eta \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi \eta \zeta & \zeta \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \eta \zeta & \zeta \xi \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \eta \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \eta \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \eta \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \vdots \\ \alpha_{26} \\ \alpha_{27} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

전체 가상변형률장을 다음과 같이 표시한다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_c + \mathbf{N}_e^h \boldsymbol{\alpha}_h = \mathbf{N}_e \boldsymbol{\alpha} \quad (25)$$

비적합 변위장을 절점적합조건에 따라 다음과 같이 도입하자.

$$\mathbf{u}_\lambda = \begin{Bmatrix} u_\lambda \\ v_\lambda \\ w_\lambda \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_\lambda \boldsymbol{\lambda}$$

$$\mathbf{N}_\lambda = \begin{bmatrix} 1 - \xi^2 1 - \eta^2 1 - \zeta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \xi^2 1 - \eta^2 1 - \zeta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \xi^2 1 - \eta^2 1 - \zeta^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

식 (10)의 적합변위장과 위의 식 (26)의 비적합 변위장의 합 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_q + \mathbf{u}_\lambda$ 로 표시되는 전체변위장으로부터 유도된 변형률에 일정 변형률조건을 부여하기 위하여 일정 변형률 상수행렬 $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ 를 도입하면 전체 변형률은 다음과 같이 표시된다.⁽⁶⁾

$$\mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{B}_q \mathbf{q} + \mathbf{B}_\lambda \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\varepsilon}_c \quad (27)$$

위의 식에서 유한요소 해의 수렴성을 보장하기 위해 비적합변위장으로부터 유도되는 변형률은 소거되어야 한다. 이를 조건식으로 표현하면,

$$\mathbf{B}_\lambda \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\varepsilon}_c = 0 \quad (28)$$

이고, $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ 에 상응하는 응력장을 $\boldsymbol{\sigma}_c$ 라 할때, 위의 식에 대한 에너지 조건식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{\Omega^e} \boldsymbol{\sigma}_c (\mathbf{B}_\lambda \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\varepsilon}_c) d\Omega = 0 \quad (29)$$

위의 식으로부터 $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ 를 구하면,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = -\frac{1}{\Omega^e} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\lambda d\Omega \boldsymbol{\lambda} \quad (30)$$

이므로, 비적합변위로부터 유도된 최종적인 변형률행렬은

$$\overline{\mathbf{B}}_\lambda = \mathbf{B}_\lambda - \frac{1}{\Omega^e} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\lambda d\Omega \quad (31)$$

가 된다. 위의 수정과정에 의하여 구한 $\overline{\mathbf{B}}_\lambda$ 에 의하여 요소는 일정응력에 대한 일정 변형률조건을 만족하게 된다. 식 (31)에 의해 비적합변위에 의한 변형률 행렬식을 수정하면, Hellinger-Reissner 범함수는

$$\Pi_{HR} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{H}_{ee} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{H}_{eq} \mathbf{q} + \boldsymbol{\alpha}^T \overline{\mathbf{H}}_{e\lambda} \boldsymbol{\lambda} \quad (32)$$

이고, 위의 범함수식에 대한 $\delta \boldsymbol{\alpha}$, $\delta \mathbf{q}$, $\delta \boldsymbol{\lambda}$ 의 변분에 의하여 요소의 강성행렬을 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_h = \mathbf{H}_{eq}^T \mathbf{G} \mathbf{H}_{eq} \quad (33)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}_{ee}^{-1} - \mathbf{H}_{ee}^{-1} \overline{\mathbf{H}}_{e\lambda} (\overline{\mathbf{H}}_{e\lambda}^T \mathbf{H}_{e\lambda}^{-1} \overline{\mathbf{H}}_{e\lambda})^{-1} \overline{\mathbf{H}}_{e\lambda}^T \mathbf{H}_{ee} \quad (34)$$

$$\overline{\mathbf{H}}_{e\lambda} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_e^T \mathbf{C} \overline{\mathbf{B}}_\lambda d\Omega \quad (35)$$

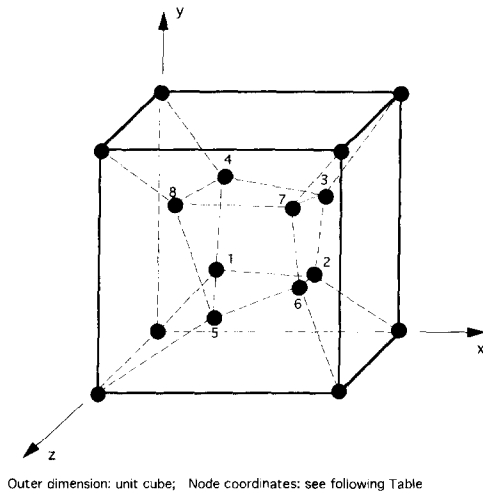
4. 수치실험과 결과

4.1 패치테스트

Fig. 2는 3차원에서의 일정응력 패치테스트를 수행한 것이다. Table 1은 그 결과로, 본 연구의 요소들은 패치테스트를 통과하고 있음을 보여준다.

