대한기계학회논문집(A) 제 20 권 제 3 호, pp. 901~909, 1996

〈논 문〉

임의의 균열표면 하중을 받는 복합채 중앙균열의 응력세기계수

이강용* · 박문복* · 김성호**

(1994년 6월 28일 접수)

Stress Intensity Factors for an Interlaminar Crack in Composites under Arbitrary Crack Surface Loadings

Kang Yong Lee, Moon Bok Park and Sung Ho Kim

Key Words : Stress Intensity Factor(응력세기계수), Center Crack(중앙균열), Arbitrary Loading(임의의 하중), Dual Integral Equations(쌍적분방정식), Composites(복합재)

Abstract

A model is constructed to evaluate the stress intensity factors(SIFs) for composites with an interlaminar crack subjected to an arbitrary crack surface loading. A mixed boundary value problem is formulated by Fourier integral transform method and a Fredholm integral equation of the second kind is derived. The integral equation is solved numerically and the mode Ⅰ and Ⅱ SIFs are evaluated for various shear modulus ratios between each layer, crack length to layer thickness, each term of crack surface polynomial loading and the number of layers. The mode I and II SIFs for the E-glass/epoxy composites as well as the hybrid composites are also evaluated.

Ⅰ. 서 론

복합재에서 발생하는 균열은 크게 접합 경계면에 평행 또는 수직한 방향으로 존재하는 균열로 구분할 수 있으며, 균열거동을 선형 파괴역학 관점에서 연구하기 위해서는 응력세기계수의 산출이 필수적이다.

접합면에 수평방향으로 존재하는 균열에 관한 연구로써, Hilton과 Sih[1]는 2개의 반무한체에 접착된 이종탄성층 내부의 중앙균열면에 단순인장하중이 작용하는 경우에 대하여 적분변환법을 적용하여 Fredholm 적분방정식을 유도하였으며, 모드 Ⅰ 응력세기계수를 산출하였다. Delale and Erdogan[2]은 2개의 반무한체 사이에 접착된 비균질 접합층의 중앙균열면에 단순인장하중이 작용하는 경우에 대하여 적분변환법을 이용하여 Cauchy 특이적분방정식을 유도하였으며, 이로부터 모드 Ⅰ 응력세기계수를 산출하였다. 또한, 김성호[3,4] 등은 2개의 반무한체에 접착된 5개의 탄성층 내부 중앙균열면에 단순인장 및 전단하중이 작용하는 경우에 대하여 적분변환법을 이용하여 Fredholm 적분방정식을 유도하였으며, 모드 Ⅰ, Ⅱ 응력세기계수를 산출하였다. 복잡한 형태의 하중이 작용한 경우의 연구로써, Isida[5,6]는 유한 및 무한체 중앙균열면에 멱급수 인장하중이 작용하는 경우에 대하여 각각 Laurent 복소응력장 전개법(expansion of complex stress potential)을 이용하여 응력세기계수를 산출하였다. Chen과 Chang[7]은 무한체 내부에 존재하는 다수의 경사균열면에 멱급수 인장 및 전단 하중이 작용하는 경우에 대하여 응력 및 변위성분을 산출하였으며, FEAM(finite element alternating

*회원, 연세대학교 기계공학과
**회원, 국방과학연구소

method)에 의해 모드 Ⅰ, Ⅱ 응력세기계수를 계산하였다. Kim 등[8]은 2개의 등방탄성층으로 이루어진 중앙균열모델에 대하여 임의의 반대칭 균열표면 수직하중이 작용할때 다양한 물성치 및 기하학적 변수의 변화에 따른 모드 Ⅰ 응력세기계수의 영향을 검토하였다.

그러나, 다수의 층으로 이루어진 복합재 중앙균열면에 임의의 수직 및 면내 전단하중이 작용할때의 응력세기계수에 관한 연구는 찾아보기 힘들다. 따라서, 본 연구에서는 여러개의 탄성층으로 이루어진 복합재 중앙균열면에 임의의 수직 및 전단하중이 작용하는 경우에 대하여 적분변환법을 이용하여 Fredholm 적분방정식을 유도하고 이로부터 수치해석적인 방법에 의하여 모드 Ⅰ, Ⅱ 응력세기계수를 산출하고 전단계수비, 푸아송비, 균열길이 대 탄성층의 두께비 및 각 멱급수 누승의 영향을 분석하고자 한다.

2. 이 론

균열모델은 Fig. 1과 같다. 두께 $2h_1$의 제1 탄성층은 길이 $2a$의 균열을 내재하며 두께 $h_{j+1}-h_j(j=1,\cdots,n-1)$를 갖는 인접 탄성층과 평행하게 경계를 이룬다. n개의 적층된 탄성층은 이웃하는 탄성층과 완전히 접착되었고 제1 탄성층의 중앙균열면에는 임의의 멱급수 수직 및 전단하중이 작용한다고 가정하였다.

2.1 수직하중이 작용할 때 응력세기계수

선형 탄성이론에 의하여 응력과 변위성분은 다음과 같이 Fourier 적분변환한 함수 G_j의 적분형으로 표시된다.[9]

$$\sigma_{xx(j)}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\partial^2 G_j}{\partial y^2}\begin{bmatrix}\cos\xi x\\ \sin\xi x\end{bmatrix}d\xi$$

$$\sigma_{yy(j)}=\frac{-1}{\pi}\int_0^\infty \xi^2 G_j\begin{bmatrix}\cos\xi x\\ \sin\xi x\end{bmatrix}d\xi$$

$$\sigma_{xy(j)}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\partial G_j}{\partial y^2}\begin{bmatrix}\sin\xi x\\ -\cos\xi x\end{bmatrix}d\xi$$

$$u_{(j)}=\frac{(1+\nu_j)}{\pi E_j}\int_0^\infty\Big[(1-\nu_j)\frac{\partial^2 G_j}{\partial y^2}+\nu_j\xi^2 G_j\Big]\begin{bmatrix}\sin\xi x\\ -\cos\xi\end{bmatrix}d\xi/\xi$$

$$u_{(j)}=\frac{(1+\nu_j)}{\pi E_j}\int_0^\infty\Big[(1-\nu_j)\frac{\partial^3 G_j}{\partial y^3}+(\nu_j-2)\xi^2\frac{\partial G_j}{\partial y}\Big]\begin{bmatrix}\cos\xi\\ \sin\xi x\end{bmatrix}d\xi/\xi^2 \qquad (1)$$

