

〈논 문〉

유한요소해의 정확도 조절을 위한 적응해석법

오형석* · 이대일* · 최준형** · 임장근***

(1994년 10월 12일 접수)

Adaptive Analysis Methods for the Accuracy Control
of Finite Element Solutions

H.S. Oh, D.I. Lee, J.H. Choi and J.K. Lim

Key Words: Adaptive Finite Element Analysis(적응 유한요소해석), Discretization Error(분할 오차), Stress Error Norm(응력오차크기), h-Method(요소세분법), r-Method(절점이동법), rh-Method(rh-혼합법)

Abstract

In adaptive finite element analysis, r- and h-methods are generally used on the basis of a discretization error estimator. In this paper, an rh-method is proposed as a new adaptive method which can improve the adaptivity performance by using both of them. This suggested rh-method moves nodal coordinates of initially given model to adjust element discretization errors and thereafter performs the h-method to obtain the specified accuracy of finite element solutions. Numerical experiments for various plane problems were performed using 4-noded isoparametric quadrilateral elements. As a result, the rh-method has been shown to be an accurate and efficient adaptive analysis method to obtain an improved solution.

1. 서 론

유한요소법은 여러가지 공학적인 문제를 해결하기 위한 가장 보편적이며 효과적인 도구로서 널리 사용되고 있다. 그러나 유한요소법에 의한 해석결과는 분할요소의 크기와 사용요소의 형태에 따라서 그 값이 크게 달라지기 때문에 요소선정과 분할방법에 세심한 배려가 필요하다. 해석영역이 비교적 간단한 형상의 구조물에 대해서는 해석자의 경험과 직관에 의하여 합리적인 요소분할이 가능하지만 구조물이 복잡해지면 요소를 적절히 분할하기가 쉽지 않기 때문에 이에 따른 오차를 무시할 수 없으며 따라서 해석결과에 대한 신뢰성이 문제가 된다.

최근, 유한요소 학자들은 유한요소해석 결과의 신뢰성을 높이기 위한 연구를 활발하게 추진하고 있으며 이들의 연구를 분류해보면 다음 두가지로 나눌 수 있다.

첫번째 연구분야는 요소분할에 따른 해석결과의 오차를 정확히 평가하는 방법으로서 현재까지 많은 방법들^(1~7,13)이 제안되어 왔으며, 주로 변형률에너지 또는 응력분포에 기준하여 요소분할에 따른 오차를 평가하는 방법들이다. 이 중에서 1987년 Zienkiewicz와 Zhu가 제안한 해석후 오차평가방법(posteriori error estimates)은 해석영역의 응력분포에 기준하여 요소분할에 따른 오차를 비교적 간단하게 평가할 수 있어 널리 사용되고 있다.

두번째는 해석결과의 오차를 미리 일정하게 설정하고 이에 부합하는 유한요소해석 결과가 초기 요소분할상태에 관계없이 얻어질 수 있도록 하므로써 해석자와 무관하게 유한요소해의 신뢰성을 높이고

*한양대학교 대학원 기계설계학과

**한양대학교 대학원 항공공학과

***회원, 한양대학교 기계설계학과

자 하는 방법이다. 이 방법은 적응해석법 (adaptive analysis)으로 알려지고 있으며 다음과 같은 여러가지 방법이 연구되고 있다.

요소의 분할오차 (element discretization error)가 큰 요소를 자동적으로 세분화하여 해석결과와 정확도를 향상시키는 방법 (h-method),^(8~18) 분할오차가 큰 요소의 형상함수 차수 (shape function order)를 증가시키는 방법 (p-method),^(12,13,19) 그리고 이 두가지 방법을 동시에 사용하여 해석의 성능을 향상시키는 방법 (h p-method)^(12,18)이 있다. 또한 초기 요소망에 대하여 분할오차를 계산하고 이 오차의 분포가 평준화될 때까지 절점의 좌표를 이동시키므로써 요소의 크기를 재조정하는 방법 (r-method)^(20~29)이 있다.

이들 방법중에서 h-method는 사용자가 원하는 정도의 분할오차를 갖는 해석결과를 얻을 수 있다는 장점이 있으나, 설정한 허용오차가 작을 경우 요소의 세분에 의해 새롭게 생성된 절점수가 본래의 절점수보다 급격히 증가하게 되어 해석에 많은 시간이 소요되고, 사용자가 지정한 오차보다 요소의 오차가 작게 평가된 요소에 대해서는 요소크기를 조정할 수 없다는 단점이 있다. 또한 r-method는 전체 절점의 수를 일정하게 유지하면서 분할오차를 평준화시킬 수 있다는 장점이 있으나, 사용자가 원하는 분할오차를 갖도록 하기에는 절점의 수가 일정하게 유지되기 때문에 한계가 있다.

본 논문에서는 r-method와 h-method를 동시에 사용하므로써 해석의 성능과 결과의 신뢰성을 동시에 얻을 수 있는 방안을 제안하고자 한다. 즉, r-method로 초기 분할요소의 크기를 조정하고 다음 h-method를 사용하여 요소를 세분하므로써 일정하게 설정된 해석오차의 허용치에 부합되는 해석결과를 얻을 수 있다.

편리상 4절점 등매개 사변형요소 (4 noded isoparametric quadrilateral element)^(13,33)를 사용하여 여러가지 수치실험을 하였으며 그 결과를 비교 검토하므로써 본 논문에서 제안한 rh-혼합법 (rh-method)의 성능과 타당성을 평가하고자 한다.

