

<논 문>

스펙트럴요소법을 이용한 동적분포하중을 받는 구조물의 동적해석

이우식* · 이준근** · 오진우**

(1995년 9월 11일 접수)

Dynamic Analysis of the Structures under Dynamic Distributed Loads Using Spectral Element Method

Usik Lee, Joonkeun Lee and Jin-Woo Oh

Key Words : Spectral Element Method(스펙트럴요소법), Dynamic Distributed Loads(동적분포하중), Dynamic Behaviors(동적거동)

Abstract

Finite element method(FEM) is one of the most popularly used method in analyzing the dynamic behaviors of structures. But unless the number of finite elements is large enough, the results from FEM are somewhat different from exact analytical solutions, especially at high frequency range. On the other hand, as the spectral analysis method(SAM) deals directly with the governing equations of a structure, the results from this method cannot but be exact regardless of any frequency range. However, the SAM can be applied only to the case where a structure is subjected to the concentrated loads, despite a structure could be undergone distributed loads more generally. In this paper, therefore, new spectral analysis algorithm is introduced through the spectral element method(SEM), so that it can be applied to any structures whether they are subjected to the concentrated loads or to the distributed loads. The results from this new SEM are compared with both the results from FEM and the exact analytical solutions. As expected, the results from new SEM algorithm are found to be almost identical to the exact analytical solutions while those from FEM are not agreed well with the exact analytical solutions as the mode number increases.

기 호 설 명

A : 오일러보의 단면적
 $f(x,t)$: 오일러보 요소내의 외력
 G : 티모센코보의 전단강성계수
 I : 면적 관성모멘트
 k : 파수
 L : 오일러보 혹은 티모센코보 요소의 길이

$p(t)$: 시간영역에서의 외력
 $P(\omega)$: 주파수영역에서의 외력

그리스문자

ρ : 오일러보 혹은 티모센코보의 밀도
 χ : 전단계수
 η : 구조감쇠 손실계수
 ν : 푸아송비
 ω : 각 주파수

*회원, 인하대학교 기계공학과

**인하대학교 대학원 기계공학과

1. 서 론

구조물의 동적거동에 관한 연구는 여러 학자들에 의해서 최근까지도 가장 활발히 연구가 진행되고 있는 내용중의 하나이다. 따라서 구조물의 동적거동을 해석하기 위한 여러 방법들이 연구되어 왔지만 그 중에서도 가장 일반적으로 사용되는 방법으로 유한요소법을 들 수 있다. 그러나 유한요소법은 저주파수에서 신뢰성있는 결과를 제시할 수 있으나 고주파수로 갈수록 엄밀해와는 상당한 차이를 갖게 된다. 이것은 관심있는 주파수의 범위가 고주파 영역일수록 구조물내를 흐르는 탄성파의 파장(wave length)이 점점 짧아지기 때문에 발생하는 현상으로 만일 유한요소의 길이를 관심있는 주파수에 해당하는 파장보다 충분히 작게 하지 않는다면 엄밀해에 가까운 값을 얻을 수 없게 된다. 따라서 유한요소법으로 엄밀해에 가까운 구조물의 동적응답을 얻기 위해서는 일반적으로 매우 많은 수의 요소분할이 요구되므로 많은 전산시간과 컴퓨터 용량이 필요하게되어 이를 해결하기 위한 과제가 여전히 남아있다.

구조물이 갖는 동적거동으로서 진동을 파동역학(wave mechanics)의 관점에서 본다면 진동현상은 수많은 이동탄성파(travelling elastic wave)가 모여서 형성된 정재파(standing wave)의 한 형태로 볼 수 있다. 따라서 구조물의 진동해석을 기존의 모드해석법 대신에 파동역학의 관점에서도 다룰 수 있음은 분명하다. 파동역학의 개념을 이용하여 구조물을 해석할 경우 구조물의 지배방정식을 통해 얻게 되는 정확한 탄성파동 특성, 즉 파수(wave number)와 주파수(frequency)와의 관계를 풀이과정에서 사용하기 때문에 모드해석법에서와는 달리 일반적으로 주파수 범위에 구애됨이 없이 엄밀해에 가까운 좋은 결과를 얻을 수 있다는 장점이 있다.⁽¹⁾

일찌기, Doyle⁽¹⁾은 구조물내의 탄성파동의 분산관계(dispersive relation)⁽²⁾를 이용하여 파수와 주파수의 함수로 유도된 파동해를 모두 주파수의 함수로 표현한 후 고속 푸리에변환(fast fourier transform : FFT)과 역 고속 푸리에변환(inverse FFT : IFFT) 알고리즘을 해석과정에서 적용시켜 구조물의 동적응답을 시간축상 혹은 주파수축상에서 정확하게 구할 수 있는 방법을 제안하였다. 이와같이 파동해를 이용하여 구조물의 동적거동을 해

석하는 과정에서 고속 푸리에변환과 역 고속 푸리에변환을 적용하는 해석기법을 스펙트럴해석법(spectral analysis method : SAM)⁽¹⁾이라고 한다. 이미 잘 알려진 스펙트럴해석법의 가장 큰 단점은 해석하고자 하는 구조물이 물성치가 서로 다른 재질로 이루어진 복합구조물이거나 단면적이 급격하게 변하는 기하학적인 불연속성이 존재하는 구조물일 경우에는 직접적인 적용이 불가능하다는 점이다. 이러한 제약을 극복하기 위하여 Doyle은 구조물상에 어떠한 불연속성이 존재하는 경우, 마치 유한요소법에서 구조물을 유한요소로 세분화하여 유한요소 모델링을 수행하는 것처럼, 불연속성이 존재하는 부위를 구분하여 서로 다른 스펙트럴요소(spectral element)가 결합된 형태로 가정하여 해석하는 방법을 고안하였다. 이와같이 하나의 구조물을 여러 개의 스펙트럴요소의 결합된 형태로 보고 기존의 유한요소법의 해석과정을 유사하게 따라 수행하는 스펙트럴해석법을 스펙트럴요소법(spectral element method : SEM)이라고 한다.⁽¹⁾ 스펙트럴요소는 기존의 유한요소와는 달리 구조요소의 길이에 구애되지 않기 때문에 대부분의 경우 필요 이상의 스펙트럴요소로 세분화할 필요가 없기 때문에 스펙트럴요소법은 기존의 유한요소법과 비교하여 훨씬 적은 스펙트럴요소수만으로도 엄밀해에 가까운 결과를 구할 수 있는 매우 효율적인 해석기법이라고 할 수 있다.

