

〈논 문〉

## 축대칭 중공실린더의 길이방향 온도분포하의 열탄성응력 해석에 관한 연구

이상진\* · 조 진\*

(1996년 2월 10일 접수)

### A Study on the Thermal Stress Analysis of Axi-Symmetric Hollow Cylinder

Sang Jin Lee and Jin Cho

**Key Words:** Finite Element Method(유한요소법), Galerkin Vector(갈러킨 벡터), Strain Modified Bessel Function(수정 베셀 함수)

#### Abstract

Previous works about the cylindrical shape elastic body which is under longitudinal temperature distribution mostly show the results of free expansion, therefore exact thermo-elastic analysis is needed. The object of this work is to analyze the thermo-elastic problem of the hollow cylinder when the cylinder is under longitudinal temperature distribution. In this paper, the analytical solution is found by using Galerkin vector, and it is compared by the results of FEM. For displacements of cylinder, analytical values are almost same as the results of FEM, but free expansion is not fit for analytical solution and the results of FEM. Stresses from analytical solution and the results of FEM show good agreement also, but the results are different near the end boundary, since St. Venant principle is applied.

#### 기 호 설 명

$l$  : 실린더의 길이(전체 길이의 1/2)  
 $a$  : 실린더 내경  
 $b$  : 실린더 외경  
 $\alpha_E$  : 실린더의 선팽창계수  
 $\nu$  : Poisson 비  
 $E$  : 탄성계수(Young's modulus)  
 $G$  : 횡탄성계수(Shear modulus)  
 $V$  : Galerkin 벡터  
 $r, \theta, z$  : 실린더의 반경, 원주, 법선방향좌표  
 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$  :  $r, \theta, z$  방향 법선응력  
 $\tau_{rz}$  : 전단응력

$\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z$  :  $r, \theta, z$  방향 법선변형도  
 $\gamma_{rz}$  : 전단변형도  
 $u, w$  :  $r, z$  방향변위  
 $kn$  :  $\frac{n \cdot \pi}{l}$   
 $l$  :  $kn \cdot r$   
 $a^*$  :  $kn \cdot a$   
 $b^*$  :  $kn \cdot b$   
 $I_p$  : 제1종  $p$ 차의 수정베셀함수  
 $H_p$  : 제2종  $p$ 차의 수정베셀함수

#### 1. 서 론

열탄성학은 탄성체로 간주되는 고체의 변형과 응

\*아주대학교 대학원 기계공학과  
\*\*회원, 아주대학교 기계공학과

력에 대한 열(heat)의 효과를 다루는 응용역학의 한 분야이다.

이는 물체의 변형과 응력이 힘뿐만 아니라 온도 분포에 의해 나타나는 과정에 대한 탄성학의 일반 이론을 확장한 것이다.

불균일한 가열(heating)은 물체내의 응력발생의 한 원인이 되며, 온도가 상승하면 물체가 팽창한다. 이 팽창은 일반적으로 연속체에서 자유롭게 진행된다. 이는 아니며, 가열에 의한 응력이 나타난다.<sup>(1,2)</sup>

열변형의 일반적인 예와 그 응용으로는 열에 의한 자유 확장에 불충분한 좁은 간극에 의해 발생하는 레일의 좌굴현상 연구, 내연기관의 엔진블럭 내경에 상응하는 적절한 피스톤지름 결정, 열간압연하의 압연하중에 의한 작업 롤의 변형해석 등이 있다. 그러므로 그 해석은 터빈, 제트엔진, 원자로 등 많은 기계설계 분야에 있어서 중요시되며, 온도 변동에 의해 일어나는 피로파괴현상 해석에도 응용할 수 있다.

본 연구에서는 중공(中空)실린더가 길이방향 온도분포하에 있을 경우의 열탄성응력과 변형의 해석을 수행하였다. 지금까지의 연구결과에 의하면 Gary T. Pallone<sup>(3)</sup>은 중실실린더의 길이방향에 따른 비정상 온도분포를 구하여 평면변형도 상태에서 실린더 직경의 팽창량을 계산하였고, Willmotte와 Mignon<sup>(4)</sup>은 축대칭 Finite Difference Method(F.D.M.)로 직경팽창량을 계산하였다. Parks, Baker<sup>(5)</sup>는 역시 F.D.M.을 사용하여 비정상 온도분포의 경우를 2차원적으로 모델화하였으며, Poplawski, Seccombe<sup>(6)</sup>는 이를 3차원으로 확장하여 해석하였다. 반면 Zienkiewicz, Onate, Heinrich<sup>(7)</sup> 등은 유한요소법(FEM)을 이용하여 온도분포를 구하였고, Pietrzyk, Lenard<sup>(8)</sup>는 이를 실험을 통하여 해석하고 유한요소 결과와 비교하였다. 그리고, Kardomateas<sup>(9,10)</sup>는 온도분포가 시간의 함수인 경우의 복합재 관을 해석하였고, Padovan<sup>(11)</sup>은 비등방성 복합재료인 경우의 온도분포를 구하였다. 그러나 이상의 해석들은 단순히 구해진 온도분포에 따른 물체의 자유팽창에 의한 결과만을 나타내고 있다. 이러한 자유팽창에 의한 결과는 온도분포가 일정하거나 선형인 경우에만 유효하며 이 경우 응력은 발생하지 않는다. 따라서 구해진 온도분포에 의한 정확한 열-탄성 해석에 의하여 응력 및 변형을 결정할 필요가 있다.