여기서,

$$G_j=\Big[A_j(\xi)+\xi y B_j(\xi)\Big]\cosh(\xi y)+\Big[C_j(\xi)+\xi y D_j(\xi)\Big]\sinh(\xi y)$$
$$(j=1,2,3,,,n) \qquad (2)$$

적분항안의 벡터항중 첫번째 및 두번째 행은 대칭 및 반대칭 하중이 작용한 경우를 각각 나타낸다. 첨자 j=1은 균열을 내재하는 첫번째 층을 의미하며, $\sigma_{xx(h)}$, $\sigma_{yy(j)}$, $\sigma_{xy(j)}$ 및 $u_{(j)}$, $v_{(j)}$는 각각 응력성분 및 변위성분을 나타낸다. ν_j와 E_j는 각각 j번째 층의 푸아송비, 전단계수이며 $A_j(\xi)$, $B_j(\xi)$, $C_j(\xi)$, $D_j(\xi)$는 결정해야 할 미지수이다.

모델의 대칭성으로 인하여 수직하중이 작용할 때 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\sigma_{yy(1)}=-g(x) && (a<x<x,\ y=0)\\
&v_{(1)}=0 && (|x|>a,\ y=0)\\
&\sigma_{xy(1)}=0 && (-\infty<x<\infty,\ y=0)\\
&\sigma_{xy(j)}=\sigma_{xy(j+1)} && (-\infty<x<\infty,\ y=h_j)\\
&\quad (j=1,\cdots,n-1)\\
&\sigma_{yy(j)}=\sigma_{yy(j+1)} && (-\infty<x<\infty,\ y=h_j)\\
&\quad (j=1,\cdots,n-1)\\
&u_{(j)}=u_{(j+1)} && (-\infty<x<\infty,\ y=h_j)\\
&\quad (j=1,\cdots,n-1)\\
&v_{(j)}=v_{(j+1)} && (-\infty<x<\infty,\ y=h_j)\\
&\quad (j=1,\cdots,n-1)\\
&\sigma_{xy(n)}=0 && (\infty<x<\infty,\ y=h_n)\\
&\sigma_{yy(n)}=0 && (\infty<x<\infty,\ y=h_n)
\end{aligned} \qquad (3)$$

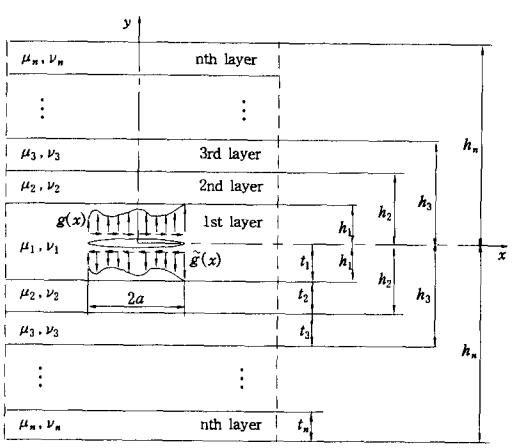


Fig. 1 Configuration of the model

여기서, $h_j(j=1,\cdots,n)$는 j번째 탄성층까지 두께이며 $g(x)$는 균열면에 작용하는 임의의 수직응력으로써 다음과 같이 정의된다.

$$g(x)=\sum_{\beta=0}^{\infty}p_\beta\left(\frac{x}{a}\right)^\beta$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}p_{2k}\left(\frac{x}{a}\right)^{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}p_{2k-1}\left(\frac{x}{a}\right)^{2k-1} \quad (4)$$

여기서, p_{2k}와 p_{2k-1}는 각각 대칭 및 반대칭 수직하중 성분에 대한 주어진 상수이다.

수식유도의 간결성을 위하여 $g(x)$를 대칭 및 반대칭 하중부분으로 나누어 유도한다. 식 (3)의 경계조건과 식 (1)로부터 다음과 같이 각 하중에 따른 쌍적분방정식(dual integral equations)을 구할 수 있다.

$$\int_0^\infty M(\xi)\begin{bmatrix}\cos\xi x\\ \sin\xi x\end{bmatrix}d\xi=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad (|x|>a) \quad (5)$$

$$\int_0^\infty \xi F(\xi)M(\xi)\begin{bmatrix}\cos\xi x\\ \sin\xi x\end{bmatrix}d\xi$$
$$=\pi\begin{bmatrix}p_{2k}\left(\frac{x}{a}\right)^{2k}\\ p_{2k-1}\left(\frac{x}{a}\right)^{2k-1}\end{bmatrix} \quad (|x|a) \quad (6)$$

여기서,

$$F(\xi)\equiv\frac{\xi A_1(\xi)}{M(\xi)}$$
$$M(\xi)\equiv\xi B_1(\xi)$$
$$B_1(\xi)=-C_1(\xi) \quad (7)$$

식 (7)에서 $A_1(\xi)$는 다음과 같은 식으로부터 산출된다.

$$T=Q^{-1}R \quad (8)$$

여기서,

$$T=[A_1, D_1, A_2, C_2, D_2, \cdots, A_n, B_n, C_n, D_n]^T \quad (9)$$

$$R=[R_1, R_2, R_3, R_4, \cdots, R_{4n-2}]^T \quad (10)$$
$$R_1=Tanhz_1-z_1,\quad R_2=-z_1\,Tanhz_1$$
$$R_3=-[(1-2\nu_1)\,Tanhz_1+z_1]$$
$$R_4=z_1\,Tanhz_1-2(1-\nu_1)$$
$$R_5=R_6=,\cdots,=R_{4n-2}=0\,(z_1\equiv\xi h_1) \quad (11)$$

Q는 부록 A에 정의되어 있다.