스펙트럴해석법을 활용하여 Gopalakrishnan 등⁽³⁾은 티모센코보(Timoshenko beam)의 동적거동을 고찰하였으며 단면이 변화하는 티모센코보⁽⁴⁾에 대해서도 다룬 바 있다. Rizzy 등⁽⁵⁾은 층구조를 갖는 구조물을 스펙트럴해석법으로 해석하는 기법을 제안하였다. 그러나 지금까지 발표된 대부분의 연구와 해석이론은 구조물이 집중하중을 받는 경우에 국한되어 있을 뿐 동적분포하중을 받는 구조물에 대한 스펙트럴 해석을 수행한 예는 아직까지 없었다. 동적분포하중을 받는 구조물에 대한 스펙트럴 해석기법을 정립한다면 구조물에 작용하는 하중의 형태에 구애받지 않고 보다 광범위한 문제를 다룰 수 있기 때문에 이에 대한 연구가 중요시 되어왔다. 따라서, 본 연구에서는 (1) 스펙트럴해석법을 엄밀해가 존재하는 베르누이-오일러보(Bernoulli-Euler beam) 문제에 적용시켜 스펙트럴해석법의 정확성을 검증한 후, (2) 힘과 변위와의 관계를 이용하여 베르누이-오일러보와 티모센코보의 스펙트

렬요소를 유도하고, (3) 동적분포하중을 받는 베르누이-오일러 보의 엄밀해를 본 연구에서 소개한 두 개의 스펙트럴요소의 길이를 변화시키면서 선형 중첩하는 새로운 스펙트럴해석 알고리즘을 이용하여 구한 결과와 비교함으로써 본 연구의 타당성을 검증하였다.

2. 스펙트럴해석법의 개요

2.1 기본 개념

본 장에서는 베르누이-오일러 보를 대상으로 하여 Doyle⁽¹⁾이 소개한 바 있는 스펙트럴해석법에 대해 간단히 소개하도록 한다. 베르누이-오일러 보의 운동방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E^* I \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f(x, t), \quad E^* (1 + i\eta) \quad (1)$$

외력이 없는 경우 $f(x, t)$ 를 식 (1)로부터 소거한 후 식 (1)의 자유파동해 (free wave solution)을 쉽게 구할 수 있다. x 방향으로 진행하는 탄성파에 대한 파동해의 일반적인 표현은 다음과 같다.

$$v = v_0 e^{i(\omega t - kx)} = \bar{v}(x) e^{i\omega t} \quad (2)$$

여기서, ω 는 주파수이며 k 는 파수 (wave number)이다.⁽⁶⁾ 파동해 (2)를 지배방정식 (1)에 대입하면 다음과 같은 관계식을 유도할 수 있다.

$$E^* I k^4 - \omega^2 \rho A = 0 \quad (3)$$

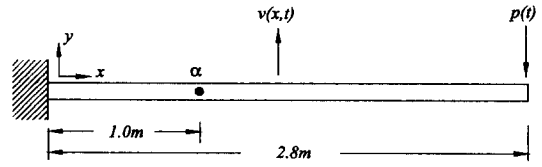


Fig. 1 Cantilevered Bernoulli-Euler beam with a concentrated load: α indicated the observation point of the dynamic response

식 (2)와 (3)으로부터 보의 일반해는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\bar{v}(x) = A e^{-ikx} + B e^{-kx} + C e^{ikx} + D e^{kx} \quad (4)$$

여기서, $k = \sqrt[4]{\omega^2 (\rho A / E^* I)}$ 이다. 힘과 변위와의 관계식

$$V = E^* I \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial x^3}, \quad M = E^* I \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \quad (5)$$

을 이용하여 Fig. 1에 나타난 외발보의 경계조건은 다음과 같은 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -ik & -k \\ -k^2 e^{-ikL} & k^2 e^{-kL} \\ E^* I ik^3 e^{-ikL} & -E^* I k^3 e^{-kL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Table 1 Material & structural properties of structures

Material and geometric properties	Bernoulli-Euler beam	Timoshenko beam
Young's modulus (E)	72.2×10^9 GPa	72.2×10^9 GPa
Shear modulus (G)	-	27.1×10^9 GPa
Structural damping factor (η)	0.03	0.03
Shear coefficient (χ)	-	0.85
Density (ρ)	2.8×10^3 kg/m ³	2.8×10^3 kg/m ³
Poisson's ratio (ν)	-	0.33
Width (b)	1 m	1 m
Length (L)	2.8 m	2.8 m
Height (h)	1.58×10^{-2} m	1.58×10^{-2} m

Table 2 Comparisons of the natural frequencies (Hz) of a Bernoulli-Euler beam by the exact analytical method, SAM and FEM (NISA)

Mode number	Analytical (Exact)	SAM	FEM (NISA)
1	1.67	1.67	1.67
2	10.5	10.5	10.4
3	29.3	29.3	29.1
4	57.6	57.6	57.0
5	95.0	95.0	94.0
16	987	987	911
17	1129	1129	1016
18	1277	1278	1113

네개의 미지수 A, B, C, D 는 위의 행렬식을 풀어 구할 수 있다. 그 결과를 식 (4)의 파동해에 대입하여 수직변위를 $\bar{v}(x)$ 를 구한 후 이를 다시 식 (5)에 대입하면 전단력과 모멘트를 주파수의 함수로 구할 수 있다. 식 (6)의 특성방정식을 풀면 고유진동수를 얻을 수 있다. Table 1은 계산에 사용된 보의 물성치를 나타내고 Table 2는 엄밀한 이론해와 스펙트럴해석법 그리고 유한요소의 갯수를 충분히 사용(유한요소 갯수 : 100)하여 수행한 유한요소해석에 의한 고유진동수를 상호 비교한 것이다. 관심있는 주파수의 범위가 증가할수록 유한요소법으로 구한 결과가 엄밀한 이론해의 결과와 비교하여 점차 오차가 커지고 있으나 스펙트럴해석법에 의한 결과는 고주파 영역에서도 엄밀한 이론해와 거의 일치하고 있음을 보여줌으로써 스펙트럴해석법의 정확성을 보여주고 있다.