열간압연하에서 사용되는 작업 롤의 경우, 롤의

온도분포는 길이방향의 함수로 나타나며, 중실실린더에 대한 연구<sup>(12)</sup>에서 얻어진 결론과 같이, 판재의 폭방향의 불균일성에 영향을 미치는 인자해석 특히 작업 롤과 backup roll의 열변형해석 등에 대한 응용이 본 연구에 의하여 가능할 것이며, 또한 롤의 형상을 본 연구에서와 같이 중공실린더 형태로 함으로써 롤의 무게를 경감시키고 생산성을 향상시킬 수 있는 방안을 모색할 수 있을 것이다.

## 2. 이론적 해석

### 2.1 개요

먼저, 기하학적으로 실린더는 축대칭이므로 원통 좌표계를 사용하여 좌표계를 설정한다. 실린더에는 체적력과 표면력은 작용하지 않으며, 단지 z 축방향의 온도( $T(z)$ )에 의한 열하중만 존재한다.

결국 온도분포가 r 축에 대해 대칭으로 나타나는 경우, 주어진 중공실린더의 온도분포는 정상상태에서 Fourier cosine series로 전개되며, 실린더 형태의 대칭성에 의해 본 연구에서 문제를 해석할 때는 실린더의 1/4 부분만을 해석한다. (Fig. 1)

본 연구에서는 먼저 해석적인 방법으로, Fourier cosine series로 전개되는 온도분포에 따른 실린더의 3차원 열-탄성 응력문제를 해석한다. 이와 같이 구해진 온도분포하에서의 변형과 응력을 해석적 방법과 유한요소법을 사용하여 구한 후 비교, 고찰한다.

해석하고자 하는 실린더는 Fig 1의 형상이며, 여기서, 실린더의 온도분포식  $T = T(z)$ 를 Fourier series로 변환하면 다음과 같다.

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n \cdot \cos(kn \cdot z) \\ = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot \cos(kn \cdot z)$$

여기서,  $kn = \frac{n \cdot \pi}{l}$

$$T_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l T dz$$

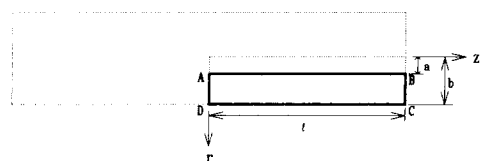


Fig. 1 Dimension of the cylinder

$$T_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l T \cos\left(\frac{n\pi}{l} \cdot z\right) dz$$

## 2.2 변위-응력식 유도

축대칭 문제의 경우,  $\theta$  방향에 대한 변위  $v$ 는 대칭성에 의하여 없게 되고,  $r$  방향과  $z$  방향의 변위 성분  $u$ ,  $w$ 는 각각  $\theta$ 에 대해 독립적이 된다. 여기서 열-탄성응력 문제의 변위에 의한 평형방정식, 즉 Navier's 식<sup>(13,14)</sup>은 아래와 같다.

$$(\lambda + G)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) + G\nabla^2 \mathbf{U} = \alpha_E(3\lambda + 2G)\nabla T \quad (1)$$

(여기서,  $\mathbf{U} = u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta + w\mathbf{e}_z$ )

위의 평형방정식 (1)을 풀기 위해  $2GU = 2(1-\nu)\nabla^2 \mathbf{V} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V})$ <sup>(15)</sup>로 정의되는 Galerkin 벡터  $\mathbf{V} = V_r\mathbf{e}_r + V_\theta\mathbf{e}_\theta + V_z\mathbf{e}_z$ 를 도입하여 정리하면,

$$\nabla^4 \mathbf{V} = \beta \nabla^2 \mathbf{T}$$

$$\left( \beta = \frac{\alpha_E E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \right) \quad (2)$$

의 형태가 된다.