식 (5)와 식 (6)의 쌍적분방정식을 풀기 위하여 $M(\xi)$를 대칭 및 반대칭 하중에 따라 다음과 같이 가정한다.[10]

$$M(\xi)=\int_0^a\begin{bmatrix}\phi_{2k}(t) & J_0(\xi t)\\ \psi_{2k-1}(t) & J_1(\xi t)\end{bmatrix}dt \quad (12)$$

여기서, J_0와 J_1는 제1종 0차 및 1차 Bessel 함수이며, $\phi_{2k}(t)$와 $\psi_{2k-1}(t)$는 결정될 함수로서 식 (12)는 식 (5)를 자동으로 만족하며, 식 (12)를 식 (6)에 적용하면 다음과 같은 제2종 Fredholm 적분방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix}\Phi_{2k}(\sigma)\\ \Psi_{2k-1}(\sigma)\end{bmatrix}+\int_0^1 K(\tau,\sigma)\begin{bmatrix}\Phi_{2k}(\tau)\\ \Psi_{2k-1}(\tau)\end{bmatrix}d\tau$$
$$=\begin{bmatrix}q_{2k}(\sigma)\\ f_{2k-1}(\sigma)\end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서,

$$K(\tau,\sigma)=\sqrt{\tau\sigma}\int_0^\infty \alpha[F(\alpha/a)-1]$$
$$\begin{bmatrix}J_0(\alpha\tau)J_0(\alpha\sigma)\\ J_1(\alpha\tau)J_1(\alpha\sigma)\end{bmatrix}d\alpha \quad (14)$$
$$q_{2k}(\sigma)=\frac{(2k-1)\,!\,!}{(2k)\,!\,!}\sigma^{2k+1/2}$$
$$f_{2k-1}(\sigma)=\frac{(2k-1)\,!\,!}{(2k)\,!\,!}\sigma^{2k-1/2}$$
$$(2k-1)\,!\,!\equiv(2k-1)\times(2k-3)\cdots3\times1,$$
$$(2k)\,!\,!\equiv(2k)\times(2k-2)\cdots4\times2$$

식 (13)을 무차원화하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수가 사용되었다.

$$t\equiv a\tau,\quad s\equiv a\sigma,\quad a\equiv\xi a,\quad x\equiv a\bar{x}$$
$$\phi_{2k}(t)\equiv\pi\sqrt{a\alpha}\,p_{2k}\quad \Phi_{2k}(\tau)$$
$$\psi_{2k-1}(t)=\pi\sqrt{a\alpha}\,p_{2k-1}\quad \Psi_{2k-1}(\tau) \quad (15)$$

식 (13)의 Fredholm 적분방정식의 수치적 해를 구하기 위하여 Gaussian-Laguerre 적분법을 도입하고 $\tau_m=\sigma_m(m=1\sim N_G)$으로 하면 $\Phi_{2k}(\tau_m)$과 $\Psi_{2k}(\tau_m)$은 다음과 같이 수치적으로 결정될 수 있다.

$$\sum_{m=1}^{N}\{\delta_{me}+K(\tau_m,\tau_e)\begin{bmatrix}\Phi_{2k}(\tau_m)\\ \Psi_{2k-1}(\tau_m)\end{bmatrix}W(\tau_m)\}$$
$$=\begin{bmatrix}q_{2k}(\tau_e)\\ f_{2k-1}(\tau_e)\end{bmatrix}\quad (e=1\sim N_G)$$
$$K(\tau_m,\tau_e)=\sqrt{\tau_m\tau_e}\sum_{l=1}^{N_l}\alpha_l[F(\alpha_l/a)-1]$$
$$\times\begin{bmatrix}J_0(\alpha_l\tau_m)J_0(\alpha_l\tau_e)\\ J_1(\alpha_l\tau_m)J_1(\alpha_l\tau_e)\end{bmatrix}W(\alpha_l) \quad (17)$$

δ_{me}는 Kronecker's delta이고 τ_m과 τ_e은 각각 적분점(integration point)과 병치점(collocation point)이다. $W(\alpha_l)$는 Laguerre 적분 가중함수

(weight function), $W(\tau_m)$은 Gaussian 적분가중함수이며, 본 연구에서 수렴성을 검토한 후 수치해석에 사용된 적분점 개수는 $N_l=30$, $N_G=110$이다. 따라서 식 (16)에서 $\Phi_{2k}(\tau_m)$과 $\Psi_{2k-1}(\tau_m)$을 수치해석적으로 산출할 수 있으며 식 (8)~(11)로부터 미지수 $A_j(\xi)$, $B_j(\xi)$, $C_j(\xi)$, $D_j(\xi)$를 구할 수 있다.

균열 우측과 좌측 선단에서 응력세기계수 K_{IR}과 K_{IL}은 다음 식에 의하여 구하여 진다.[11]

$$K_{IR}=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{2\pi a(x-1)}\ \sigma_{yy(1)}(\bar{x},0)$$
$$K_{IL}=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{-2\pi a(x+1)}\ \sigma_{yy(1)}(\bar{x},0) \qquad (18)$$

식 (1), (2), (8), (12), (13)과 식 (18)로부터 응력세기계수는 다음과 같이 된다.

$$K_{IR}=\sqrt{\pi a}\left[\Phi_0(1)p_0+\sum_{k=1}^{\infty}\{\Phi_{2k}(1)p_{2k}+\Psi_{2k-1}(1)p_{2k-1}\}\right]$$
$$K_{IL}=\sqrt{\pi a}\left[\Phi_0(1)p_0+\sum_{k=1}^{\infty}\{\Phi_{2k}(1)p_{2k}-\Psi_{2k-1}(1)p_{2k-1}\}\right] \qquad (19)$$

2.2 면내 전단하중이 작용할 때 응력세기계수

선형 탄성이론에 의하여 응력과 변위성분은 수직하중의 경우와 유사하게 다음과 같이 Fourier 적분변환한 함수 G_j 적분형으로 표시된다.[9]

$$\sigma_{xx(j)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\partial^2\tilde{G}_j}{\partial y^2}\begin{bmatrix}\sin\xi x\\ \cos\xi x\end{bmatrix}d\xi$$
$$\sigma_{xy(j)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\partial\tilde{G}_j}{\partial y}\begin{bmatrix}\sin\xi x\\ -\cos\xi x\end{bmatrix}d\xi$$
$$u_{(j)}=\frac{(1+\nu_j)}{\pi E_j}\int_0^{\infty}\left[(1-\nu_j)\frac{\partial^2\tilde{G}_j}{\partial y^2}+\nu_j\xi^2\tilde{G}_j\right]\begin{bmatrix}-\cos\xi x\\ \sin\xi\end{bmatrix}d\xi/\xi$$
$$v_{(j)}=\frac{(1+\nu_j)}{\pi E_j}\int_0^{\infty}\left[(1-\nu_j)\frac{\partial^3\tilde{G}_j}{\partial y^3}+(\nu_j-2)\xi^2\frac{\partial\tilde{G}_j}{\partial y}\right]\begin{bmatrix}\sin\xi x\\ \cos\xi\end{bmatrix}d\xi/\xi^2 \qquad (20)$$

여기서,

$$\tilde{G}_j=[\tilde{A}_j(\xi)+\xi y\ \tilde{B}_j(\xi)\ cosh(\xi y)+[\tilde{C}_j(\xi)+\xi y\ \tilde{D}_j(\xi)]\ sinh(\xi y)\quad (j=1,2,3,,,n) \qquad (21)$$

$\tilde{A}_j(\xi)$, $\tilde{B}_j(\xi)$, $\tilde{C}_j(\xi)$, $\tilde{D}_j(\xi)$는 결정되어질 미지수이다.

