

< 논 문 >

## 일반 비직교 표면좌표계에서의 비압축성 점성유동의 수치해석 : Hybrid법과 QUICK법의 비교

강동진\* · 배상수\*\*

(1995년 6월 1일 접수)

### Calculations of Incompressible Flows In General Nonorthogonal Body Fitted Coordinates : Comparison of Hybrid and QUICK Schemes

Dong Jin Kang and Sang Soo Bae

**Key Words :** General Nonorthogonal Body Fitted Coordinates(일반 비직교 표면좌표계), Convection Term(대류항), Higher Order Upstream Differencing(고차 상류차분법)

#### Abstract

In this paper, two discretization methods, hybrid and QUICK, are tested for the Navier-Stokes equations written in general nonorthogonal body fitted coordinates. Comparison is made by calculating two laminar flows at low Reynolds numbers of 10~100. One is a two-dimensional channel of gradually expanding cross section and the other is an axisymmetric flow through a circular tube having a circular constriction. Results show that the QUICK scheme results in a numerical solution more accurate than that of hybrid. The QUICK scheme also shows faster convergence for both test cases. As the number of grid points increases, all numerical solutions converge with more oscillation. The number of grid points in the y-direction(cross stream direction) is also shown to play a significant role in the approximation of convection term within separated flow zone.

#### 기 호 설 명

$h$  : 채널 높이의 반  
 $P_w$  : 벽면의 압력  
 $R_0$  : 원형 관의 반지름  
 $x_0$  : 축소부의 길이  
 $u, v$  : x-방향, y-방향 속도성분  
 $U_{av}$  : 평균유속  
 $Re$  : 레이놀즈 수

(이차원 확대 채널  $Re = \frac{2U_{av}h}{\nu}$ )

(축대칭 유동장  $Re = \frac{2U_{av}R_0}{\nu}$ )

$x, y$  : 직각 좌표계  
 $\xi, \eta$  : 일반 비직교 표면좌표계  
 $U, V$  : 반변(Contravariant) 속도성분  
 $u_s, u_n$  : 공변(covariant) 속도성분

하첨자

$w$  : 벽면

#### 1. 서 론

\*회원, 영남대학교 기계공학과  
 \*\*영남대학교 대학원 기계공학과

문제들이 수치적으로 연구되고 있으며, 특히 그 중에서도 전산 유체역학(computational fluid dynamics) 분야는 그 연구범위를 폭발적으로 넓혀가고 있는 학문분야의 하나이다. 이에 따라 매년 수많은 수치해석적 연구결과들이 전문잡지에 발표되고 있다. 그런데 이러한 수치적 연구는 기본적으로 계산 영역을 유한 개의 격자 혹은 요소로 분할하고 지배방정식을 수치적으로 근사한다는 점에서 다소의 오차를 가지게 마련인데, 문제에 따라서는 격자수나 요소수를 증가시켜도 지배방정식의 수치적 근사로 인한 오차나 기계적 오차 등의 복합적인 요인으로 수치해의 오차가 충분히 작아지지 않는 경우가 적지 않다. 또한 동일한 문제에 대한 수치해석의 결과도 연구자에 따라 크게 다른 경우도 있다.

이러한 관점에서 살펴보면, 최근에 AIAA<sup>(1)</sup>에서 2차 이상의 절단오차(truncation error)를 가지는 수치해석 방법의 사용을 적극적으로 권장하고, 수치해석결과의 오차해석을 적극적으로 요구하고 있는 사실은 수치해석적 연구의 신뢰도 향상에 크게 기여할 것으로 기대된다.

한편, 유체유동(fluid flow)은 유속의 증가에 따라 포물형(parabolic) 성질이 강해져서 2차의 절단오차를 가지는 중앙차분법(central differencing)은 수치적으로 불안정한 거동을 보여, 높은 레이놀즈 수 유동(high Reynolds number flows) 해석에는 인공확산(artificial diffusion) 항을 첨가한 중앙차분법<sup>(2)</sup>, 여러 가지 형태의 상류차분법(upwind differencing) 혹은 hybrid법<sup>(3)</sup> 등을 사용하는 것이 일반적인 방법이다. 이때 사용되는 상류차분법으로는 QUICK(quadratic upstream interpolation for convective kinematics),<sup>(4)</sup> CUI(cubic upstream interpolation),<sup>(5)</sup> CCCT(curvature compensated convective transport),<sup>(6)</sup> SMART(sharp and monotonic algorithm for realistic transport),<sup>(6)</sup> SHARP(simple high accuracy resolution program)<sup>(5)</sup> 등을 예로 들 수 있겠다.