여기서, 실린더의 온도분포가  $z$  방향만의 함수이므로, Love's strain function<sup>(13)</sup>  $V$ 에 의하여 식 (2)는 축대칭 문제에 대하여 다음과 같이 된다.

$$\nabla^4 V = \beta \frac{dT}{dz} \quad (3)$$

식 (3)의 해를 아래와 같이 가정한다.<sup>(1)</sup>

$$V = V_n(r) \sin(kn \cdot z) \quad (4)$$

여기서, 식 (4)의 변수  $r$ 를  $t = kn \cdot r = \frac{n\pi}{l} r$ 로 치환하여 식 (3)에 대입하고 정리하면,

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d}{dt} - 1 \right) \left( \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d}{dt} - 1 \right) V_n(t)$$

$$= -\beta \frac{T_n}{kn^3} \quad (5)$$

이 된다.

그리고, 식 (5)의 해는,

$$V_n(t) = C_1 I_0(t) + C_2 t I_1(t) + C_3 H_0(t) + C_4 t H_1(t)$$

$$- \beta \frac{T_n}{kn^3} \quad (6)$$

와 같이 얻어진다.

그러므로, 식 (3)의 해는 아래와 같이 구해진다.

$$V = (C_1 I_0 + C_2 t I_1 + C_3 H_0 + C_4 t H_1 - \beta \frac{T_n}{kn^3}) \sin(kn \cdot z) \quad (7)$$

그리고 축대칭 문제의 경우 Love's strain function에 의해 얻어진 변위의 식은 다음과 같다.

$$2Gu = -\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial z}$$

$$2Gw = 2(1-\nu)\nabla^2 V - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (8)$$

위의 식 (7)을 식 (8)에 대입하고, 축대칭 문제의 기본 방정식을 이용하여 변위와 응력식을 유도하여 해석해를 얻는다. 최종적으로 구해진 변위-응력식들은 다음과 같다.

$$2Gu = -kn^2(C_1 I_1 + C_2 t I_0 - C_3 H_1 - C_4 t H_0) \cos(kn \cdot z)$$

$$2Gw = kn^2[C_1 I_0 + C_2\{4(1-\nu)I_0 + t I_1\} + C_3 H_0$$

$$- C_4\{4(1-\nu)H_0 - t H_1\}$$

$$+ (1-2\nu)\beta \frac{T_n}{kn^3}] \sin(kn \cdot z) \quad (9)$$

$$\sigma_r = -kn^3[C_1\left(\frac{I_1}{t} - I_0\right) - C_2\{(1-2\nu)I_0 + t I_1\}$$

$$- C_3\left(H_0 + \frac{H_1}{t}\right) + C_4\{(1-2\nu)H_0 - t H_1\}]$$

$$- \frac{\alpha_E E}{1-\nu} \frac{T_n}{kn^3} \cos(kn \cdot z)$$

$$\sigma_\theta = -kn^3[C_1\frac{I_1}{t} + C_2(1-2\nu)I_0 - C_3\frac{H_1}{t}$$

$$- C_4(1-2\nu)H_0 + \frac{\alpha_E E}{1-2\nu} \frac{T_n}{kn^3}] \cos(kn \cdot z)$$

$$\sigma_z = kn^3[C_1 I_0 + C_2\{2(2-\nu)I_0 + t I_1\} + C_3 H_0$$

$$- C_4\{2(2-\nu)H_0 - t H_1\}] \cos(kn \cdot z)$$

$$\tau_{rz} = kn^3[C_1 I_1 + C_2\{t I_0 + 2(1-\nu)I_1\} - C_3 H_1$$

$$+ C_4\{t H_0 - 2(1-\nu)H_1\}] \sin(kn \cdot z) \quad (10)$$

## 2.3 경계조건 및 적분상수 결정

앞에서 구해진 변위와 응력식 (9), (10)에는 적분상수  $C_1, C_2, C_3, C_4$ 가 포함되어 있으므로 이를 설정하기 위해 아래와 같은 경계조건을 사용한다.

- ①  $\sigma_r = \tau_{rz} = 0$  at  $r = a, b$
- ②  $\sigma_z = \tau_{rz} = 0$  at  $z = \pm l$

여기서, 적분상수를 구하기 위해 경계조건 ①을 사용한다. 식 (10)에 경계조건 ①을 대입하여 정리하면 식 (11)과 같다.

$$C_1\left(\frac{I_{1a}}{a^*} - I_{0a}\right) - C_2\{(1-2\nu)I_{0a} + a^* I_{1a}\}$$

$$- C_3\left(H_{0a} + \frac{H_{1a}}{a^*}\right) + C_4\{(1-2\nu)H_{0a} - a^* H_{1a}\}$$

$$= An$$

$$\begin{aligned}
 & C_1\left(\frac{I_{1b}}{b^*} - I_{0b}\right) - C_2\{(1-2\nu)I_{0b} + b^*I_{1b}\} \\
 & - C_3\left(H_{0b} + \frac{H_{1b}}{b^*}\right) + C_4\{(1-2\nu)H_{0b} - b^*H_{1b}\} \\
 & = An \\
 & C_1I_{1a} + C_2\{a^*I_{0a} + 2(1-\nu)I_{1a}\} - C_3H_{1a} \\
 & - C_4\{a^*H_{0a} - 2(1-\nu)H_{1a}\} = 0 \\
 & C_1I_{1b} + C_2\{b^*I_{0b} + 2(1-\nu)I_{1b}\} - C_3H_{1b} \\
 & - C_4\{b^*H_{0b} - 2(1-\nu)H_{1b}\} = 0 \quad (11)
 \end{aligned}$$