면내 전단하중이 작용할때 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\sigma_{yy(1)}=-\tilde{g}(x) && (a<x<\alpha,\ y=0)\\
&u_{(1)}=0 && (|x|>a,\ y=0)\\
&\sigma_{yy(1)}=0 && (-\infty<x<\infty,\ y=0_j)\\
&\sigma_{xy(j)}=\sigma_{xy(j+1)} && (-\infty<x<\infty,\ y=h_j)\\
& && (j=1,\cdots,n-1)\\
&\sigma_{yy(j)}=\sigma_{xy(j+1)} && (-\infty<x<\infty,\ y=h_j)\\
& && (j=1,\cdots,n-1)\\
&u_{(j)}=u_{(j+1)} && (-\infty<x<\infty,\ y=h_j)\\
& && (j=1,\cdots,n-1)\\
&v_{(j)}=v_{(j+1)} && (-\infty<x<\infty,\ y=h_j)\\
& && (j=1,\cdots,n-1)\\
&\sigma_{xy(n)}=0 && (\infty<x<\infty,\ y=h_j)\\
&\sigma_{yy(n)}=0 && (\infty<x<\infty,\ y=h_j)
\end{aligned} \qquad (22)$$

여기서, $\tilde{g}(x)$는 균열면에 작용하는 임의의 전단하중이며, 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{g}(x)=\sum_{\beta=0}^{\infty}\tilde{p}_{\beta}\left(\frac{x}{a}\right)^{\beta}=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{p}_{2k}\left(\frac{x}{a}\right)^{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{p}_{2k-1}\left(\frac{x}{a}\right)^{2k-1} \qquad (23)$$
$$\tilde{g}(x)=\sum_{\beta=0}^{\infty}\tilde{p}_{\beta}\left(\frac{x}{a}\right)^{\beta}=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{p}_{2k}\left(\frac{x}{a}\right)^{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{p}_{2k-1}\left(\frac{x}{a}\right)^{2k-1} \qquad (23)$$

여기서, $\tilde{p}_{2k}$와 $\tilde{p}$는 각각 대칭 및 반대칭 전단하중 성분에 대한 주어진 상수이다. 수직하중이 작용할때와 유사한 방법으로 임의의 전단하중이 작용할 때의 제 2종 Fredholm 적분방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix}\tilde{\Phi}_{2k}(\sigma)\\ \tilde{\Psi}_{2k-1}(\sigma)\end{bmatrix}+\int_0^1 K(\tau,\sigma)\begin{bmatrix}\tilde{\Phi}_{2k}(\tau)\\ \tilde{\Psi}_{2k-1}(\tau)\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}q_{2k}(\sigma)\\ -f_{2k-1}(\sigma)\end{bmatrix} \qquad (24)$$

여기서,

$$\tilde{K}(\tau,\sigma)=\sqrt{\tau\sigma}\int_0^{\infty}\alpha[\tilde{F}(\alpha/a)-1]\times\begin{bmatrix}J_0(\alpha\tau)J_0(\alpha\sigma)\\ J_1(\alpha\tau)J_1(\alpha\sigma)\end{bmatrix}d\alpha \qquad (25)$$

$$t\equiv a\tau,\quad s\equiv a\sigma,\quad a\equiv\xi a,\quad x\equiv a\bar{x}$$
$$\tilde{\phi}_{2k}(t)\equiv\pi\sqrt{a\alpha}\,\tilde{p}_{2k}\;\tilde{\Phi}_{2k}(\tau),$$
$$\tilde{\psi}_{2k-1}(t)=\pi\sqrt{a\alpha}\;\tilde{p}_{2k-1}\;\tilde{\Psi}_{2k-1}(\tau)\qquad(26)$$

균열 우측과 좌측 선단에서 응력세기계수 K_{IR}과 K_{IL}는 다음식에 의하여 구하여 진다.

$$K_{IR}=\lim_{x\to1^+}\sqrt{2\pi a(\bar{x}-1)}\;\sigma_{yy(1)}(\bar{x},0)$$
$$K_{IL}=\lim_{x\to-1^-}\sqrt{-2\pi a(\bar{x}+1)}\;\sigma_{xy(1)}(\bar{x},0)\qquad(27)$$

수직하중이 작용할 때와 유사한 방법으로 임의의 전단하중이 작용할 때의 균열 좌우측에서 응력세기계수는 다음과 같이 구해진다.

$$K_{IR}=\sqrt{\pi a}\left[\tilde{\Phi}_0(1)\,\tilde{p}_0+\sum_{k=1}^{\infty}\{\tilde{\Phi}_{2k}(1)\,\tilde{p}_{2k}+\tilde{\Psi}_{2k-1}(1)\,\tilde{p}_{2k-1}\}\right]$$
$$K_{IL}=\sqrt{\pi a}\left[\tilde{\Phi}_0(1)\,\tilde{p}_0+\sum_{k=1}^{\infty}\{\tilde{\Phi}_{2k}(1)\,\tilde{p}_{2k}-\tilde{\Psi}_{2k-1}(1)\,\tilde{p}_{2k-1}\}\right]\qquad(28)$$

3. 수치해석 및 고찰

균질등방성 반무한체 경우에 대하여 식 (13)과 식 (24)에 $F(a/a)=\tilde{F}(a/a)=1$이 므로 $K(\tau,\sigma)$, $\tilde{K}(\tau,\sigma)=0$가 된다. 따라서 이때 균열 좌우측에서 모드 Ⅰ, Ⅱ 응력세기계수는 다음과 같이 된다.