2. 선형탄성문제의 유한요소해석과 오차의 평가

2.1 변위형 유한요소법

선형탄성문제를 유한요소법으로 해석하는 경우

응력벡터 $\{\sigma\}$ 와 변형률벡터 $\{\epsilon\}$ 그리고 변위벡터 $\{u\}$ 의 관계식은 다음과 같이 표시된다.

$$\{\epsilon\} = [S] \cdot \{u\} \quad (1)$$

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\epsilon\} = [D] \cdot [S] \cdot \{u\} \quad (2)$$

$$\{u\} \approx [N] \cdot \{\Delta\}^e \quad (3)$$

단, $[S]$, $[D]$, $[N]$ 은 각각 미분행렬, 구성행렬, 형상함수행렬이며 $\{u\}$, $\{\Delta\}^e$ 는 각각 요소내의 변위 분포와 절점변위벡터이다.

위의 식을 잔차법 (weighted residual method) 또는 포텐셜에너지 최소화조건에 대입하여 정리하면 유한요소해석을 위한 요소방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$[K]^e \cdot \{\Delta\}^e = \{F\}^e \quad (4)$$

$$[K]^e = \int_{\Omega^e} ([S] \cdot [N])^T \cdot [D] \cdot [S] \cdot [N] d\Omega \quad (5)$$

이들 식에서 상첨자 e 는 요소를 나타내고, $[K]^e$, $\{F\}^e$ 는 각각 요소의 강성행렬과 절점력벡터이다.

식 (4)의 요소방정식을 유한요소법의 표준절차^(7,13,33)에 의하여 계 전체에 대한 유한요소 방정식으로 조합하고 경계조건을 고려하면 각 절점에서의 변위를 구할 수 있다. 이와같이 요소의 절점변위벡터 $\{\Delta\}^e$ 가 결정되면 요소내에 분포되는 응력분포 $\{\sigma\}$ 는 다음과 같이 절점변위 $\{\Delta\}^e$ 와 위치의 함수로 표현된다.

$$\{\sigma\} \approx \{\hat{\sigma}\} = [D] \cdot [S] \cdot [N] \cdot \{\Delta\}^e \quad (6)$$

2.2 오차의 평가

선형탄성문제에서 요소의 응력분포함수 $\{\sigma\}$ 는 미분계수행렬 $[S]$ 에 의해 각 요소의 경계에서 불연속적으로 분포하게 되며,⁽¹⁾ 이로 인하여 유한요소해석을 통한 응력해는 변위분포에 비해 부정확한 값으로 평가된다. 본 논문에서는 유한요소해석을 통해 얻어지는 응력해를 근사해로 간주하고, 이 근사해와 엄밀해와의 차이를 응력오차로 정의하는 해석 후 오차평가방법^(1~7,13)을 이용하여 오차를 평가하였다.

한편, 오차평가지 사용하는 엄밀해는 대다수의 문제에서는 계산하기가 어렵기 때문에, 본 연구에서는 다음과 같은 방법으로 엄밀해를 근사적으로 평가하였다.

즉, 요소의 각 절점에서의 응력을 형상함수로 보간하여 그 절점을 공유하고 있는 요소에 대해 평균값을 취하는 평균응력법^(1,13)을 이용하면, 유한요소 해석을 통해 얻어지는 근사해보다 정확도가 향상된 응력해를 식 (7)과 같이 얻을 수 있다.

$$\{\sigma^*\} = [N] \cdot \{\bar{\sigma}\} \quad (7)$$

여기서, $\{\bar{\sigma}\}$ 는 평균응력법을 통해 얻어진 요소의 절점응력이고 $[N]$ 는 요소의 형상함수 행렬이다.

이제 유한요소의 응력해를 $\{\sigma\}$ 로 표현하면 요소에서의 응력오차는 다음과 같이 정의된다.^(12,5,13)

$$\{e_\sigma\} = \{\sigma^*\} - \{\sigma\} \quad (8)$$

식 (8)의 요소내에 분포되는 응력오차를 에너지 크기(stain energy norm)로 나타낼 수 있으며 이를 각 요소에 대한 분할오차로 정의한다.^(1,2,5,13)

$$\|e\|_e^2 = \int_{\Omega^e} \{e_\sigma\}^T \cdot [D]^{-1} \cdot \{e_\sigma\} d\Omega \quad (9)$$

또한 각 요소의 절점변위에 대한 변형률에너지 크기를 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\|u\|_e^2 = \int_{\Omega^e} \{\sigma\}^T \cdot [D]^{-1} \cdot \{\sigma\} d\Omega \quad (10)$$

따라서, 전체 계에 대한 응력오차와 절점변위에 대한 에너지 크기는 다음과 같이 표현된다.

$$\|e\|^2 = \sum_{e=1}^E \|e\|_e^2, \quad \|u\|^2 = \sum_{e=1}^E \|u\|_e^2 \quad (11)$$

여기서, E 는 전체 요소의 갯수이다.

3. 요소의 재분할 방안과 수치실험

3.1 절점이동법

초기 요소분할상태로 유한요소해석을 수행하게 되면 식 (9), (10), (11)에 의하여 전체 계와 각 요소에 대한 분할오차를 구할 수 있다. 이를 이용하여 전체 계에 대한 상대오차를 식 (12)와 같이 정의한다.⁽⁶⁾

$$\eta = k \cdot \left[\frac{\|e\|_e^2}{\|u\|^2 + \|e\|^2} \right]^{1/2} \times 100(\%) \quad (12)$$

단, k 는 요소의 종류에 따라 선정하는 수정계수이며, 4절점 등대개변수 요소의 경우에는 통상 1.0~1.5의 값을 갖는다.

또한 전체요소의 평균분할오차를 이용하여, 절점 이동의 정도를 나타내는 요소당 재분할지수(refine-

ment indicator : ξ)를 아래와 같이 정의한다.

$$\xi_e = \frac{\|e\|_e}{\|e\|_{av}} \quad (13)$$

다만, $\|e\|_{av}$ 는 요소의 응력오차를 전체 계에 대해 평균을 취한 값이다.