(여기서,  $a^* = kn \cdot a$ ,  $b^* = kn \cdot b$ ,  $An = \frac{\alpha_E E}{1-\nu} \frac{Tn}{kn^3}$ )

식 (11)을 살펴보면  $C_1 \sim C_4$ 가 미지수이고, 그 계수들을 포함한 4원 연립방정식의 형태가 된다. (식 (12))

$$\begin{aligned}
 C_1A_1 + C_2A_2 + C_3A_3 + C_4A_4 &= An \\
 C_1A_5 + C_2A_6 + C_3A_7 + C_4A_8 &= An \\
 C_1A_9 + C_2A_{10} + C_3A_{11} + C_4A_{12} &= 0 \\
 C_1A_{13} + C_2A_{14} + C_3A_{15} + C_4A_{16} &= 0 \quad (12)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \left(\frac{I_{1a}}{a^*} - I_{0a}\right), & A_2 &= \{(1-2\nu)I_{0a} + a^*I_{1a}\} \\
 A_3 &= \left(H_{0a} + \frac{H_{1a}}{a^*}\right), & A_4 &= \{(1-2\nu)H_{0a} - a^*H_{1a}\} \\
 A_5 &= \left(\frac{I_{1b}}{b^*} - I_{0b}\right), & A_6 &= \{(1-2\nu)I_{0b} + b^*I_{1b}\} \\
 A_7 &= \left(H_{0b} + \frac{H_{1b}}{b^*}\right), & A_8 &= \{(1-2\nu)H_{0b} - b^*H_{1b}\} \\
 A_9 &= I_{1a}, & A_{10} &= \{a^*I_{0a} + 2(1-\nu)I_{1a}\} \\
 A_{11} &= H_{1a}, & A_{12} &= \{a^*H_{0a} - 2(1-\nu)H_{1a}\} \\
 A_{13} &= I_{1b}, & A_{14} &= \{b^*I_{0b} + 2(1-\nu)I_{1b}\} \\
 A_{15} &= H_{1b}, & A_{16} &= \{b^*H_{0b} - 2(1-\nu)H_{1b}\}
 \end{aligned}$$

그러므로 여기에서는 Cramer's rule을 사용하여 적분상수  $C_1 \sim C_4$ 를 구하였다.

### 2.4 경계조건 만족도 증명

경계조건의 만족도를 증명하기 위해 먼저 경계조건 ①을 살펴보면, 경계조건 ①은 구하여진  $C_1 \sim C_4$ 를 식 (10)에 대입한 결과, 계산식 전개에 의한 증명은 어렵지만 수치해석 결과에서  $\sigma_r$ 과  $\tau_{rz}$ 가 근사적으로 0이 되므로 경계조건의 만족도를 증명할 수 있다.

그리고 경계조건 ②의 경우, 식 (10)에서  $z = \pm l$ 에서의  $\sigma_z$ ,  $\tau_{rz}$ 를 살펴보면,  $\tau_{rz}$ 는 자동적으로 0이 되지만,  $\sigma_z$ 는 0이 아니어서 경계조건을 만족하

지 않는다. 그러나,  $\sigma_z$ 의 합력  $\int_A \sigma_z dA$ 는 0이 되므로, St. Venant<sup>(1,13)</sup> 원리를 만족하며, 이에 의해 실린더의 끝점으로부터 멀리 떨어진 부분에 대해서는  $\sigma_z$ 의 영향을 무시할 수 있다.

### 3. 수치계산 및 유한요소해석

본 연구에서는 식 (9), (10)의 결과를 계산하여 유한요소법에 의한 결과와 비교하여 고찰하였으며, 실린더의 해석 데이터는 아래와 같다.

- $l = 800 \text{ mm}$
- $b = 200 \text{ mm}$  (외경)
- $a = 80 \text{ mm}$  (내경)
- $\alpha_E = 1.15 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$
- $\nu = 0.25$
- $E = 2.1 \times 10^4 \text{ kgf/mm}^2$
- $T_{\max} = 100^\circ\text{C}$

수치해석 결과는 온도분포가  $T(z) = 100 \cos \frac{\pi z}{l}$ 로 주어졌던 경우로 (Fig. 2) 이것은 Fourier series의 여러항 중  $n=0$ 인 경우를 제외한 한 경우로  $n=1$ 인 경우에 해당된다.