$$K_{IR}=\sqrt{\pi a}\left[p_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\{p_{2k}+p_{2k-1}\}\right]$$
$$=(p_0+\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{2}p_2+\cdots)\sqrt{\pi a}$$

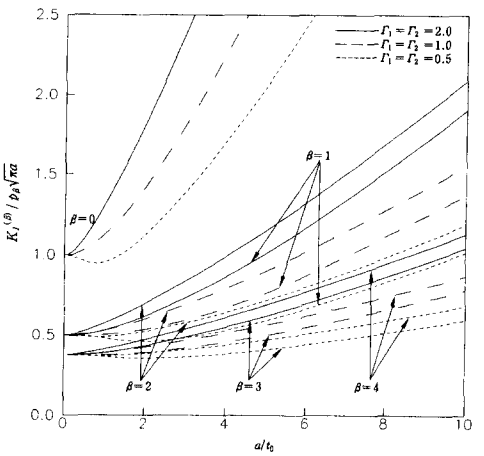
$$K_{IL}=\sqrt{\pi a}\left[p_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\{p_{2k}-p_{2k-1}\}\right]$$
$$=(p_0+\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{2}p_2+\cdots)\sqrt{\pi a}$$

$$K_{IIR}=\sqrt{\pi a}\left[\tilde{p}_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\{\tilde{p}_{2k}-\tilde{p}_{2k-1}\}\right]$$
$$=(\tilde{p}_0-\frac{1}{2}\tilde{p}_1+\frac{1}{2}\tilde{p}_2+\cdots)\sqrt{\pi a}$$

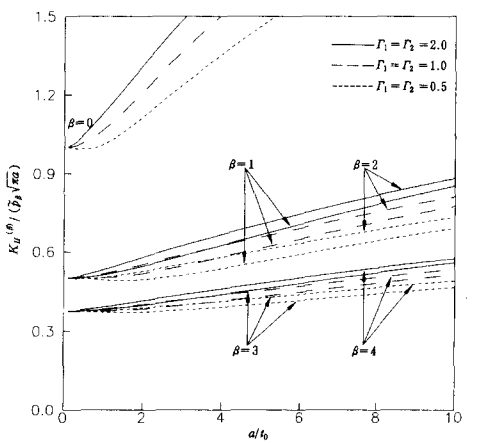
$$K_{IIL}=\sqrt{\pi a}\left[\tilde{p}_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\{\tilde{p}_{2k}+\tilde{p}_{2k-1}\}\right]$$
$$=(\tilde{p}_0+\frac{1}{2}\tilde{p}_1+\frac{1}{2}\tilde{p}_2+\cdots)\sqrt{\pi a}\qquad(29)$$

이는 Isida[6]의 결과와 일치한다.

3개의 이종탄성층의 경우, 각 층은 서로 다른 탄성층들로 구성되었으며 이때 산출된 모드 Ⅰ과 모드 Ⅱ의 무차원 응력세기계수는 a/h_1, a/h_2, a/h_3, $\Gamma_1(\equiv\mu_1/\mu_2)$, $\Gamma_2(\equiv\mu_2/\mu_3)$, ν_1, ν_2, ν_3 및 β에 영향을 받는다. 3개의 이종탄성층의 두께가 일정한 경우 ($t_1=t_2=t_3=t_0$), 각 탄성층의 두께 및 균열 우측 선단의 멱급수 누승하중에 대한 모드 Ⅰ과 모드 Ⅱ의 무차원 응력세기계수 $K_{\mathrm{I}}{}^{(\beta)}/p_\beta/\sqrt{\pi a}$와 $K_{\mathrm{II}}{}^{(\beta)}/\tilde{p}_\beta\sqrt{\pi a}$를 산출한 결과는 Fig. 2와 같다. 외각층에서 자유면의 영향(free surface effect)으로 인하여 a/t_0가 증가할수록 모드 Ⅰ과 모드 Ⅱ의 무차원 응력세기계수가 증가한다. $\Gamma_1=\Gamma_1=2.0$에 대한 모드 Ⅰ과 모드 Ⅱ의 무차원 응력세기계수는 $\Gamma_1=\Gamma_2=0.5$보다 크다. 모드 Ⅰ과 모드 Ⅱ의 무차원 응력세기계수는 멱급수 누승(β)이 증가할수록 감소하며 이는 Isida[6]의 결과와 경향이 같다.