절점이동법은 전체 계에 대하여 식 (13)의 재분할지수가 균일하게 분포될 때까지 계의 응력오차를 줄여나가는 방법으로서, 절점좌표를 이동시켜 요소 크기를 재조정함으로써 전체 자유도수를 일정하게 유지하면서 해의 정확도를 향상시키는 방법이다.

즉, 식 (13)으로 구한 요소의 재분할지수가 1보다 크면 요소의 크기를 줄이고, 1보다 작으면 요소를 크게하여 응력오차를 줄이는 방법이다.^(20,24,25) 절점을 이동시키는 기본개념은 Fig.1과 같은 스프링 절점계로 표현할 수 있다.

절점번호 i 의 좌표를 새롭게 선정하고자 할 때 이 절점을 공유하는 요소를 ①, ②, ③, ④라 하고 각 요소의 도심과 i 절점이 스프링으로 연결되어 있다고 생각한다. 이때 각 스프링 상수 k_j 가 해당 요소에서 계산되는 재분할지수에 비례한다고 가정하면 절점 i 는 이 값이 큰 쪽으로 이동하게 된다. 이 관계를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$(x_j, y_j, z_j) = \frac{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\xi_j}{V_j} \right) \cdot (\bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j)}{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\xi_j}{V_j} \right)} \quad (14)$$

단, (x_j, y_j, z_j) 는 i 절점의 새로운 위치이고 V_j , ξ_j 는 각각 i 절점에 인접한 j 요소의 체적과 오차에 의한 재분할지수이다. 특히 $(\bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j)$ 는 i 절점이 해석영역의 내부에 있을 경우에는 인접한 요소 j 의 도심의 좌표를 의미하지만, 해석 경계에 위치하고

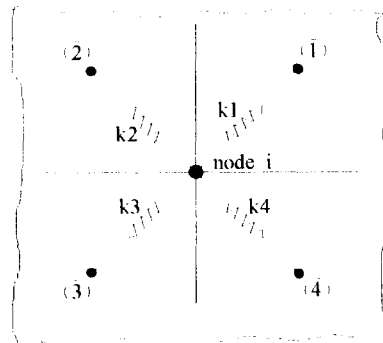


Fig. 1 Spring system of nodal connectivities

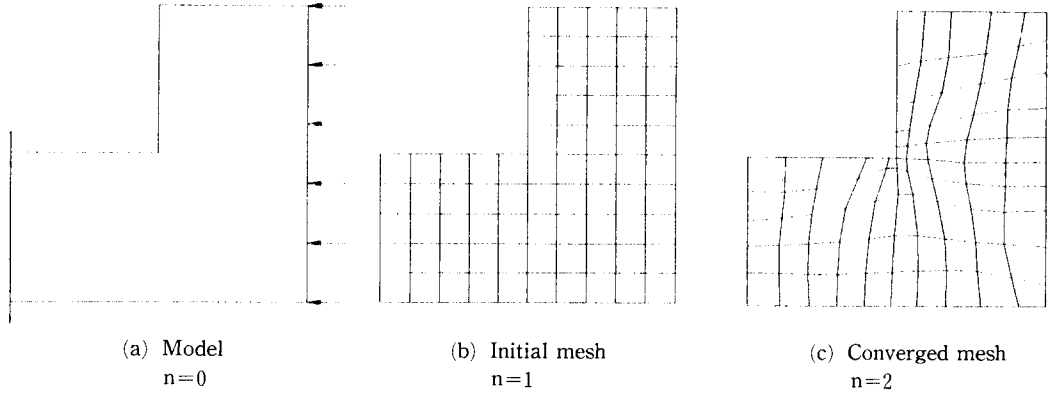


Fig. 2 Finite element meshes of an L-shaped plate

있을 경우에는 경계선을 따라 절점이 이동되어야 하므로 인접한 요소 j 의 4개 변 중에서 경계에 위치한 변의 중심 좌표를 의미한다. 또한, m 은 i 절점을 공유하는 요소의 개수이다.

절점이동법은 이와같이 새롭게 형성된 절점의 위치와 요소의 크기로 유한요소해석을 수행하여 전체 계를 통한 요소당 재분할지수가 다음 수렴조건을 만족할 때까지 반복한다.

$$\left| \frac{\xi_e^{i+1} - \xi_e^i}{\xi_e^i} \right| \leq \epsilon_e \quad (15)$$

단, i 는 반복횟수, ϵ_e 는 수렴조건을 의미한다.

이러한 절점이동법은 절점의 위치를 이동하여 요소의 크기를 조정하므로써 오차를 감소시키기 때문에 초기요소망과 동일한 자유도가 유지된다. 따라서 실제 설계문제에 적용할 때 설계변수의 수나 계산량이 제한되는 효과를 가져오게 된다.

그러나 자유도의 제한으로 인하여 사용자가 원하는 정확도까지의 오차를 감소시키는 것은 불가능하며 해석결과에 대한 신뢰성을 완전히 보장하지 못하는 단점을 가지게 된다. 또한, 식 (15)로 표현한 수렴조건이 만족될 때까지 유한요소해석을 반복함에 따라 계산시간이 급격히 증가한다는 단점을 지니고 있다.

이러한 특성을 검토하기 위하여 전형적인 평면응

력문제에 대하여 절점이동법을 적용하여 얻어진 요소망의 형상을 Fig. 2에 도시하고 그 해석결과를 Table 1에서 비교하였다.

Table 1에서 알 수 있듯이 절점이동법을 이용하여 절점을 이동시키므로써 응력집중이 예상되는 부위에는 작은 요소가 형성되었지만 상대오차와 최대 절점변위는 큰 변화가 없다. 즉 제한된 자유도만으로는 해의 정확도를 어느정도 향상시킬 수 있으나 요구하는 정확도를 얻을 수가 없음을 알 수 있다.

3.2 요소세분법

본 논문이 제안하는 요소세분법(h-method)의 알고리즘은 식(12)에서 정의된 상대오차의 크기가 사용자가 지정하는 최대허용 상대오차 ($\bar{\eta}$)보다 작으면 되도록 요소를 세분하는 방법이다.