또,  $n=0$ 인 경우, 즉 주어진 온도분포에서의 일정한 온도항  $T_0$ 의 영향을 살펴보면,

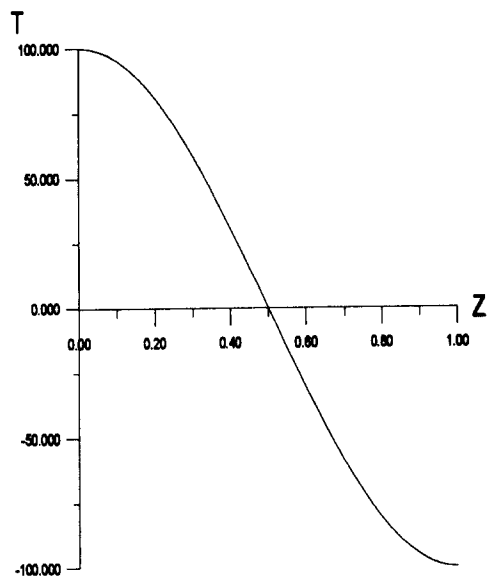


Fig. 2 Cylinder temperature distribution ( $T(z) = 100 \cos \frac{\pi z}{l}$ )

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \epsilon_\theta = \epsilon_z = \alpha_E T_0 \\ \gamma_{rz} &= \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0 \\ u &= \alpha_E T_0 r, \quad w = \alpha_E T_0 z \end{aligned}$$

이고, 이것은 자유팽창의 경우가 된다.

FEM 해의 경계조건은 대칭조건에 따라  $z=0$ 에서 (Fig. 1에서 경계면 AD)  $\omega=0$ 과 나머지 경계면에서는 무부하 경계면으로 하였다.

Fig. 3과 Fig. 4에서는 실린더의 내경( $R=0.4$ )과 외경( $R=1$ )일 경우의 변위  $u$ 를 해석하였다. 여기서 무차원 변수  $R, Z$ 를 도입하여 무차원화한 결과를 도시하였으며,  $(R=\frac{r}{b}, Z=\frac{z}{l})$  변위  $u$ 는 각각  $\frac{u}{a}, \frac{u}{b}$ 로 무차원화하였다. 이 경우 해석치와

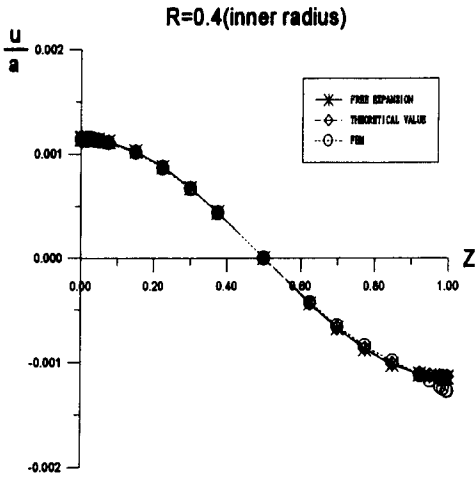


Fig. 3 Distribution of displacement  $u$  at  $R=0.4$

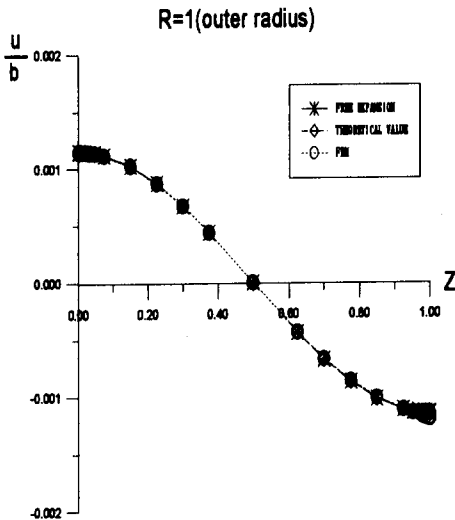


Fig. 4 Distribution of displacement  $u$  at  $R=1$

FEM 결과는 매우 잘 일치한다.

그리고 자유팽창의 경우와도 거의 일치하고 있음을 알 수 있다. Fig. 5, Fig. 6은 역시 실린더의 외경과 내경에서의 변위  $w$ 의 변화를 보여주고 있다. 그래프는 Figs. 3, 4와 마찬가지로 무차원변수  $R, Z$ 를 도입하여 무차원화하여 도시하였으며, 이 결과에 의하면 해석치와 FEM 결과는 잘 일치하고 있으나 앞의 Figs. 3, 4와는 달리 자유팽창 결과와 해석치 또는 FEM 결과와는 잘 맞지 않고 있고, 이것은 예상하는 바와 같이 주어진 온도분포에 의한 해가 자유팽창과는 다르다는 것을 알 수 있다. 그리고, Fig. 8부터 15까지에서 나타난 바와 같이 응력값들의 FEM 결과는  $Z=1$ (Fig. 1에서의 경계면 BC), 즉 실린더의 끝부분에서 해석치와 잘 맞지 않고 있는데, 해석치가 FEM 결과와 일치하는