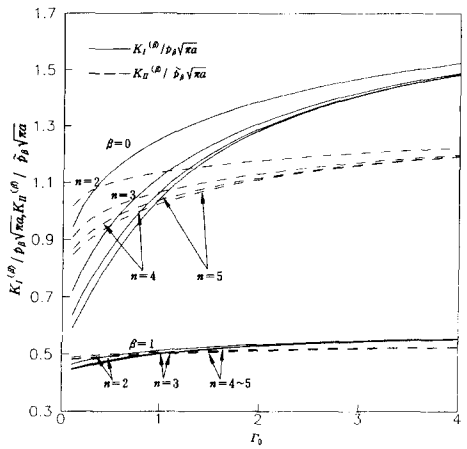
(a) Normal loading



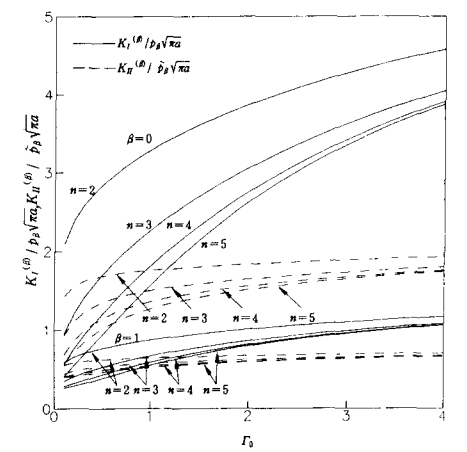
(b) Shear loading

Fig. 2 Dimensionless stress intensity factor for three layered case

여러 개의 탄성층으로 이루어진 적층재의 전단계수가 적층방향에 대하여 감소 또는 증가하고, 각 멱급수 누승(β) 하중이 작용한 경우에 대하여 균열길이에 따른 모드 Ⅰ과 모드 Ⅱ의 무차원 응력세기계수를 산출하였다. Fig. 3은 일정한 두께의($t_1=t_2=,\cdots,=t_n=t_0$) 탄성층으로 이루어진 적층재에 대한 균열 우측선단의 모드 Ⅰ과 모드 Ⅱ의 무차원 응력세기계수 $K_{\mathrm{I}}\sqrt{\pi a}$와 $K_{\mathrm{II}}^{(\beta)}/\bar{p}_\beta\sqrt{\pi a}$이며 탄성층의 개수가 어느 정도 증가($n=5$)하면 모드 Ⅰ과 모드 Ⅱ의 무차원 응력세기계수 값은 크게 변화하지 않는다. 탄성층이 상대적으로 얇을 때($a/t_0=4.0$), 탄성층 두께영향(layer thickness effect)이 점차 커짐으로 인해서 탄성층의 수(n) 증감에 따른 모드 Ⅰ과 모드 Ⅱ의 무차원 응력세기계수 변화가 크게 나타난다. 그러나 탄성층의 두께가 두꺼우면($a/t_0=1.0$) 탄성층의 전단계수비와 탄성층의 수가 무차원 응력세기계수에 크게 영향을 주지 못한다. 또한, 멱급수 누승(β)이 증가하고 a/t_0가 감소할수록 전단계수비의 증감에 따른 모드 Ⅰ과 모드 Ⅱ의 무차원 응력세기계수 변화는 감소된다.



(a) $a/t_0=1.0$



(b) $a/t_0=4.0$

Fig. 2 Dimensionless stress intensity factor for multi-layer case

Tabel 1 The material properties used for composites[12]

Type	Shear modulus ($\times10^6$ psi)	Poisson's ratio
E−glass	4.40	0.20
Graphite	33.33	0.20
Epoxy	0.19	0.35

균열이 내재된 복합적층재의 경우에 대하여 해석하기 위하여 항공기 및 일반공학적 구조물에서 많이 사용되는 E-glass/epoxy만으로 이루어진 monlithic 복합재와 E-glass/epoxy 및 Graphite/epoxy의 조합으로 이루어진 hybrid 복합재를 선정하였다. 이때 사용된 물성치는 Table 1과 같다.

모노리틱(monolithic) 복합재 해석을 위한 모델은 Fig. 4와 같다. 균열이 있는 수지층(epoxy)의 두께는 t_{m0}, 섬유층(E-glass fiber)의 두께는 t_f이고 균열을 내재하지 않은 수지층(epoxy)의 두께는 t_m이라고 가정하였다. 이때 균열을 내재한 수지층 근처에서 국부 섬유체적 함유율(local fiber volume fraction) V_{LF}은 다음과 같이 산출된다.[13]

$$V_{LF}=\frac{t_f}{t_{m0}+t_f}$$

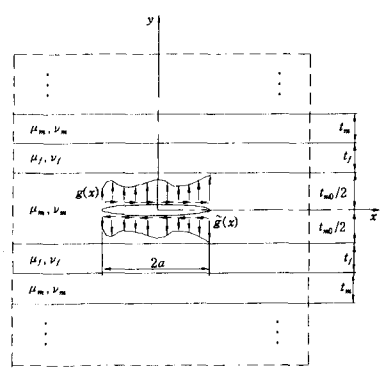
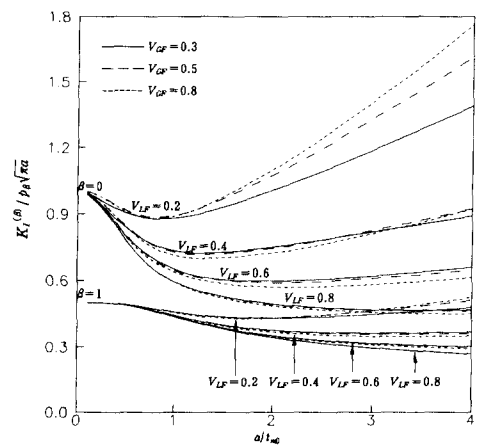


Fig. 4 Geometry of monolithic composites

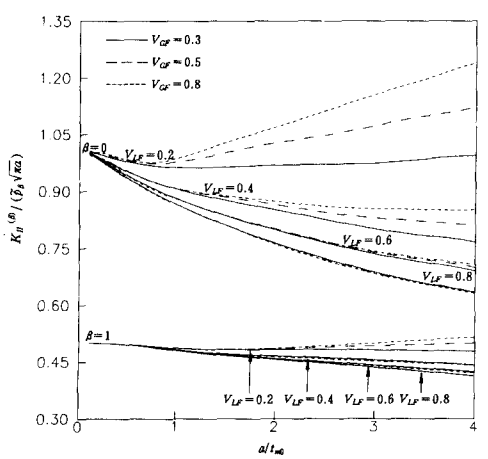
또한, 균열을 내재한 수지층 외부에서 전체 섬유체적 함유율(global fiber volume fraction) V_{GF}은 다음과 같이 산출된다.[13]

$$V=\frac{t_f}{t_m+t_f} \tag{31}$$

Fig. 5는 여러가지 국부 섬유체적 함유율과 전체 섬유체적 함유율에 대하여 균열이 내재된 수지층 두께에 따른 모드 Ⅰ과 모드 Ⅱ의 무차원 응력세기계수를 산출한 것이다. 국부 섬유체적 함유율(V_{LF})이 모드 Ⅰ과 모드 Ⅱ의 무차원 응력세기계수에 미치는 영향은 전체 섬유체적 함유율(V_{GF})이 미치는 영향보다 더 지배적임을 알 수 있다. 특히, 국부 섬유체적 함유율이 낮은 경우($V_{LF}=0.2$)에



(a) Normal loading



(b) Shear loading

Fig. 5 Dimensionless stress intensity factor for monolithic composites

무차원 응력세기계수는 국부 섬유체적 함유율이 높은 경우($V_{LF}=0.4$, 0.6, 0.8)의 모드 Ⅰ과 모드 Ⅱ의 무차원 응력세기계수보다 상대적으로 더 크며 이는 Bechel 등[13]의 경향과 일치한다. 그러나 균열을 내재한 수지층이 얇고($a/t_{m0}>1$) 국부 섬유체적 함유율이 낮을 때($V_{LF}=0.2$)에는 전체 섬유체적 함유율도 모드 Ⅰ과 모드 Ⅱ의 무차원 응력세기계수에 영향을 미침을 알 수 있다.