2.2 스펙트럴요소 행렬의 유도

기존의 유한요소법에서 다루는 유한요소의 특성은 구조의 강성을 나타내는 강성행렬(stiffness matrix)과 관성효과를 나타내는 질량행렬(mass matrix)에 의해 표현된다. 이에 비해 스펙트럴요소의 특성은 스펙트럴요소 행렬에 의해 나타나며 이는 구조물의 운동방정식으로부터 구해진 파동해로부터 직접 유도되기 때문에 구조물의 관성효과와 강성효과를 엄밀하게 반영시킬 수 있을 뿐 아니라

동시에 유한요소법에서처럼 스펙트럴요소들의 조합이 가능하므로 스펙트럴요소의 편이성과 정확성을 활용하면 신뢰성이 높은 해석결과를 얻을 수 있다. 따라서 본 장에서는 동적분포하중을 받는 구조물에 대해 스펙트럴요소 해석을 수행하기 위해서 일차적으로 요구되는 스펙트럴요소 행렬의 유도과정을 두 가지 구조요소를 예제로 하여 소개하고자 한다.

(예제 1) 베르누이-오일러 보의 스펙트럴요소 행렬

스펙트럴요소 행렬은 절점에서의 힘과 변위와의 관계로부터 유도한다. 베르누이-오일러 보의 변위는 식 (4)로부터 식 (7)과 같이 행렬식으로 표현할 수 있다.

$$\bar{v}(x) = [e^{-ikx} \ e^{-kx} \ e^{ikx} \ e^{kx}] \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} \tag{7}$$

보의 전단력과 모멘트는 식 (7)의 변위식으로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} -V &= E^*I \frac{d^3 \bar{v}}{dx^3} \\ &= E^*I (ik^3 A e^{-kx} - k^3 B e^{-kx} - ik^3 C e^{ikx} - k^3 D e^{kx}) \\ M &= E^*I \frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} \\ &= E^*I (-k^2 A e^{-kx} - k^2 B e^{-kx} - k^2 C e^{ikx} - k^2 D e^{kx}) \end{aligned} \tag{8}$$

Fig. 2와 같은 보의 스펙트럴요소에 대해 절점에서의 힘(전단력, 모멘트)은 식 (8)을 이용하여 다음의 행렬식과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} V_0 \\ M_0 \\ V_L \\ M_L \end{Bmatrix} = E^*I \begin{bmatrix} ik^3 & -k^3 \\ k^2 & -k^2 \\ -ik^3 e^{-ikL} & k^3 e^{-kL} \\ -k^2 e^{-ikL} & k^2 e^{-kL} \\ -ik^3 & k^3 \\ k^2 & -k^2 \\ ik^3 e^{ikL} & -k^3 e^{kL} \\ -k^2 e^{-ikL} & k^2 e^{kL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} \\ = [T] \{A \ B \ C \ D\}^T \tag{9}$$

스펙트럴요소의 양끝 절점에서의 힘과 변위와의 관계를 유도하기 위해 먼저 $x=0$ 와 $x=L$ 에서의 변위와 기울기를 구하면 다음과 같다.

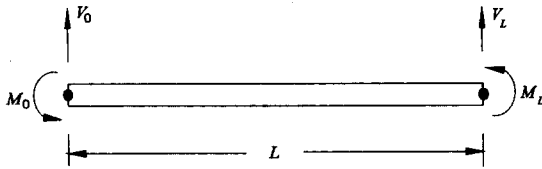


Fig. 2 Sign convention for the spectral element of Euler beam

$$\begin{aligned} v_0 &= A + B + C + D \\ v_0' &= -ikA - kB + ikC + kD \\ v_L &= Ae^{-ikL} + Be^{-kL} + Ce^{ikL} + De^{kL} \\ v_L' &= -ikAe^{-kL} - kB e^{-kL} + ikC e^{ikL} + kD e^{kL} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, ()' = ∂() / ∂x이다. 식 (10)을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} v_0 \\ v_0' \\ v_L \\ v_L' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ik & -k & ik & k \\ e^{-ikL} & e^{-kL} & e^{ikL} & e^{kL} \\ -ike^{-ikL} & -ke^{-kL} & ike^{ikL} & ke^{kL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = [N] \{ABCD\}^T \quad (11)$$

따라서, 식 (9)와 식 (11)을 결합하여 힘과 변위와의 관계를 다음과 같이 행렬식 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} V_0 \\ M_0 \\ V_L \\ M_L \end{Bmatrix} = [T] [N]^{-1} \begin{Bmatrix} v_0 \\ v_0' \\ v_L \\ v_L' \end{Bmatrix} = [S_B] \{v_0 \ v_0' \ v_L \ v_L'\}^T \quad (12)$$

식 (12)에서 행렬 [S_B]는 베르누이-오일러보의 스펙트럴요소 행렬을 나타낸다.

(예제 2) 티모센코보의 스펙트럴요소 행렬

티모센코보⁽⁷⁾은 전단변형 (shear deformation effect)과 회전관성 (rotary inertia) 효과를 모두 고려한 모델로서 다음과 같은 운동방정식으로 표현된다.

$$E^* I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \ddot{w} - \left(\rho I + \frac{E^* I \rho}{xG} \right) \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} + \frac{\rho^2 I}{xG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = p(x, t) \quad (13)$$

식 (13)의 파동해를

$$w = w_0 e^{i(\omega t - kx)} = \bar{w}(x) e^{i\omega t} \quad (14)$$

와 같이 가정하여 식 (13)에 대입하면 다음과 같은 스펙트럼 관계식이 유도된다.

$$ak^4 + c\omega^4 + bk^2\omega^2 + d\omega^4 = 0 \quad (15)$$

여기서,

$$\begin{aligned} a &= E^* I, \quad b = -\left(\rho I + \frac{E^* I \rho}{xG} \right) \\ c &= -\rho A, \quad d = \frac{\rho^2 I}{xG} \end{aligned}$$