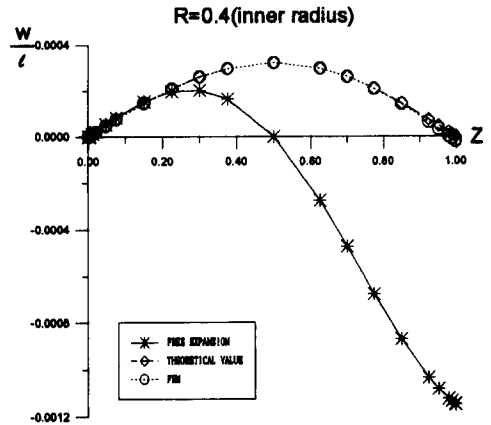


Fig. 5 Distribution of displacement  $w$  at  $R=0.4$

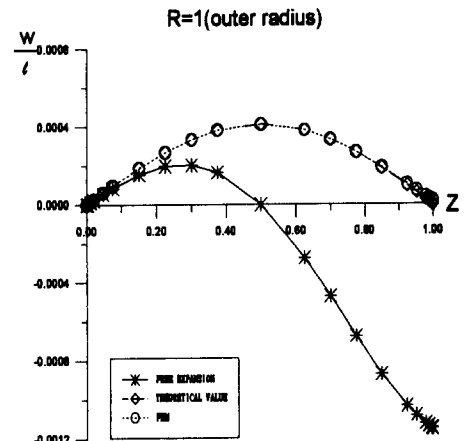


Fig. 6 Distribution of displacement  $w$  at  $R=1$

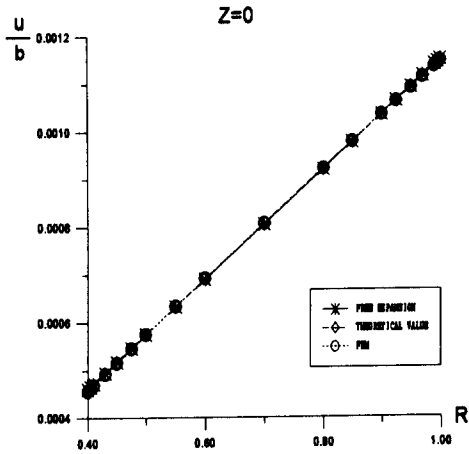


Fig. 7 Distribution of displacement  $u$  at  $Z=0$

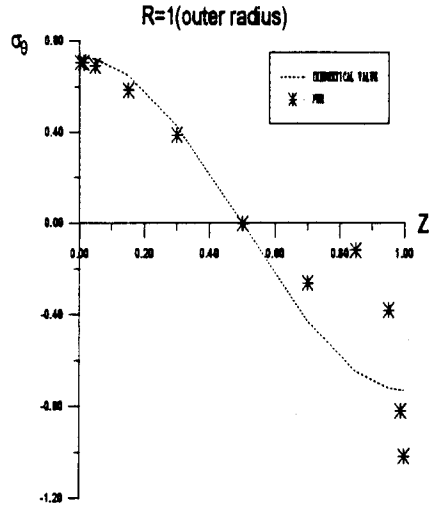


Fig. 10 Distribution of stress  $\sigma_\theta$  at  $R=1$

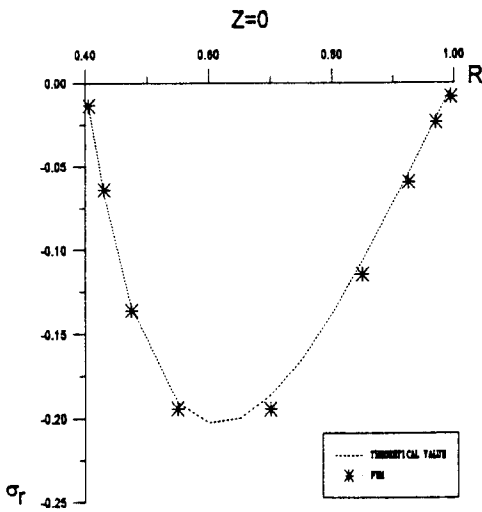


Fig. 8 Distribution of stress  $\sigma_r$  at  $Z=0$

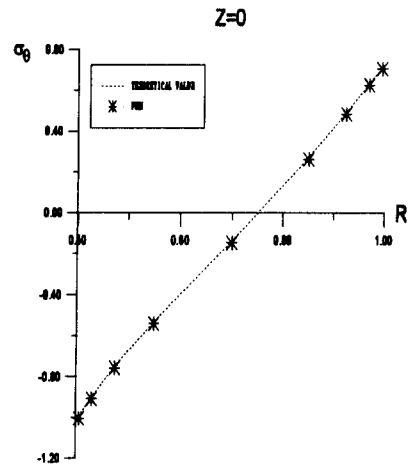


Fig. 11 Distribution of stress  $\sigma_\theta$  at  $Z=0$

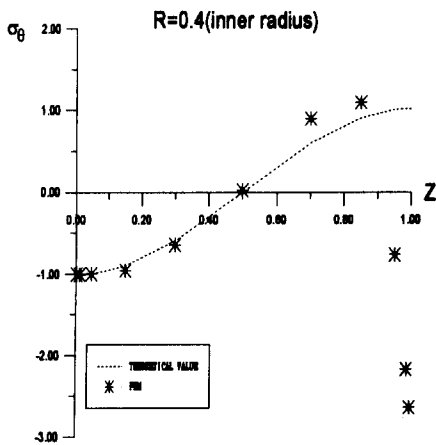


Fig. 9 Distribution of stress  $\sigma_\theta$  at  $R=0.4$