하이브리드(hybrid) 복합재 해석을 위한 모델은 Fig. 6과 같다. 균열이 있는 수지층(epoxy)의 두께는 t_{m0}, 균열을 내재하지 않은 다른 모든 수지층의 두께는 t_m, 섬유층(E-glass fiber 또는 Graphite fiber)의 두께는 t_{f1}, t_{g2}, …, t_{fn}으로 표현되며, 이때 첨자 1은 첫번째 섬유층을 첨자 n은 n번째 섬유층을 각각 나타낸다. 이때 균열을 내재한 수지층 근처에서 국부 섬유체적 함유율 V_{LF}은 식[30]과 같으며 균열을 내재한 수지층 외부에서 전체 섬유체적 함유율 V_{GF}은 다음과 같이 산출된다.

$$V_{GF}=\frac{t_{f1}+t_{f2}}{2t_m+t_{f1}+t_{f2}} \tag{32}$$

Fig. 7은 여러가지 하이브리드 복합재에 대하여 전체 섬유체적 함유율이 일정하며 ($V_{GF}=0.5$) 균열을 내재한 수지층의 두께에 따른 국부 섬유체적 함유율을 변화할때 모드 Ⅰ과 모드 Ⅱ의 무차원 응력세기계수를 구한 것이다. 국부 섬유체적 함유율이 낮을 때($V_{LF}=0.2$), E-glass/epoxy/Graphite/epoxy와 Graphite/epoxy/E-glass/epoxy의 경우에 대한 모드 Ⅰ과 모드 Ⅱ의 무차원 응력세기계수는 큰 차이가 없음을 알 수 있다. 그러나 국부 섬유체적 함유율이 상대적으로 높으며($V_{LF}=0.8$) 균열을

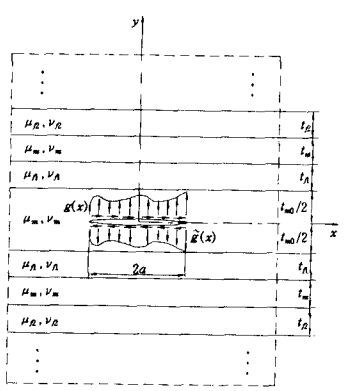
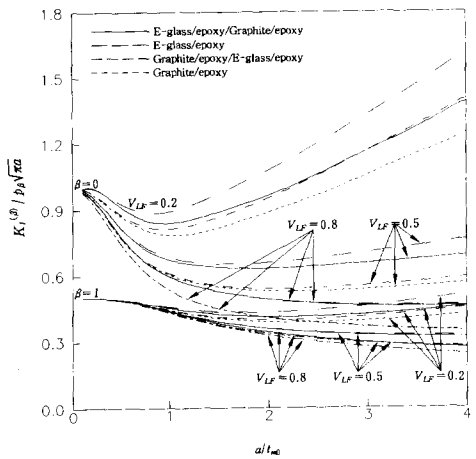
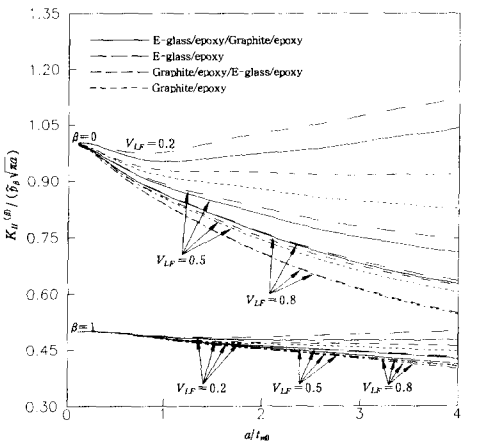


Fig. 6 Geometry of hybrid composites



(a) Normal loading



(b) Shear loading

Fig. 7 Comparision of dimensionless stress intensity factors between monolithic and hybrid composites

내재한 수지층이 얇을 때($a/t_{m0}>1$), Graphite/epoxy/E-glass/epoxy의 무차원 응력세기계수는 E-glass/epoxy/Graphite/epoxy의 무차원 응력세기계수 보다 상대적으로 작다.

4. 결 론

복합적층재 내부 중앙균열면에 임의의 멱급수 수직 및 전단하중이 작용하는 모델에 대하여 파괴역학적 해석을 수행한 결과, 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 적분변환법을 사용하여 제2종 Fredholm 적분방정식을 유도하였으며 수치해석적 방법에 의하여 응력세기계수를 산출하였다. 그 결과는 단순모델의 기존해와 잘 일치하였다.

(2) 여러 개의 탄성층으로 이루어진 복합적층재에 대하여 탄성층의 균열길이 대 두께의 비와 전단계수비가 증가하거나 각 멱급수 누승과 탄성층의 수가 감소함에 따라 무차원 응력세기계수는 증가한다.

(3) 모노리틱 E-glass/epoxy 복합재와 하이브리드 복합재의 무차원 응력세기계수는 국부 섬유체적함유율에 크게 영향을 받는다.

(4) 하이브리드 복합재의 경우, 국부 섬유체적함유율이 상대적으로 높고 균열을 내재한 수지층의 두께가 얇을 때 Graphite/epoxy/E-glass/epoxy로 이루어진 복합재의 무차원 응력세기계수는 E-glass/epoxy/Graphite/epoxy로 이루어진 복합재보다 상대적으로 작다.

참고문헌

(1) Hilton, P. D. and Sih, G. C. , 1970, "A Sandwiched Layer of Dissimilar Material Weakened by Crack like Imperfections," *Proceedings of the Fifth South Eastern Conference on the Theoretical and Applied Mechanics,* G. L. Rogers, S. C Kranc and E. G. Henneke ed. , Vol. 5, pp. 123~149.

(2) Delale, F. and Erdogan, F. , 1988, "On the Mechanical Modeling of the Interfacial Region in Bonded Half-Planes," *ASME Journal of Applied Mechanics,* Vol. 55, pp. 317~324.

(3) 김성호, 오재협, 옹장우, 1991, "단순인장을 받는 복합적층재의 응력확대계수," 대한기계학회 논문집, 제16권, 제5호, pp. 1611~1619.