따라서 수직변위 $\bar{w}(x)$ 는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \bar{w}(x) &= \left[e^{-ik_1 x} \ e^{ik_1 x} \ e^{-ik_3 x} \ e^{ik_3 x} \right] \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} \\ &= \{Q(\omega)\} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, 파수 k_1 과 k_3 는 다음과 같이 정의된다.

$$k_{1,3} = \sqrt{\frac{\omega(-b\omega \pm \sqrt{-4ac + b^2\omega^2 - 4ad\omega^2})}{2a}}$$

식 (16)으로부터 전단력과 모멘트는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} V &= E^* I \frac{d^3 \bar{w}}{dx^3} \\ &= E^* I (ik_1^3 A e^{-ik_1 x} - ik_1^3 B e^{ik_1 x} + ik_3^3 C e^{-ik_3 x} - ik_3^3 D e^{ik_3 x}) \\ M &= E^* I \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} \\ &= E^* I (-k_1^2 A e^{-ik_1 x} - k_1^2 B e^{ik_1 x} - k_3^2 C e^{-ik_3 x} - k_3^2 D e^{ik_3 x}) \end{aligned} \quad (17)$$

식 (17)로부터 티모센코보의 양 끝단 절점에서의 힘은 다음과 같이 행렬식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F_0 \\ T_0 \\ F_L \\ T_L \end{Bmatrix} = E^* I \begin{bmatrix} ik_1^3 & -i k_1^3 \\ k_1^2 & k_1^2 \\ -ik_3^3 Z_1^{-1} & ik_3^3 Z_1 \\ -k_3^2 Z_1^{-1} & -k_3^2 Z_1 \\ i k_3^3 & -i k_3^3 \\ k_3^2 & k_3^2 \\ -ik_3^3 Z_3^{-1} & ik_3^3 Z_3 \\ -k_3^2 Z_3^{-1} & -k_3^2 Z_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} \quad (18)$$

여기서, $Z_1=e^{ik_1L}$, $Z_3=e^{ik_3L}$ 이다. 마찬가지로 $x=0$ 와 $x=L$ 에서의 변위와 기울기는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ w_0' \\ w_L \\ w_L' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -ik_1 & ik_1 & -ik_3 \\ e^{-ik_1L} & e^{ik_1L} & e^{-ik_3L} \\ -ik_1e^{-ik_1L} & ik_1e^{ik_1L} & -ik_3e^{-ik_3L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = [H(\omega)]\{A \ B \ C \ D\}^T \quad (19)$$

마지막으로 식 (18)과 (19)를 결합하여 절점에서의 힘과 변위와의 관계는 다음과 같은 행렬식으로 표현될 수 있다.

$$\{F_0 \ T_0 \ F_L \ T_L\}^T = [S_T]\{w_0 \ w_0' \ w_L \ w_L'\}^T \quad (20)$$

식 (20)의 행렬 $[S_T]$ 가 유도하고자 하는 티모센코 보의 스펙트럴요소 행렬이다.

2.3 스펙트럴요소의 결합

스펙트럴요소의 결합은 기존의 유한요소법에서 유한요소를 결합하는 방법과 동일하게 이루어진다. Fig. 3과 같이 두개의 스펙트럴요소로 구성된 보의 경우 두개의 스펙트럴요소의 결합은 다음과 같은 방식에 의해 이루어진다.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & s_{33}+S_{11}^2 & S_{34}+S_{12}^2 & S_{13}^2 & S_{14}^2 \\ S_{41} & S_{42} & S_{43}+S_{21}^2 & S_{44}+S_{22}^2 & S_{23}^2 & S_{24}^2 \\ 0 & 0 & S_{31}^2 & S_{32}^2 & S_{33}^2 & S_{34}^2 \\ 0 & 0 & S_{41}^2 & S_{42}^2 & S_{43}^2 & S_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1' \\ v_2 \\ v_2' \\ v_3 \\ v_3' \end{Bmatrix} = [S]_g \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1' \\ v_2 \\ v_2' \\ v_3 \\ v_3' \end{Bmatrix} \quad (21)$$

윗 식에서 $[S]_g$ 는 보 전체에 대한 스펙트럴 행렬을 나타낸다. 이 행렬에서 윗첨자 1과 2는 각각 첫번째 스펙트럴요소와 두번째 스펙트럴요소를 나타내며 아래 첨자는 해당 스펙트럴요소 행렬의 요소를 나타낸다. 식 (21)에 외팔보에 대한 경계조건을 적

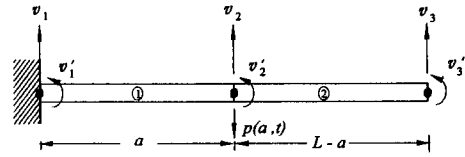


Fig. 3 Cantilevered Bernoulli-Euler beam subjected to a concentrated load at the middle point

용하면 다음과 같이 축약된 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} S_{33}+S_{11}^2 & S_{34}+S_{12}^2 & S_{13}^2 & S_{14}^2 \\ S_{43}+S_{21}^2 & S_{44}+S_{22}^2 & S_{23}^2 & S_{24}^2 \\ S_{31}^2 & S_{32}^2 & S_{33}^2 & S_{34}^2 \\ S_{41}^2 & S_{42}^2 & S_{43}^2 & S_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2' \\ v_2 \\ v_3 \\ v_3' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P(a, \omega) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

식 (22)를 풀어 임의의 주파수에서 각 절점에서의 변위값을 알 수 있으며 이를 식 (19)에 대입하여 미지수 A, B, C, D를 구한 후 이 값들을 식 (16)에 대입하면 최종적으로 보의 임의의 위치 x점에서의 변위를 계산할 수 있다.

3. 동적분포하중을 받는 구조물의 스펙트럴요소해석

여기에서는 동적분포하중을 받는 구조물의 동적 응답을 구하기 위한 스펙트럴요소 해석기법을 선형계에서 적용할 수 있는 중첩원리에 근거하여 소개하였다. Fig. 4(a)는 일반적인 형태의 동적분포하중을 받고 있는 구조물의 한 예를 도시한 것이다.