먼저 응력오차가 큰 요소를 크기가 더 작은 여러 개의 요소들로 분할하여 새로운 요소망을 구성한다. 이때, 계 전체의 해석결과가 최대허용 상대오차 ($\bar{\eta}$)에 부합되는 정확도를 갖도록 하려면 새롭게 생성되는 각 요소의 응력오차는 다음 조건을 만족하여야 한다.⁽⁸⁾

$$\|e\|_i \leq \bar{\eta} \cdot \left(\frac{\|u\|^2 + \|e\|^2}{E} \right)^{1/2} = \|e\|_{\max} \quad (16)$$

단, E 는 전체 요소의 개수이고, $\|e\|_{\max}$ 는 요소의 응력오차중에서 허용되는 최대값이다. 또한 $\bar{\eta}$ 는 사용자가 지정한 허용 상대오차값을 의미한다.

이 방법에서는 각 요소에 대한 분할의 정도를 나타내기 위하여 재분할지수(refinement indicator : ξ)를 다음과 같이 정의한다. 또한 새롭게 구성되는 요소의 크기는 식 (18)로 표시된다.⁽¹¹⁾

Table 1 Analysis results for the L-shaped plate

Mesh	D.O.F	Max. displacement	Rel. error (η)
(b)	120	0.1429	11.2%
(c)	120	0.1454	9.7%

$$\xi_i = \frac{\|e\|_i}{\|e\|_{\max}} \quad (17)$$

$$h_f = h_i \cdot \xi_i^{-1/p} \quad (18)$$

이때 h_i , h_f 는 처음 요소와 생성될 새로운 요소의 크기, p 는 형상함수의 차수이다.

실제 요소를 세분하는 경우, 요소의 재분할지수 (ξ_i)나 요소의 크기(h_f)를 이용하지 않고 분할등급(refinement level : n)이라는 새로운 변수를 정의하여 이를 요소분할에 사용한다.⁽⁸⁾

$$n = \begin{cases} \frac{1}{p} \cdot \frac{\log \xi_i}{\log 2} & \text{for } \xi_i > 1 \\ 0 & \text{for } \xi_i \leq 1 \end{cases} \quad (19)$$

Fig. 3은 분할등급을 이용하여 요소를 세분하는 방법을 보인다.

이와같이 응력오차의 크기가 큰 요소를 몇 개의 작은 요소로 세분하면, 분할된 요소의 주위에는 천이요소(transition element)⁽⁸⁾가 발생된다.

또한 높은 응력집중이 발생하는 요소에서는 주위의 요소보다 상대적으로 큰 값의 분할등급을 가지게 되어 지정된 요소와는 다른 종류의 천이요소가 발생하게된다. 이를 미연에 방지하기 위하여, 인접한 두 요소사이의 분할등급의 차가 1을 초과하지 않도록 분할등급의 값을 보정해 줄 필요가 있으며 이에 대한 전략은 Fig. 4와 같다.

이 과정에서 절점의 생성과 요소의 구성에 관한 자료를 효과적으로 구성할 필요가 있다.^(14,15)

한편, Fig. 4에서 발생되는 천이요소⁽⁸⁾에 대해서는 Fig. 5와 같은 형태의 형상함수를 사용하였으며 이들 천이요소의 강성행렬은 부프로그램(su-