4.2 굽힘실험

Fig. 3은 5개의 불규칙적인 요소들에 의하여 3차



Outer dimension: unit cube; Node coordinates: see following Table

	x	y	z
1	.249	.342	.192
2	.826	.288	.288
3	.850	.649	.263
4	.273	.750	.230
5	.320	.186	.643
6	.677	.305	.683
7	.788	.693	.644
8	.165	.745	.702

Fig. 2 Patch test for 3-D solids

Table 1 A constant stress patch test for 3-D incompatible elements

Elements	Node displacement			Stresses at any point within the brick		
	u _A	v _A	w _A	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{zz}
Wilson et al. ⁽¹⁾	1.486	-0.276	-0.524	(No constant stress)		
ISO	1.333	-0.400	-0.400	1000	0	0
IAS	1.333	-0.400	-0.400	1000	0	0
Exact	1.333	-0.400	-0.400	1000	0	0

원 보의 굽힘문제를 해석한 것이다. Table 2는 보에 순굽힘하중과 전단하중을 가하여 그 보의 끝단에서의 최대 변위와 점 B에서의 응력에 대한 결과를 등매개변위요소(3D-Q8)와 최근 연구된 3차원 8절점 요소인 FCB,⁽³⁾ Q_{s11-2} ⁽⁴⁾의 결과와 함께 수록하였다. 결과에서 보듯이 본 연구의 요소들은 요소의 굽힘에 대한 변형 및 응력에서 그 거동이 다른 요소들에 비해 우수하며, 특히 IAS는 순굽힘하중에 대한 결과에서도 좋은 거동을 나타내고 있다.

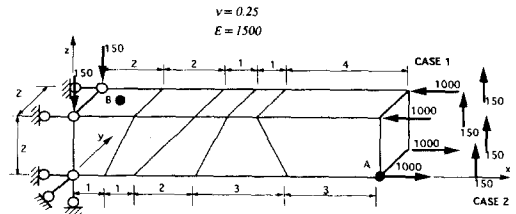


Fig. 3 Straight beam test by using distorted 3-D hexagonal elements

Table 2 comparison of deflection and stress solution by different 3-D hexagonal elements

Elements	Case 1		Case 2	
	u _A	σ_{xB}	v _A	σ_{xB}
3d-Q8	43.2	-1732.0	48.3	-2405.0
Q_{s11-2}	92.9	-3015.1	94.9	-4138.2
FCB	98.3	-429.7	100.3	-619.0
ISO	95.9	-3014.9	98.0	-4138.5
IAS	98.3	-3002.3	100.3	-4159.0
Exact sol.	100.0	-3000.0	102.625	-4080.0

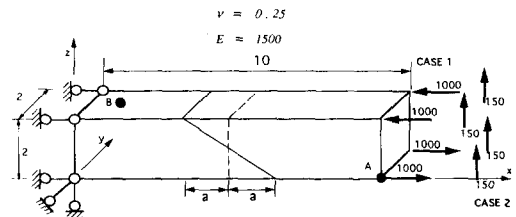


Fig. 4 Distorted-element test using two-element cantilever beam

4.3 찌그러짐에 대한 요소의 거동해석

요소형상의 찌그러짐에 대한 요소의 거동을 분석하기 위하여, Fig. 4와 같이 두개의 육면체 요소로 모델링된 길이 10인 직선 외팔보의 순수굽힘과 전단하중에 대한 A점과 B점의 변형과 응력을 찌그러짐에 대한 파라미터 e의 변화에 따라 구하여 Fig. 5에 도시하였다. 그림에서 본 요소의 결과값을 등매개변위 요소(3D-Q8)와 3차원 혼합요소 LO8 : 7-APR과 LO8 : 7-APC⁽⁷⁾의 결과와 비교하였다. 그림에서 보는 바와 같이 본 연구의 요소는 다른 요소에 비하여 요소형상의 찌그러짐에 대

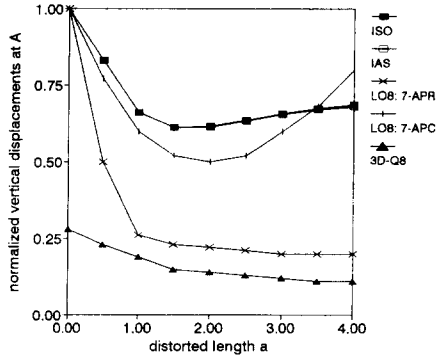


Fig. 5(a) Vertical displacements at A in Fig. 4 vs. distorted length (load case 1)

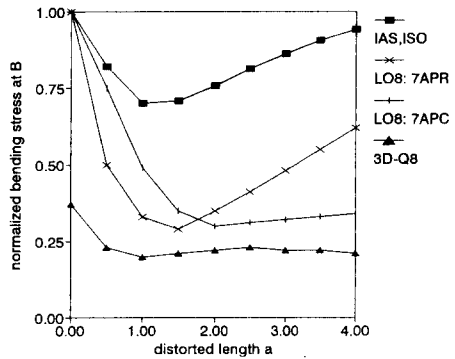


Fig. 5(c) Bending stresses at B in Fig. 4 vs. distorted length (load case 1)