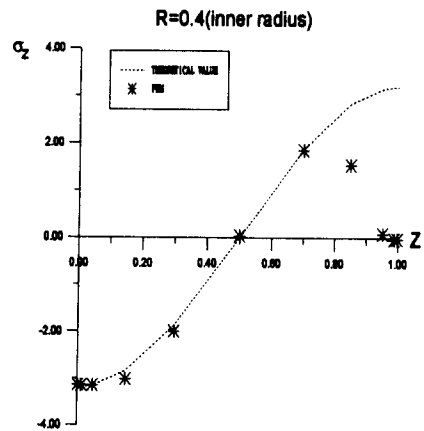


Fig. 12 Distribution of stress  $\sigma_z$  at  $R=0.4$

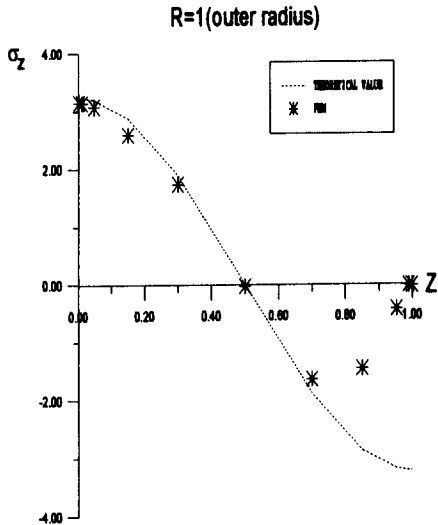


Fig. 13 Distribution of stress  $\sigma_z$  at  $R=1$

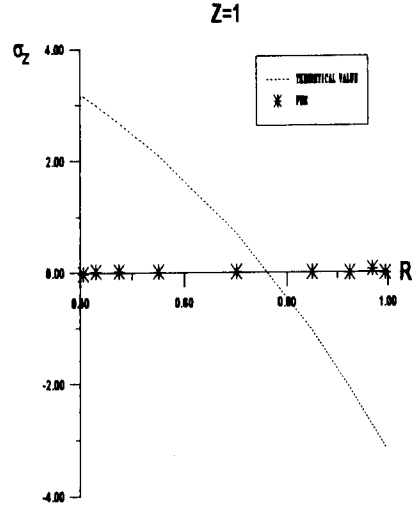


Fig. 15 Distribution of stress  $\sigma_z$  at  $Z=1$

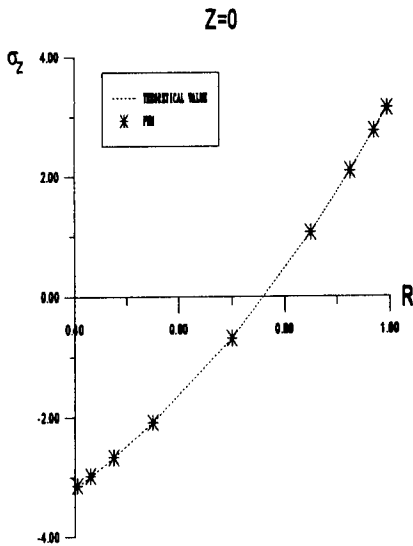


Fig. 14 Distribution of stress  $\sigma_z$  at  $Z=0$

부분은 대략 끝경계에서 외부직경만큼 안쪽으로 떨어진 곳( $Z < 0.75$ )이다. 이는 식 (10)이  $Z=1$ 에서는 정확한 경계조건 대신 St. Venant 원리만을 만족시키기 때문으로 생각된다. 그리고, FEM 결과로서 800 mm 길이의 실린더는 길이방향으로 0.22~0.23 mm 늘어난다. 그리고 반경방향으로는 0.32~0.33 mm 정도 늘어난다. 또한 최대 응력값은 3.312 kgf/mm<sup>2</sup>으로서 이는 충분히 탄성한계치내에 있는 것으로 간주된다.