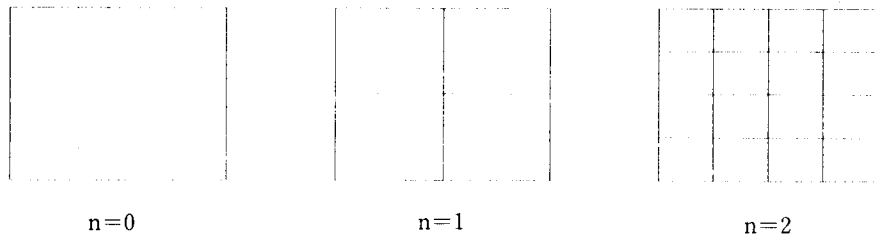


Fig. 3 Refinement level of an element

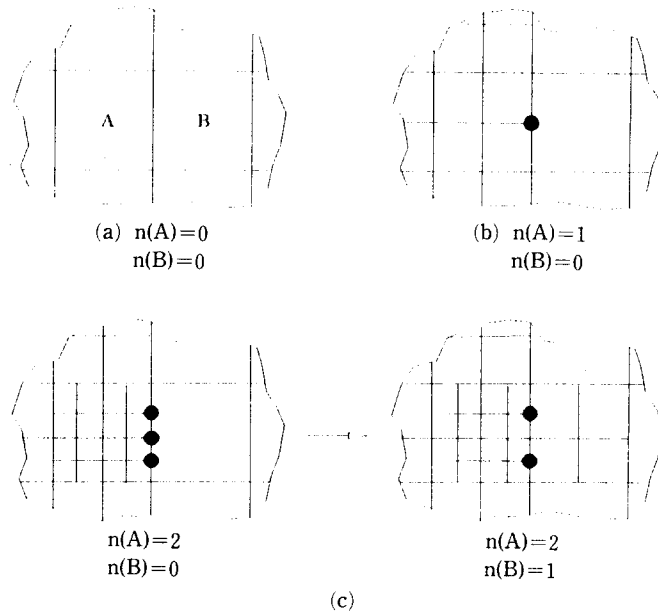


Fig. 4 One-level rule

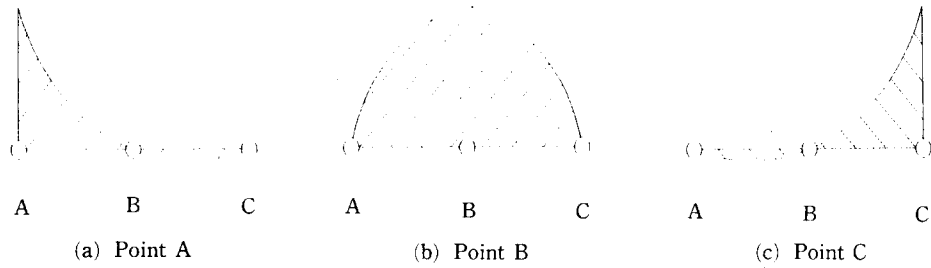


Fig. 5 Shape functions at a new noded-edge

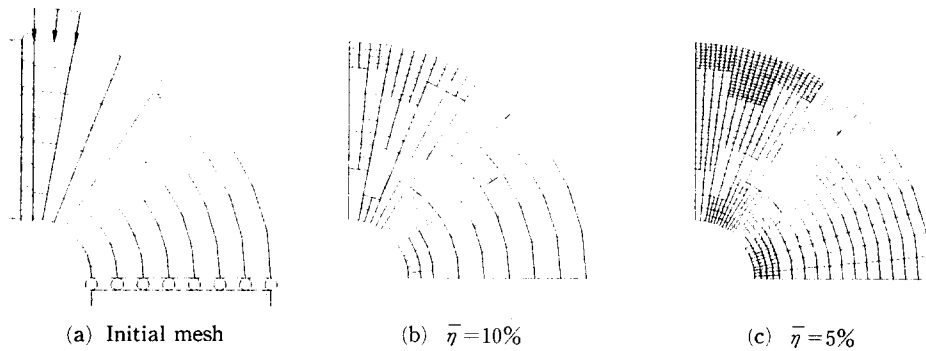


Fig. 6 Finite element meshes of a pinched annular plate

boutines)으로 처리된다.

또한 새로운 절점과 요소의 생성으로 인한 밴드 폭(band width)의 최소화를 위하여 절점번호와 요소번호를 재구성해주는 리넘버링(renumbering)^(31~33) 전략이 요구된다.

이와같이 요소세분법은 초기요소망과 최종요소망에 대해서만 유한요소해석을 수행하기 때문에 계산에 걸리는 시간을 줄일 수 있으며, 또한 사용자가 원하는 정확도에 일치하는 해석결과를 얻을 수 있다.

그러나 자유도의 급격한 증가로 인하여 초기요소망에 비해 훨씬 큰 계산용량이 요구되며, 상대오차의 크기가 평균보다 작은 요소에 대해서는 적절한

대응이 불가능하다는 단점을 지니게 된다.

Fig. 6은 평면응력상태의 두께가 얇은 원환판(annular plate)문제에 대하여 요소세분법을 적용하였을 때 생성되는 요소망의 형상을 도시하였고, 각 요소망의 자유도와 최대변위를 Table 2에 나타내었다.

위에서 해석한 예제를 기준으로 검토하여 볼 때 요소세분법은 정확도를 향상시키는데는 상당한 효과가 있다. 그러나 사용자가 지정하는 허용오차($\bar{\eta}$)에 너무 민감하게 자유도가 많이 발생되기 때문에 이로 인하여 계산용량이 과도하게 커지게 됨을 알 수 있다. 또한 응력오차가 최대허용치보다 작은 요소에 대해서는 오차를 개선하기 위한 대책을 세울 수 없다.

Table 2 h-method analysis results of the pinched annular plate

Mesh	$\bar{\eta}$	D.O.F	Max. displacement
(a)	-	144	0.3105
(b)	10%	460	0.3174
(c)	5%	1658	0.3227

3.2 rh-혼합법

절점의 수가 급격히 많이 생성되는 것을 방지하면서 사용자가 원하는 정확도를 얻기 위하여 본 논문에서는 절점이동법과 요소세분법을 병행하는 rh-혼합법(rh-method)를 제안한다.