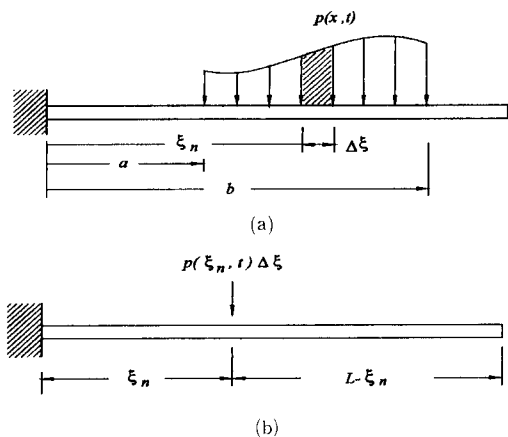


Fig. 4 Schematic diagram for the linear superposition representation of a dynamic distributed load $p(x, t)$

만일 집중하중이 시간 $t=0$ 의 순간에 $x=\xi$ 의 위치에 작용했을 때 임의의 위치 $x=\alpha$ 에서의 단위충격 응답(unit impulse response)을 $r(\alpha; \xi, t)$ 라 하면 $t=\tau$ 의 순간에 작용한 집중하중에 대한 단위 충격응답은 $r(\alpha; \xi, t-\tau)$ 가 된다. 그런데 Fig. 4(a)와 같이 동적분포하중 $p(x, t)$ 가 작용하고 있을 때 임의의 시간 $t=\tau$ 와 위치 $x=\xi$ 에서 $\Delta\xi$ 의 좁은 구간에 걸쳐 작용하고 있는 하중은 크기가 $p(\xi, \tau)\Delta\xi$ 인 집중하중으로 생각할 수 있다. 따라서 이 집중하중에 의한 동적응답은

$$r(\alpha; \xi, t-\tau)p(\xi, \tau)\Delta\xi \quad (23)$$

가 된다. 이 집중하중 $p(\xi, \tau)\Delta\xi$ 가 $0 \leq \tau \leq t$ 동안 작용했을때의 동적응답은 다음과 같이 해당시간 동안에 대한 적분값으로 표현될 수 있다.

$$\Delta w(\alpha; \xi, t) = \int_0^t r(\alpha; \xi, t-\tau)p(\xi, \tau)\Delta\xi d\tau \quad (24)$$

스펙트럴요소법⁽⁸⁾으로 식 (24)의 계산을 수행하기 위해서는 다음의 과정을 거쳐야 한다. 2장에서 소개한 바와 같이 스펙트럴요소법에서는 먼저 모든 함수가 주파수 영역에서 계산되기 때문에 식 (24)의 대합적분(convolution integral)형태가 다음과 같은 주파수 영역에서의 단위 충격응답 $R(\alpha, \xi, \omega)$ 과 동적집중하중 $P(\xi, \omega)\Delta\xi$ 의 곱으로 표현되어야 한다. 따라서 구하고자 하는 동적응답 $\Delta W(\alpha; \xi, \omega)$ 도 역시 주파수 영역에서 계산되게 된다.

$$\Delta W(\alpha; \xi, \omega) = R(\alpha, \xi, \omega)P(\xi, \omega)\Delta\xi \quad (25)$$

식 (25)에서 $P(\xi, \omega)\Delta\xi$ 를 구하기 위해서는 동적 집중하중 $p(\xi, t)\Delta\xi$ 에 대한 고속 푸리에변환을 하여야 한다. 동적집중하중 $p(\xi, t)\Delta\xi$ 에 대한 푸리에변환은 다음과 같이 수행된다. 먼저 동적집중하중 $p(\xi, t)\Delta\xi$ 를 Fig. 5와 같이 데이터 갯수 N 개의 값으로 이산화(discretization)하여 푸리에 변환을 거치게 되면 이 동적분포하중은 다음과 같이 주파수 영역으로 변환할 수 있다.

$$P(\xi, \omega_k)\Delta\xi = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} p(\xi, t_n)\Delta\xi e^{-i2\pi k n} \quad (26)$$

여기서, $t_n = \frac{T}{N} \times n = \Delta t \times n$, $\omega_k = \frac{1}{T} \times k$ 이며, T 는 푸리에 변환되는 데이터의 시간길이(time period)를 의미한다. 만일 식 (26)에서 표현된 주

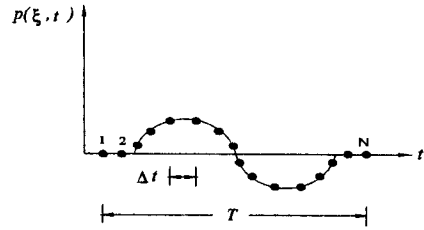


Fig. 5 Discretization of time history of dynamic concentrated load $p(\xi, t)$

파수 영역에서의 동적집중하중을 다시 시간영역의 값으로 변환시키려면 다음과 같은 역 푸리에변환을 이용하면 된다.

$$p(\xi, t_n)\Delta\xi = \sum_{k=0}^{N-1} P(\xi, \omega_k)\Delta\xi e^{i2\pi k n} \quad (27)$$

식 (27)에서 $p(\xi, t_n)\Delta\xi$ 는 시간 $t=t_n$ 에서의 값을 나타낸다. 식 (26)와 (27)에 대한 실제의 계산은 각각 FFT와 IFFT를 통해 수행함으로써 충분한 데이터를 신속하고 정확하게 처리할 수 있다.