Fig. 15에서의 결과를 검토해 보면,  $z=1$ (무부하

경계면)에서  $\sigma_z$ 의 FEM 결과는 0이나 해석치의 경우  $\sigma_z$  자체는 0이 아니다. 그러나,  $\sigma_z$ 의 압축 및 인장 영역의 면적의 합이 근사적으로 0이므로 St. Venant 원리를 만족함을 알 수 있다. 그리고,  $\tau_{rz}$ 는 실린더의 경계면(경계면 AB, AD, BC, CD)에서 해석치와 FEM 결과가 모두 0로서 이것은 2.3항의 경계조건 ①, ②와 부합된다.

#### 4. 결론

길이방향의 온도분포가 주어진 실린더 형상의 탄성체에 대한 열응력 해석에 관한 연구결과들은 물체의 자유팽창에 의한 결과들만을 보여주고 있다. 본 논문에서는 중공실린더가 길이방향 온도분포에 있을 경우, 주어진 온도분포에 의한 정확한 열탄성응력 및 변위를 해석하는 것이 연구의 목적이다.

실린더의 형상은 축대칭이며, 온도분포가 길이방향만의 함수로, Fourier cosine series로 전개되는 경우의 해석해를 구하였는데, 이론식 전개에는 Love's strain function을 이용하였으며, 그 결과를 유한요소법에 의한 결과와 비교·고찰하였다.

해석 결과에 의해 Fourier cosine series로 전개 가능한 온도 분포의 경우는 모두 해석해를 구할 수 있으며, 해석해 계산과 유한요소해석의 결과를 비교·검토한 결과, 실린더의 변위는 해석적인 방법과 FEM에 의해 구한 결과가 거의 일치함을 알 수

있었으며, 반경방향과 길이방향의 변위량을 알 수 있었다. 그리고, 주어진 온도분포에서의 해는 자유 팽창에 의한 결과와는 차이가 있음을 알 수 있다. 실린더의 응력해석 결과는 해석해에 의한 결과와 FEM에 의한 결과가 거의 일치하는 값을 나타냈으나, 실린더의 끝에서는 St. Venant 원리를 적용하였으므로, 끝 경계면에서의 영향으로 실린더의 끝 부분에서는 FEM 결과와 차이를 보였다.

실린더 형상의 열응력 해석에 관한 연구는 온도 분포를 일반화된 Fourier series 전개하는 경우, 단면적이 달라지는 경우,  $r$ ,  $z$ 방향으로 변하는 온도조건 등 여러 모델에 대한 해석 및 실험적 연구 등이 필요시 된다.

### 참고문헌

- (1) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., 1970, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill.
- (2) Nowinski, J.L., 1978, "Theory of Thermoelasticity with Applications," Sijthoff & Noordhoff.
- (3) Pallone, G.T., 1983, "Transient Temperature Distribution in Work Rolls During Hot Rolling of Sheet and Strip," *Iron & Steel Engineering*, p. 21.
- (4) Willmotte, S. and Mignon, J., 1973, "Thermal Variations of the Camber of Rolls During Hot Rolling," *CRM*, No. 34, pp. 17~34
- (5) Parks, D.M. and Baker, J.L., 1972, "Temperature Effects of Cooling Work Rolls," *Iron and Steel Engineer*, Vol. 49, pp. 83~98
- (6) Poplawski, J.V. and Seccombe, D.A., 1980, "Bethlehem's Contribution to the Mathematical Modeling of Cold Rolling Tandem Mills," *Iron and Steel Engineer*, Vol. 57, pp. 47~58
- (7) Zienkiewicz, O.C., Onate, E. and Heinrich, J.C., 1981, "A General Formulation for Coupled Thermal Flow of Metals Using Finite Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, pp. 1497~1514
- (8) Pietrzyk, M. and Lenard, J.G., 1990, "A Study of Heat Transfer During Flat Rolling," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 30, pp. 1459~1469
- (9) Kardomateas, G.A., 1989, "Transient Thermal Stresses in Cylindrically Orthotropic Composite Tubes," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 56, pp. 411~417
- (10) Kardomateas, G.A., 1990, "The Initial Phase of Transient Thermal Stresses Due to General Boundary Thermal Loads in Orthotropic Hollow Cylinders," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 719~724
- (11) Padovan, J., 1986, "Anisotropic Thermal Stress Analysis," *Thermal Stresses* Vol. 1, North-Holland.
- (12) 조 진, 1992, "열간압연하에서 작업롤의 Thermal Crown에 관한 연구," 대한기계학회논문집, 제16권, 제8호, pp. 1451~1456
- (13) Saada, A.S., 1974, *Elasticity Theory and Applications*, Pergamon Press.
- (14) Sokolnikoff, I.S., 1956, *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill.
- (15) Hildebrand, F.B., 1976, *Advanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall.
- (16) "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables," *U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards*, 1964