이 방법의 알고리즘은, 사용자가 지정하여 주는 초기 유한요소망에 대해서 먼저 절점이동법을 실행

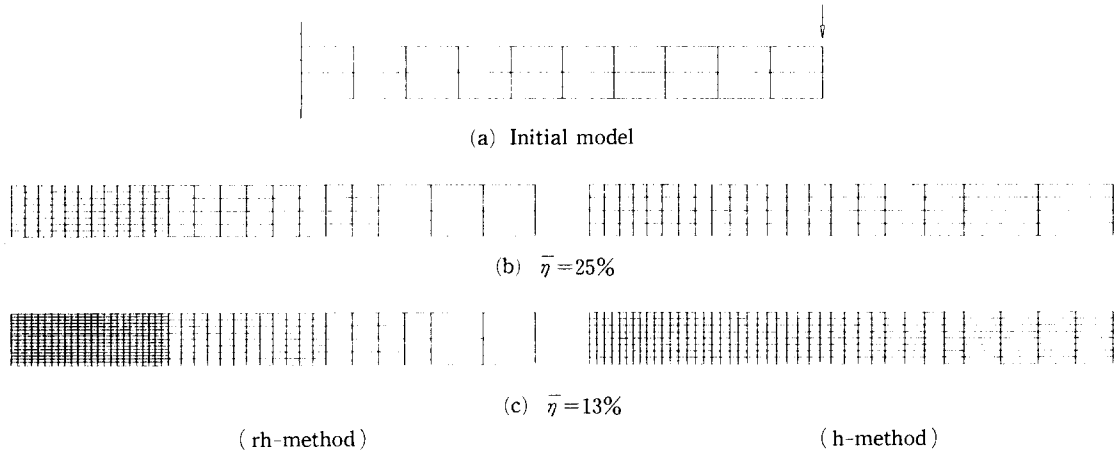


Fig. 7 Finite element models of a cantilever under endpoint loads

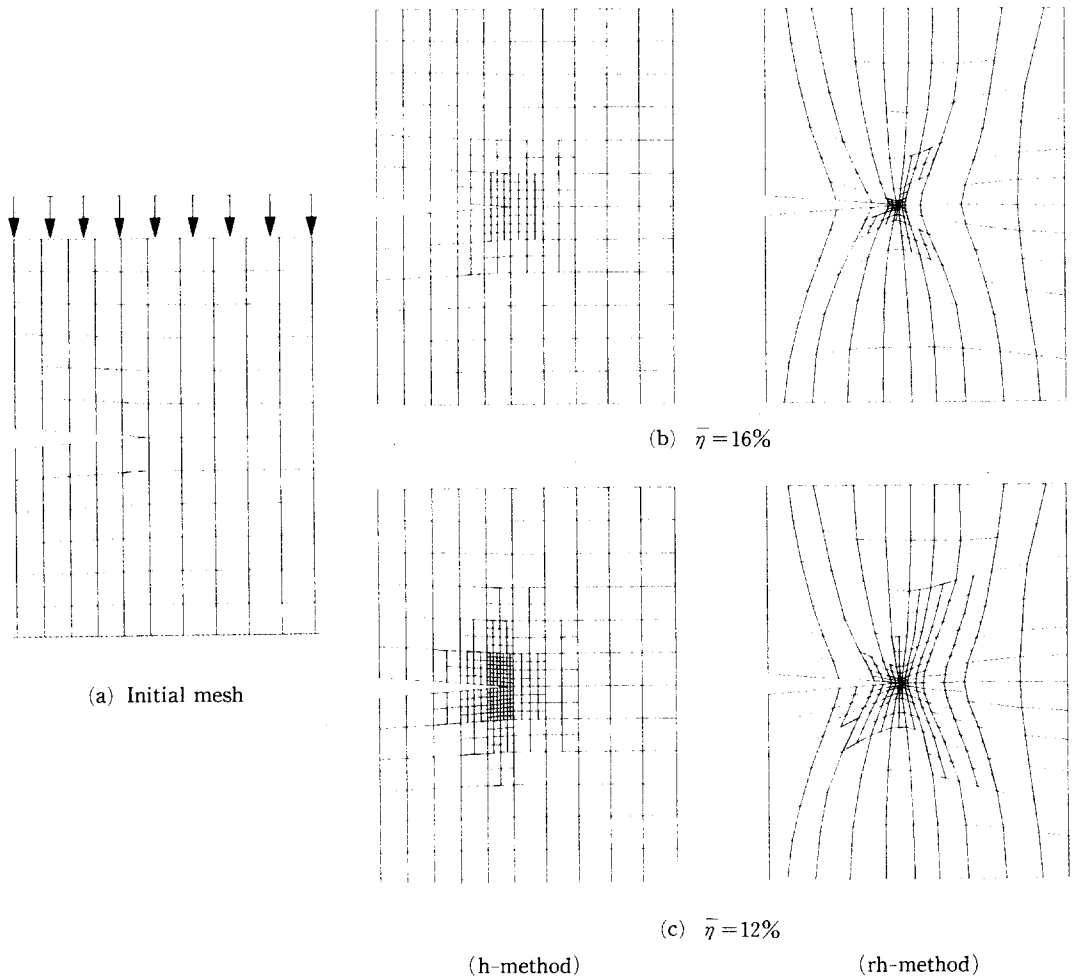


Fig. 8 Finite element models of a notched plate under uniformly distributed loads

한 후에 이때 생성되는 요소망을 요소세분법의 초기요소망으로 사용하고자 하는 것이다.

계산시간이 많이 소요되는 절점이동법의 단점을 보완하기 위하여 rh-혼합법에서는 절점이동법의 수행과정으로 새로운 요소망이 형성된 후 각 요소의 응력오차를 요소체적과 다음 관계식을 이용하여 보정한다.

$$\|e\|^{i+1} = \frac{V^{i+1}}{V^i} \cdot \|e\|^i \quad (20)$$

단, i 는 절점이동법의 반복횟수, V 는 각 요소의 체적을 의미한다.

매 반복단계마다 이런 방법을 이용하여 요소의 응력오차를 구하게 되면 유한요소해석을 통해 구하는 경우보다 응력오차의 정확도는 다소 떨어지나 절점이동법의 수렴에 요구되는 계산시간을 상당히 줄일 수 있으며, 응력오차의 정확도가 다소 떨어지더라도 전체 요소망이 요소세분법으로 보정되기 때문에 전체 계에 대한 해의 신뢰성은 유지된다.

또한, 절점이동법의 수렴조건은 각 반복단계에서 새롭게 구한 응력오차의 표준편차를 구하여 응력오

차의 표준편차가 이전 단계보다 커지게 되는 경우를 수렴조건으로 사용한다. 결국 이때의 요소망정도가 요소세분법의 초기요소망이 된다.

이와같이 rh-혼합법은 절점이동법의 단점을 요소세분법으로 완전히 보완할 수 있으며, 절점이동법의 수렴에 요구되는 계산시간 역시 크게 줄일 수 있게 된다.

또한 요소세분법의 단점인 응력오차가 작은 요소에 대한 대책을 절점이동법으로 보완해 줄 수 있으며 요소세분법만을 사용하는 경우보다 자유도의 감소효과를 기대할 수 있게 된다.

Figs. 7, 8, 9에 요소세분법과 rh-혼합법을 적용하여 해석한 결과로 생성된 요소망을 도시하였고, Tables 3, 4, 5에 각각의 허용오차에 대한 최대변위와 자유도를 비교하였다.