다음으로 주어진 구조물에 대해 스펙트럴요소 해석과정에 따라 2-3장에서처럼 스펙트럴요소의 조합 과정을 거쳐 경계조건을 적용하면 전체 시스템에 대한 축약된 스펙트럴요소행렬 $[S(\omega)]$ 를 각 절점에서의 동적응답 $\{v(\omega)\}$ 와 각 절점에 작용하는 외력 $\{F(\omega)\}$ 와의 관계식을 통해 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\{v(\omega)\} = [S(\omega)]^{-1}\{F(\omega)\} \quad (28)$$

여기서, $[S(\omega)]^{-1}$ 는 식 (25)의 단위 충격응답 $R(\alpha, \xi, \omega)$ 에 해당되고 $\{F(\omega)\}$ 는 푸리에변환된 절점에서의 외력벡터를 의미하며, 역시 식 (25)의 동적집중하중 $P(\xi, \omega)\Delta\xi$ 에 해당된다. 따라서 절점에서의 동적응답 $\{v(\omega)\}$ 를 구하기 위해서는 식 (28)과 같은 행렬식을 계산함으로써 구할 수 있다. 그런데 식 (28)에서 주어지는 응답은 절점에서의 응답을 의미한다. 임의의 위치 $x=\alpha$ 에서의 주파수 응답 $\Delta W(\alpha; \xi, \omega)$ 는 식 (16)과 식 (19)를 결합하여 절점에서의 주파수 응답 $\{v(\omega)\}$ 의 함수로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Delta W(\alpha; \xi, \omega) = \{Q(\omega)\}[H(\omega)]^{-1}\{v(\omega)\} \quad (29)$$

윗식에 식 (28)을 대입하면 임의의 위치 $x=\alpha$ 에서의 주파수 응답을 다음과 같이 절점에서의 외력벡

터의 함수로 구할 수 있다.

$$\Delta W(\alpha; \xi, \omega) = \{Q(\omega)\}[H(\omega)]^{-1} \times [S(\omega)]^{-1}\{F(\omega)\} \quad (30)$$

식 (30)으로 주어지는 임의의 위치 $x = \alpha$ 에서의 주파수 응답 $\Delta W(\alpha; \xi, \omega)$ 는 다음과 같이 역 푸리에 변환을 통하여 식 (24)의 좌변항에 해당하는 시간영역에서의 동적응답 $\Delta w(\alpha; \xi, t)$ 으로 변환시킬 수 있다.

$$\Delta w(\alpha; \xi, t_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta W(\alpha; \xi, \omega) e^{i2\pi k t_n / N} \quad (31)$$

식 (31)에서 $\Delta w(\alpha; \xi, t_n)$ 은 시간 $t = t_n$ 에서의 동적응답을 나타낸다. 지금까지는 $x = \xi$ 의 위치에 작용하는 집중하중에 대한 동적응답을 구하는 과정을

보였다. 그러나 Fig. 4(a)와 같이 구간 $a \leq \xi \leq b$ 에 동적 분포하중이 작용하고 있을때 이에 대한 동적응답은 식 (31)을 분포하중의 구간에 걸쳐 적분을 취함으로써 구할 수 있다. 즉,

$$w(\alpha, t) = \int_a^b \Delta w(\alpha; \xi, t) d\xi \quad (32)$$

식 (32)의 적분은 Trapezoidal 수치적분법⁽⁹⁾을 이용하여 계산할 수 있으며 식 (33)은 식 (32)의 수치적분 형태를 나타낸다.

$$w(\alpha, t) = \frac{1}{2} \Delta \xi [\Delta w(\alpha, a, t) + 2\Delta w(\alpha, a + \Delta \xi, t) + \Delta \xi, t) + 2\Delta w(\alpha, a + 2\Delta \xi, t) \dots + \Delta w(\alpha, a + n\Delta \xi, t)] \quad (33)$$

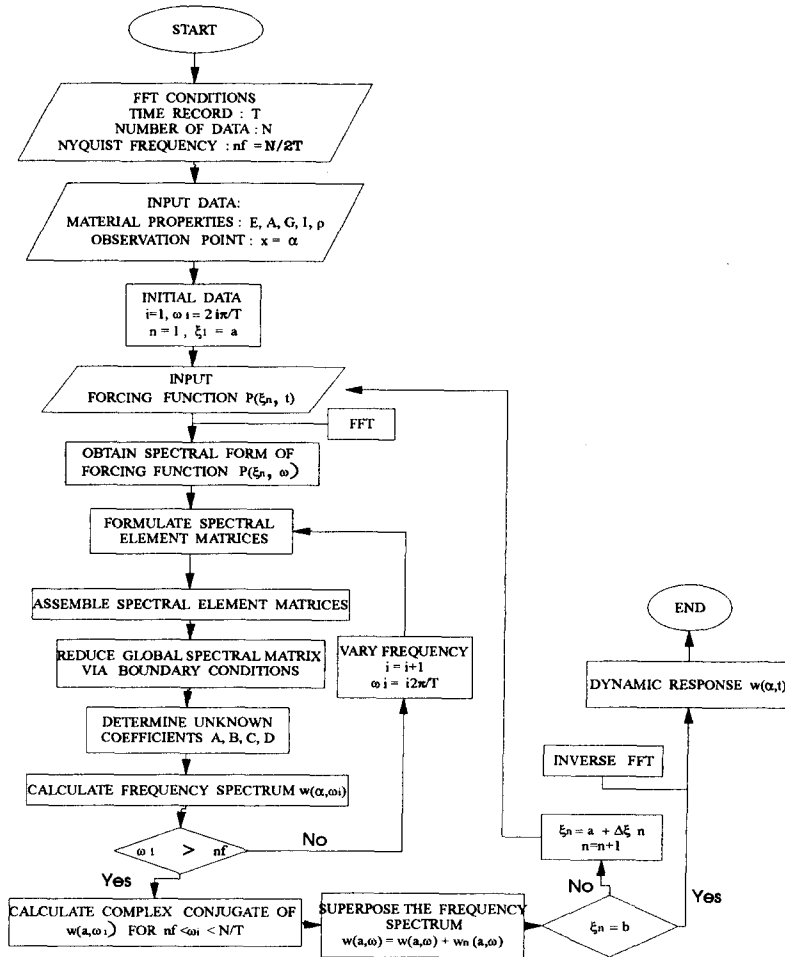


Fig. 6 Flow chart for the spectral element analysis developed for a structure subjected to the dynamic distributed load

식 (33) 과 같은 수치적분을 수행하기 위해서는 반드시 스펙트럴요소법을 이용하여야 한다. 왜냐하면 Fig. 1 에서처럼 끝단에 집중하중을 받을 경우 스펙트럴해석법으로도 모든 경계조건과 힘 평형조건을 표현할 수 있다. 그러나 집중하중이 구조물의 중간에 작용할 경우 모든 경계조건과 힘 평형조건을 만족시키기 위하여 Fig. 3에서처럼 두개의 스펙트럴요소의 결합이 필요하다. 그런데 분포하중 $p(x, t)$ 는 집중하중 $p(\xi, t)\Delta\xi$ 의 중첩된 형태로 볼 수 있다. 따라서 분포하중에 의한 총 응답 $w(\alpha, t)$ 는 집중하중에 의한 응답 $\Delta w(\alpha; \xi, t)$ 를 Fig. 4(b)와 같이 2개의 스펙트럴요소의 길이를 바꾸면서 구할 수 있다. Fig. 6은 본 연구에서 다루고 있는 분포하중을 받는 구조물을 스펙트럴요소법으로 해석하는 과정을 보여주는 전산과정 흐름도이다.