(4) 김성호, 오재협, 옹장우, 1991, "전단하중을 받는 복합적층재의 응력확대계수," 대한기계학회 논문집, 제16권, 제5호, pp. 838~848.

(5) Isida, M. , 1971, "Effect of WIdth and Length on Stress Intensity Factors of Internally Cracked Plates under Various Boundary Conditions," *International Journal of Fracture,* Vol. 7, No. 3, pp. 301~316.

(6) Isida, M. , 1976, "Elastic Analysis of Cracks and Stress Intensity Factors," (in Japanese),

Fracture Mechanics and Strength of Materials, Vol. 2, Baifuukan, p. 128.

(7) Chen, W. H. and Chang, C. S. , 1989, "Analysis of Two-Dimensional Fracture Problems with Multiple Cracks under Mixed Boundary Conditions," *Engineering Fracture Mechanics,* Vol. 34, No. 4, pp. 921~934.

(8) Kim, S. H. , Lee, K. Y. and Park, M. B. , 1994, "Mode I Stress Intensity Factors for Layered Materials under Anti-symmetric Loadings," *Engineering Fracture Mechanics,* in Press.

(9) Sneddon, I. N. , 1951, *Fourier Transforms,* McGraw-Hill.

(10) Copson, E. T. , 1961, "On Certain Dual Integral Equations," *Proceeding of Glasgow Mathematical Association,* Vol. 5, pp. 19~24.

(11) Sneddon, I. N. and Lowengrub, M. , 1969, *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity,* John Wiley and Sons Inc. , U. S. A.

(12) Schwartz, M. M. , 1992, *Composite Materials Handbook,* 2nd ed., McGraw Hill Inc.

(13) Bechel, V. T. and Kaw, A. K. , 1994, "Fracture Mechanics of Composites with Nonhomogeneous Interphases and Nondilute Fiber Volume Fractions," *International Journal of Solids and Structures,"* Vol. 31, No. 15, pp. 2053~2070.

부 록 A

식 (8)의 Q는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&Q_{11}=1\\
&Q_{12}=\mathrm{Tanh}z_1\\
&Q_{21}=\mathrm{Tanh}z_1\\
&Q_{22}=\mathrm{Tanh}z_1+z_1\\
&Q_{31}=1\\
&Q_{32}=z_1'\mathrm{Tanh}z_1'+2(1-\nu_1)\\
&Q_{41}=-\mathrm{Tanh}z_1\\
&Q_{42}=(1-2\nu_1)\,\mathrm{Tanh}z_1-z_1
\end{aligned}
\qquad \text{(A1)}
$$

$$
\begin{aligned}
&Q_{(4j-)(4j-1)}=-1\\
&Q_{(4j-1)(4j)}=-z_j\\
&Q_{(4j-3)(4j+1)}=-\mathrm{Tanh}z_j\\
&Q_{(4j-3)(4j+2)}=-z_j\,\mathrm{Tanh}z_j\\
&Q_{(4j-2)(4j-1)}=-\mathrm{Tanh}z_j\\
&Q_{(4j-2)(4j)}=-z_j\,\mathrm{Tanh}z_j-1\\
&Q_{(4j-2)(4j+1)}=-1\\
&Q_{(4j-2)(4j+2)}=-\mathrm{Tanh}z_j-z_j\\
&Q_{(4j-1)(4j-1)}=-\Gamma_j\\
&Q_{(4j-1)(4j)}=-\Gamma_j[-2(1-\nu_{j+1})+z_j\mathrm{Tanh}zi]\\
&Q_{(4j-1)(4j+1)}=-\Gamma_j\,\mathrm{Tanh}z_j\\
&Q_{(4j-1)(4j+2)}=-\Gamma_j[-2(1-\nu_j)+z_j\mathrm{Tanh}zi]\\
&Q_{(4j)(4j-1)}=\Gamma_j\,\mathrm{Tanh}z_j\\
&Q_{(4j)(4j)}=-\Gamma_j[-1+2\nu_{j+1}+z_j\mathrm{Tanh}zi]\\
&Q_{(4j)(4j+1)}=\Gamma_j\\
&Q_{(4j)(4j+2)}=\Gamma_j[(2\nu_{j+1}-1)\,\mathrm{Tanh}zi+z_j]\\
&Q_{(4j+1)(4j-1)}=1\\
&Q_{(4j+1)(4j)}=-z_j+1\\
&Q_{(4j+1)(4j+1)}=\mathrm{Tanh}z_{j+1}Q_{(4j+1)(4j+2)}\\
&\qquad\qquad=z_{j+1}\,\mathrm{Tanh}z_{j+1}\\
&Q_{(4j+2)(4j-1)}=\mathrm{Tanh}z_j+1\\
&Q_{(4j+2)(4j)}=z_{j+1}\,\mathrm{Tanh}z_j+1\\
&Q_{(4j+2)(4j+1)}=1\\
&Q_{(4j+2)(4j+2)}=\mathrm{Tanh}z_{j+1}+z_{j+1}\qquad (j=1\text{ to }n-1)
\end{aligned}
\qquad \text{(A2)}
$$

$$
\begin{aligned}
&Q_{(4j+3)(4j-1)}=1\\
&Q_{(4j+3)(4j-1)}=2(1-\nu_{j+1})\,\mathrm{Tanh}z_{j+1}+z_{j+1}\\
&Q_{(4j+3)(4j+1)}=\mathrm{Tanh}z_{j+1}\\
&Q_{(4j+3)(4j+2)}=z_{j+1}\,\mathrm{Tanh}z_{j+1}+2(1-\nu_{j+1})\\
&Q_{(4j++4)(4j-1)}=-\mathrm{Tanh}z_{j+1}\\
&Q_{(4j+4)(4j)}=-z_{j+1}\,\mathrm{Tanh}z_{j+1}+1-2\nu_{j+1}\\
&Q_{(4j+4)(4j+1)}=-1\\
&Q_{(4j+4)(4j+2)}=\mathrm{Tanh}z_{j+1}(1-2\nu_{j+1})-z_{j+1}\ (j=1\text{ to }n-2)
\end{aligned}
\qquad \text{(A3)}
$$

여기서, 명시되지 않은 나머지 항들은 전부 0이며 $\Gamma_j\equiv\mu_j/\mu_{j+1}$이고, μ_j는 각 탄성층의 전단계수이다.