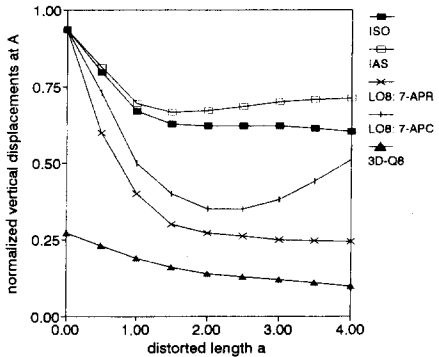


Fig. 5(b) Vertical deflections at A in Fig. 4 vs. distorted length a (load case 2)

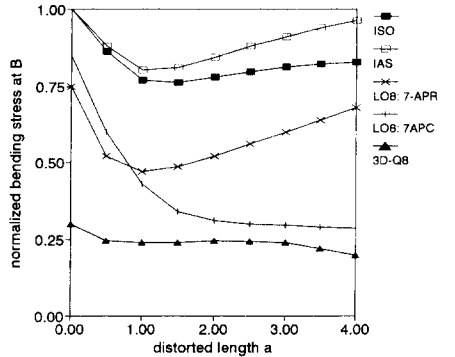


Fig. 5(d) Bending stresses at B in Fig. 4 vs. distorted length (load case 2)

한 해의 손상이 상대적으로 적은 것으로 나타났다.

5. 결론

본 연구에서는 비적합변위 도입에 관한 두가지 방법에 의해 혼합변분원리를 이용한 혼합 3차원 육면체요소를 개발하였다. 개발된 요소의 몇 가지의 수치테스트를 통해 다음의 결론을 얻었다.

(1) 평면요소에 적용된 비적합함수를 포함하는 최적 응력장방법과 가상변형률 방법은 3차원 상의 육면체 유한요소 정식화에 이용될 수 있으며, 이 방법들에 의해 개발된 요소는 거동이 우수하다.

(2) 절점적합조건을 만족하는 비적합변위로부터 유도된 변위-변형률 관계행렬에 일정 변형률상수를 도입하여 그 행렬을 수정하는 방법에 의해 개발된 3차원 육면체요소는 패치테스트를 통과하여 그 수렴성을 보장한다.

(3) 전통적인 절점적합조건에 의하지 않고 비적

합 변위에 대한 요소의 경계조건으로부터 직접적으로 적합변위의 보간함수항을 추가하여 구한 비적합 변위를 내부변위로 포함하는 요소는 요소의 수렴성을 만족한다.

(4) 수치테스트를 통한 요소의 성능실험에서 개발된 두 요소는 정확성이 높으며, 요소의 찌그러짐에 대해 민감치 않은 것으로 나타났다.

(5) 혼합변분원리에서 응력장 대신 변형률장을 독립적인 다항식 함수으로 도입하는 것은 변형률 함수를 변위의 다항식 함수로부터 쉽게 예측할 수 있으므로 그 도입이 쉽고, 응력에 대한 결과 역시 다른 가상응력 요소보다 우수한 것으로 나타났다.

(6) 개발된 두 요소는 모두 비압축성 강성과잉 현상을 나타내지 않는다.

후 기

본 연구는 터보·동력기계 연구센터의 지원으로

이루어졌으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Wilson, E. L., Taylor, R. L., Doherty, W. P. and Ghaboussi, J., 1973, *Incompatible Displacement Models*, in; Fenves, S. J. et al., eds., *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, Academic Press, NewYork, pp. 43~58.
- (2) Taylor, R. L., Beresford, P. J. and Wilson, E. L., 1976, "A Non-Conforming Element for Stress Analysis," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 10 pp. 1211~1219.
- (3) Chandra, S. and Prathap, G., 1989, "A Field-Consistent Formulation for the Eight-Noded Solid finite element," *Comput. Struct.*, Vol. 33, pp. 345~355.
- (4) Wanji, C. and Cheung, Y. K., 1987, "A New Approach for the Hybrid Element Methods," *Int. J. Numer. Meth. ods Eng.*, Vol. 24, pp. 1696~1709.
- (5) Pian, T. H. H. and Wu, C. C., 1988, "Rational Approach for Choosing Stress Terms for Hybrid Finite Element Formulations," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 26, pp. 2331~2343.
- (6) 주상백, 신호철, 1994, "다변수 변분해법에 의한 비적합 4절점 사각형 평면응력 및 평면변형률 요소의 개발," 대한기계학회논문집, 제18권, 제11호, pp. 2971~2882.
- (7) Punch, E. F. and Atluri, S. N., 1984, "Application of Isoparametric Three-Dimensional Hybrid-Stress Finite Elements with Least-Order Stress Fields," *Comput. Struct.*, Vol. 19, pp. 406~430.