이상의 여러가지 수치실험에서 알 수 있듯이, rh-혼합법에서는 절점이동법으로서 요소의 크기를 어느정도 조정한 후에 요소세분법을 적용하기 때문에 절점의 지나친 생성이 억제되어 약 30~50%의 자유도를 감소시키는 효과를 얻게 된다. 또한 해석결

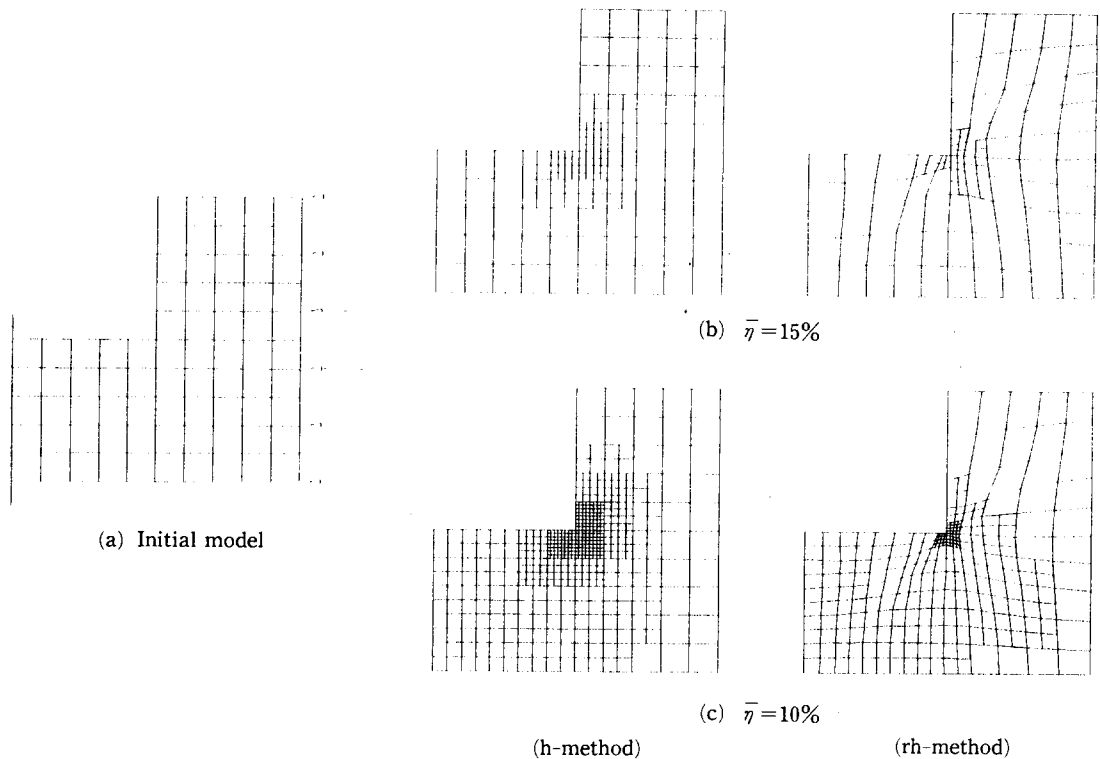


Fig. 9 Finite element models of an L-shaped plate under uniformly distributed loads

Table 3 Comparison on the analysis results of the cantilever using h-method and rh-method

Mesh	$\bar{\eta}$ (%)	D.O.F		Max. displacement	
		h-method	rh-method	h-method	rh-method
(a)	-	60	60	0.1295	0.1526
(b)	25	314	200	0.1738	0.1786
(c)	13	1084	720	0.1804	0.1879

Table 4 Comparison on the analysis results of the notched plate using h-method and rh-method

Mesh	$\bar{\eta}$ (%)	D.O.F		Max. displacement	
		h-method	rh-method	h-method	rh-method
(a)	-	296	296	0.4075	0.4424
(b)	16	528	414	0.4445	0.4481
(c)	12	902	578	0.4487	0.4526

Table 5 Comparison on the analysis results of the L-shaped plate using h-method and rh-method

Mesh	$\bar{\eta}$ (%)	D.O.F		Max. displacement	
		h-method	rh-method	h-method	rh-method
(a)	-	180	180	0.8063	0.8079
(b)	15	356	250	0.8332	0.8393
(c)	10	1100	574	0.8462	0.8483

과에서 알 수 있듯이 최대변위는 rh-혼합법으로 얻은 값이 요소세분법의 결과보다 더 정확한 값을 나타내고 있다. 결국 rh-혼합법은 해석의 성능뿐만 아니라 결과의 신뢰성에서도 좋은 효과가 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

선형탄성문제를 유한요소법으로 해석하는 경우에 해석결과와 정확도를 조절하므로써 해의 신뢰성을 향상시키기 위한 적응해석방법을 연구하였다. 유한요소해석을 위한 요소모델에 대하여 분할오차를 평

가한 후 이를 기준으로 요소를 재분할하는 방법과 절점이동법과 요소세분법을 병행하는 rh-혼합법의 알고리즘을 제안하였다.

제안된 알고리즘의 타당성과 유효성을 평가하기 위하여 여러가지 문제에 대한 수치실험을 수행하였으며, 이를 검토한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) rh-혼합법에 적용되는 절점이동 방법은 수렴속도가 빨라서 요소의 크기를 완만하게 변화시키는데 효과적이다.

(2) rh-혼합법은 요소별 응력오차를 평준화시킬 수 있기 때문에 정확도에 따른 최적 유한요소 모델을 얻을 수 있다.

(3) rh-혼합법은 기존 요소세분법만을 사용하는 경우에 비하여 30~50%의 자유도를 감소시킬 수 있으며 요구하는 정확도에 부합하는 해석결과를 얻을 수 있다.

(4) 제안된 알고리즘은 비교적 간단하므로 기존 유한요소 상용프로그램에 쉽게 연결할 수 있다.