4. 수치해석 결과 및 토의

이 장에서는 본 연구에서 개발된 스펙트럴요소법의 타당성을 검증하기 위하여 분포하중을 받는 구조물의 이론해를 스펙트럴요소법으로부터 구한 결과 및 기존의 유한요소법으로부터 구한 결과와 비교하였다. Fig. 7과 같이 동적분포하중을 받는 양단 단순지지된 보의 이론해는 다음과 같이 주어진다.⁽¹⁰⁾

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x) \quad (34)$$

여기서,

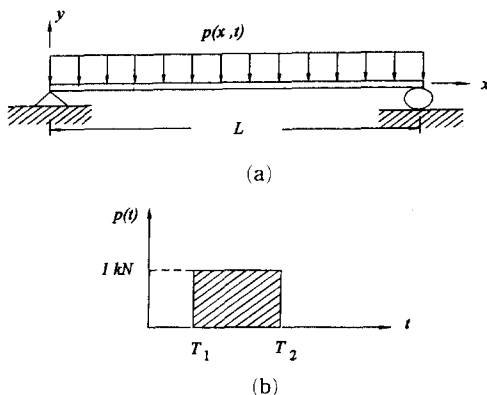


Fig. 7 Simply-supported beam under dynamic distributed load (a) and its time histroy (b)

$$q_n(t) = \frac{1}{\omega_n^2} \frac{P_0}{M_0} \int_0^t \phi_n(x) dx [(1 - \cos(\omega_n(t - T_1))) u(t - T_1) - (1 - \cos(\omega_n(t - T_2))) u(t - T_2)]$$

$$\omega_n = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{E^* I}{M_0 l^3}}$$

$$T_1 = 0.093 \text{ sec,}$$

$$T_2 = 0.93 \text{ sec}$$

위 식들에서 $\phi_n(x)$ 는 단순지지보의 정규모드이고, $u(t)$ 는 단위 계단함수(unit step function)을 나타내며, P_0 와 M_0 는 각각 외력의 크기와 베르누이-오일러 보의 질량을 나타낸다. Fig. 8은 식 (34)로부터 구한 이론해와 스펙트럴요소법과 유한요소법으로부터 구한 결과의 비교이다. 이때 스펙트럴요소법에 사용된 알고리즘은 두개의 스펙트럴요소를 이용하여 다루도록 한 중첩기법을 응용한 Fig. 6의 스펙트럴요소해석 알고리즘을 사용하였으며 유한요소법으로부터 구한 결과는 Transient해석에 주로 사용되는 Newmark방법으로 구한 결과이다. Fig. 8에서 보는 것처럼 스펙트럴요소법으로 구한 결과는 엄밀해와 거의 일치하는 것을 볼 수 있으나 유한요소법으로 구한 결과는 충분히 수렴한 경우의 결과라 하여도 이론해에 비교하여 비교적 큰 차이가 있음을 알 수 있다. 또한 Table 3은 스펙트럴요소법의 경우 역 푸리에변환에 필요한 데이터 갯수(N)과 시간길이(T)를 변화시켜가면서 구한 결과와, 유한요소법의 경우 유한요소의 수를 변화시켜 가면서 구한 결과를 이론적으로 구한 엄밀해와 비교한 것이다. 스펙트럴요소법의 경우에는 역 푸리에변환에 요구되는 데이터 갯수(N)과 시간길이(T)를 조금만 조절하여도 손쉽게 엄밀해에 수렴해

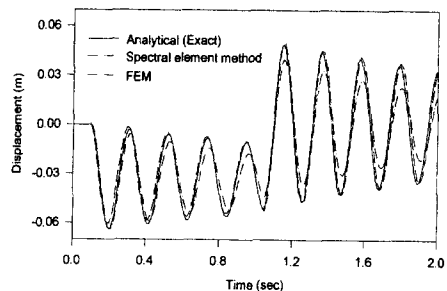


Fig. 8 Comparison of the dynamic response by analytical method, spectral element method and finite element method

Table 3 Comparison of the dynamic deflections(cm) of a simply-supported beam by analytical method (exact), spectral element method and finite element method

Method Time(sec)	Analytical method (Exact)	Spectral element method			Finite element method		
		N=512 T=16	N=1024 T=32	N=2048 T=32	2 Elements	10 Elements	100 Elements
0.1	-0.040	-0.041	-0.040	-0.040	-0.063	-0.054	-0.050
0.2	-6.365	-6.351	-6.362	-6.362	-3.445	-5.726	-6.542
0.3	-3.408	-3.425	-3.425	-3.404	-2.572	-4.565	-4.022
0.4	-5.875	-5.825	-5.842	-5.864	-3.582	-5.234	-5.523
0.5	-1.011	-1.014	-1.011	-1.012	-0.658	-0.853	-0.985
0.6	-5.076	-5.093	-5.075	-5.075	-3.548	-4.651	-4.754
0.7	-1.888	-1.873	-1.884	-1.886	-1.025	-1.754	-1.782
0.8	-4.153	-4.163	-4.151	-4.152	-2.456	-3.653	-3.842
0.9	-2.821	-2.825	-2.815	-2.821	-1.821	-2.648	-2.742
1.0	-3.250	-3.243	-3.252	-3.251	-2.158	-2.982	-3.125

가는 것을 볼 수 있지만 유한요소법의 경우에는 유한요소의 개수를 상당히 증가시켜야 결과치가 일정한 값에 수렴하는 것을 알 수 있다. 그러나 이 수렴치도 스펙트럴요소법에서와는 달리 엄밀해와 비교하여 볼때 여전히 오차가 얼마간 존재함을 알 수 있다. 이상의 결과로서 본 연구에서 개발된 스펙트럴요소법이 동적분포하중을 받는 구조물의 동적반응을 정확히 예측하는데 있어서 충분한 신뢰성을 갖고 적용될 수 있음을 확인할 수 있다.