후 기

본 연구는 1993년도 한국과학재단의 핵심전문 연구과제(931-1000-037-2)의 일부로 수행되었으며 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., 1987, "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 24, pp. 337~357.
- (2) Samuelsson, A., Wiberg, N. E. and Zeng, L. F., 1993, "The Effectivity of the Zienkiewicz-Zhu Error Estimate and 2-D Adaptive Mesh Generators," *Commun. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 9, pp. 687~699.
- (3) Mashaie, A., Hughes, E. and Goldak, J., 1993, "Error Estimates for Finite Element Solutions of Elliptic Boundary Value Problems," *Comp. Struct.*, Vol. 49, No. 1, pp. 187~198.
- (4) Cook, R. D., 1993, "An Element Error Indicator and a Related Stress-Improvement Procedure," *Commun. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 9, pp. 207

- ~217.
- (5) Ainsworth, M., Zhu, J. Z., Craig, A. W. and Zienkiewicz, O. C., 1987, "Analysis of the Zienkiewicz-Zhu posteriori Error Estimator in Finite Element Method," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 28, pp. 2161~2174.
 - (6) Babuška, I., Zienkiewicz, O. C., Gago, J. and Oliveira, E. R. de A., 1986, *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, Wiley.
 - (7) Szabó, B. and Babuška, I., 1991, *Finite Element Analysis*, Wiley.
 - (8) Krishnamoorthy, C. S. and Umesh, K. R., 1993, "Adaptive Mesh Refinement for Two-Dimensional Finite Element Stress Analysis," *Comp. Struct.*, Vol. 48, No. 1, pp. 121~133.
 - (9) Samuelsson, A., Wiberg, N. E. and Zeng, L. F., 1993, "The Effectivity of the Zienkiewicz-Zhu Error Estimate and Two 2D Adaptive Mesh Generators," *Commun. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 9, pp. 687~699.
 - (10) Yunus, S. M., Pawlak, T. P. and Wheeler, M. J., 1990, "Application of the Zienkiewicz-Zhu Error Estimator for Plate and Shell Analysis," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 29, pp. 1281~1298.
 - (11) Jin, H. and Wiberg, N. F., 1990, "Two-Dimension Mesh Generation, Adaptive Remeshing and Refinement," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 29, pp. 1501~1526.
 - (12) Zienkiewicz, O. C., Zhu, J. Z. and Gong, N. G., 1989, "Effective and Practical h-p Version Adaptive Analysis Procedures for the Finite Element Method," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 28, pp. 879~891.
 - (13) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., 1989, *The Finite Element Method-Basic Formulation and Linear Problems*, 4th edn, McGraw-Hill.
 - (14) Carey, G. F., Sharma, M. and Wang, K. C., 1988, "A Class of Data Structure for 2-D and 3-D Adaptive Mesh Refinement," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 26, pp. 2607~2622.
 - (15) Date, C. J., 1983, *An Introduction to database system*, Vol. 1 and Vol. 2, Addison-Wesley.
 - (16) Babuška, I. and Szabó, B., 1982, "On the Rates of Convergence of the Finite Element Method," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 18, pp. 323~341.
 - (17) Melosh, R. J. and Marcal, P. V., 1977, "An Energy Basis for Mesh Refinement of Structural Continua," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 11, pp. 1083~1091.
 - (18) Umesh, K. R., 1991, "Adaptive Mesh Refinement for 2-D Problems in Finite Element Analysis," *Civil Engineering Department, Indian Institute of Technology, Madras*.
 - (19) Robinson, J., 1986, "An Introduction to Hierarchical Displacement Elements and the Adaptive Technique," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 2, pp. 377~388.
 - (20) 오형석, 임장근, 1994, "절점이동에 의한 평면문제 유한요소의 최적 분할 방안", 대한기계학회 '94년도 춘계 학술대회 논문집(1), pp. 331~335.
 - (21) Martinez, R. and Samartin, A., 1991, "Two-Dimensional Mesh Optimization in the Finite Element Method," *Comp. Struct.*, Vol. 40, No. 5, pp. 1169~1175.
 - (22) Noor, A. K., Babuška, I., 1987, "Quality Assessment and Control of Finite Element Solutions," *Finite Element in Analysis and Design*, Vol. 3, pp. 1~26.
 - (23) Kikuchi, N., 1986, "Adaptive Grid-Design Methods for Finite Element Analysis," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 55, pp. 129~160.
 - (24) Diaz, A. R., Kikuchi, N., Papalambros, P. and Taylor, J. E., 1983, "Design of an Optimal Grid for Finite Element Methods," *J. Struct. Mech.*, Vol. 11, No. 2, pp. 215~230.
 - (25) Diaz, A. R., Kikuchi, N. and Taylor, J. E., 1983, "A Method of Grid Optimization for Finite Element Methods," *Comput. Methods Appl. Meth. Eng.*, Vol. 41, pp. 29~45.
 - (26) Shephard, M. S., Gallagher, R. H. and Abel, J. F., 1980, "The Synthesis of Near-Optimum Finite Element Meshes with Interactive Computer Graphics," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 15, pp. 1021~1039.

- (27) Turche, D. J., 1976, "On Optimum Finite Element Grid Configurations," *AIAA J.*, Vol. 14, No. 2, pp. 264~265.
- (28) Turche, D. J. and McNeice, G. M., 1974, "Guideline for Selecting Finite Element Grids Based on an Optimization Study," *Comp. Struct.*, Vol. 4, pp. 499~519.
- (29) McNeice, G. M. and Marcal, P. V., 1973, "Optimization of Finite Element Grids Based on Minimum Potential Energy," *J. Indust., ASME*, pp. 186~190.
- (30) Bathe, K. J., 1982, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall.
- (31) Cuthill, E. H. and McKee, J. M., 1969, *Proceedings, Conference Association for Computing Machinery*, pp. 151~171.
- (32) Rosen, R., 1968, "Matrix Bandwidth Minimization," *Proceedings, Conference Association for Computing Machinery*, pp. 585~595.
- (33) Cook, R. D., Malkus, D. S. and Plesha, M. E., 1989, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd edn., Wiley.