본 연구에서 개발한 스펙트럴요소법을 Fig. 9(a)

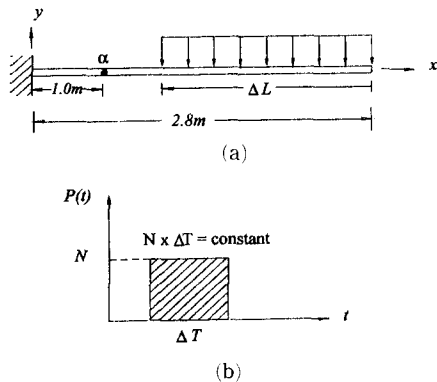


Fig. 9 Schematic of a Timoschenko beam under the dynamic distributed load (a) and the time history of the load (b)

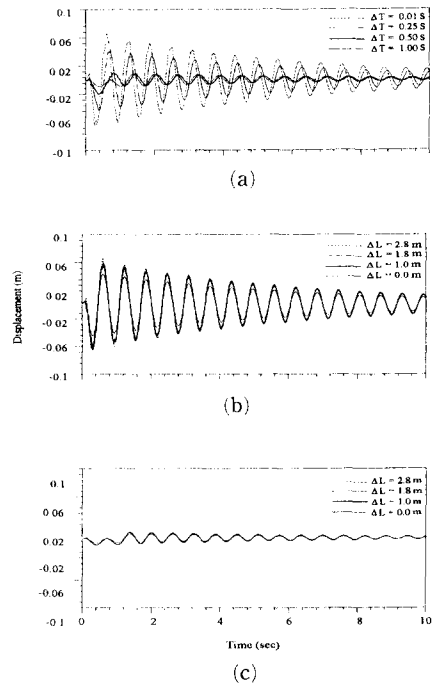


Fig. 10 Time responses at point $x=a$ with (a) the concentrated load at $\Delta L=0$, (b) the impulse load with time duration $\Delta T=0.01$ second and (c) the impulse load with duration $\Delta T=1$ second

에 나타난 티모센코보에 응용해 보았다. 보의 특정점 α 에서의 응답이 가진조건에 따라 어떻게 변화하는지를 고찰해 보았다. Fig. 9(b)는 동적분포하중의 형태를 시간상에서 도시한 것이다. 특정점 α 에서의 모든 응답은 가진력을 시간축상에서 일정하게 고정하여 얻은 결과들이다. Fig. 10(a)의 결과처럼 분포하중의 지속시간 ΔT 가 짧을수록 다른 조건에 비해 응답의 크기가 상당히 커짐을 알 수 있다. 분포하중이 가해지는 시간, 예를 들어 $\Delta T = 1$ 초 일 경우 점 α 에서의 변위의 부호는 Fig. 10(c)에서처럼 음의 값을 갖게 된다. 이것은 $x=L$ 에서 양의 하중이 작용할 경우 아래방향의 처짐이 발생하기 때문이다. 반면 분포하중이거나 집중하중이건 응답의 크기는 물론 변하지만 시간축상의 하중의 형태가 일정하다면 응답의 주기성은 변하지 않는다. 이상의 결과로 구조물의 응답은 공간적인 하중의 형태보다는 시간축상의 하중의 형태에 보다 민감함을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 동적분포하중을 받는 구조물의 동적거동을 스펙트럴해석법으로 예측하기 위한 해석기법을 개발하였다. 개발된 스펙트럴해석기법의 타당성을 검토하기 위하여 동적분포하중을 받는 단순지지보를 예로 택하여 고찰하였다. 동적분포하중을 받는 단순지지보의 엄밀해를 이론적으로 먼저 구한 후 이 결과를 본 연구에서 개발한 스펙트럴해석기법을 적용하여 구한 결과 및 기존의 유한요소법을 적용하여 구한 결과 등과 종합 비교·검토하였다. 이 결과 본 연구에서 개발한 스펙트럴해석기법의 엄밀성과 신뢰성을 확인할 수 있었다.

후 기

본 연구는 1995년도 교육부 학술연구 조성비(기제공학 : ME 95-D-14)에 의하여 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Doyle, J. F., 1989, *Wave Propagation in Structure FFT-Based Spectral Analysis Methodology*, Springer-Verlag, Inc., New York, pp. 7~156.
- (2) Achenbach, J. D., 1989, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland Publishing Company, New York, pp. 33~35.
- (3) Gopalakrishnan, S. and Doyle, J. F., 1992, "A Matrix Methodology for Spectral Analysis of Wave Propagation in Multiple Connected Timoshenko Beams," *Journal of Sound and Vibration* 158(1), pp. 11~24.
- (4) Gopalakrishnan, S. and Doyle, J. F., 1994, "Wave Propagation in Connected Waveguides of Varying Cross-Section," *Journal of Sound and Vibration* 175(3), pp. 347~363.
- (5) Rizzy, S. A. and Doyle, J. F., 1992, "A Spectral Element Approach to Wave Motion in Layered Solids," *Journal of Vibrations and Acoustics* 114, pp. 569~577.
- (6) Graff, K. F., 1973, *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover Publication, Inc., New York, pp. 9~13.
- (7) Soedel, W., 1993, *Vibrations of Shells and Plate*, 2nd edition, Marcel Dekker, Inc., New York, pp. 78~82.
- (8) Doyle, J. F., 1988, "Spectrally Formulated Finite Element for Longitudinal Wave Propagation," *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis* 3(1), pp. 1~5.
- (9) Chapra, S. C. and Canale, R. P., 1989, *Numerical Methods for Engineers*, McGraw-Hill, Inc., New-York, pp. 478~489.
- (10) Thomson, W. T., 1993, *Theory of Vibration with Applications*, Prentice-Hall, New Jersey, pp. 345~350.