연구문헌에 제시되어 있는 여러 종류의 고차 상류차분법 중에서 QUICK법은 최근 들어 여러 전산 유체역학자에 의해 애용되고 있으며, 상대적으로 많은 연구가 이루어져 안정된 수치적 거동을 보이는 여러 가지 형태의 QUICK법들이 문헌에 나타나 있다. 예를 들면 Pollard 등<sup>(7)</sup>과 Hayase 등<sup>(8)</sup> 수치적으로 보다 안정된 해의 거동을 보여주는 QUICK법을 제시한 바 있고, 국내에서도 조성호

등<sup>(9)</sup>과 신종근 등<sup>(10)</sup>은 유사한 연구를 수행한 바 있다.

그런데, 현재까지 연구문헌에 발표된 연구들은 직교좌표계(rectangular coordinate system)에서의 대류항 처리를 주로 다루고 있어, 최근 들어 널리 사용되고 있는 일반 비직교 표면좌표계(generalized nonorthogonal body fitted coordinate system)에서의 대류항의 차분기법이 해의 정확도와 수치적 거동의 안정성 등에 어느 정도의 영향을 미치는지를 직접적으로 평가하기는 어렵다. 특히 일반 비직교 표면좌표계와 정규(regular) 격자계를 사용한 수치해석 방법에서의 QUICK법의 거동을 저 레이놀즈 수 영역에서 살펴본 연구는 흔하지 않다.

일반 비직교 표면좌표계에서의 Navier-Stokes 방정식의 수치해석 방법은 많은 연구가에 의해 꾸준히 다루어져 오고 있는 연구과제로, 국내외의 연구문헌에 다양한 방법들이 제시되어 있지만, 본 연구에서는 지자가 선행연구<sup>(11)</sup>에서 제시한 수치해석 방법을 사용하였다. 이 방법에 대한 자세한 서술은 참고문헌 (11)에 나타나 있으므로 여기서는 생략한다.

정리하면, 본 연구에서는 Navier-Stokes 방정식의 수치해석에서 대류항의 이산화 방법으로 널리 사용되고 있는 hybrid법과 QUICK법이 일반 비직교 표면좌표계에서 어떤 거동을 보이는지를 비교 연구하였으며, 이때 사용된 수치해석 방법은 저자가 선행연구에서 제시한 바 있다. 또 예제계산문제로는 이차원 확대채널내의 유동과 축소부류 가진 원관내의 유동 등을, 특히 레이놀즈 수 10~100 사이의 저 레이놀즈 수 영역에서 선택하였다.

## 2. 지배방정식과 대류항 이산화

### 2.1 지배방정식

본 논문에서는 이차원 직교좌표계와 축대칭 원통좌표계에서의 Navier-Stokes 방정식을 일반 비직교 표면좌표계로 좌표 변환하여 예제 문제를 풀었지만, 두 가지 형태의 지배방정식이 유사하므로 이차원 직교좌표계의 경우만을 정리하였다.

비압축성 Navier-Stokes 방정식을 비직교 표면좌표계에서 표현하면 다음의 식 (1)과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t} Ju_i + \frac{\partial}{\partial \xi} (JUu_i + JP\frac{\partial \xi}{\partial x_i}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (JVu_i + JP\frac{\partial \eta}{\partial x_i})$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi} (Jg^{11} \frac{\partial u_i}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (Jg^{12} \frac{\partial u_i}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (Jg^{21} \frac{\partial u_i}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (Jg^{22} \frac{\partial u_i}{\partial \eta}) \quad (1)$$

여기서  $(\xi, \eta)$ 는 비직교 표면좌표계의 축이며 나머지 좌표변환 함수들은 다음과 같이 정의된다.

$$J = x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta, \quad g^{ij} = (\xi_i)_x (\xi_j)_x + (\xi_i)_y (\xi_j)_y$$

$$\xi_x = \frac{y_\eta}{J}, \quad \xi_y = -\frac{x_\eta}{J}, \quad \eta_x = -\frac{y_\xi}{J}$$

and  $\eta_y = \frac{x_\xi}{J}$  (2)

또  $U$ 와  $V$ 는 각각  $\frac{y_\eta u_{i,j} - x_\eta v_{i,j}}{J}$  와  $\frac{-y_\xi u_{i,j} + x_\xi v_{i,j}}{J}$  로 정의되는 반변 속도성분 (contravariant velocity component) 이다.

연속방정식은 다음의 식 (3)으로 표현된다.

$$\frac{\partial J U}{\partial \xi} + \frac{\partial J V}{\partial \eta} = 0 \quad (3)$$

### 2.2 대류항 이산화

지배방정식 식 (1)을 Fig. 1과 같은 유한체적에 대하여 적분하면, 유한체적의 각 경계면에서 속도 성분의 값이 필요한데 이를 근사하는 방법으로 hybrid법과 QUICK법을 살펴보았다. Fig. 1에 도시되어 있는 바와 같이 이차원 유한체적은 e, w, n, s의 네 개의 경계면을 가지는데, 본 논문에는 경계면 e에서의 속도성분을 근사하는 방법만을 간략하게 서술하였다. 보다 자세한 내용은 참고문헌(3, 8)에서 찾을 수 있다.

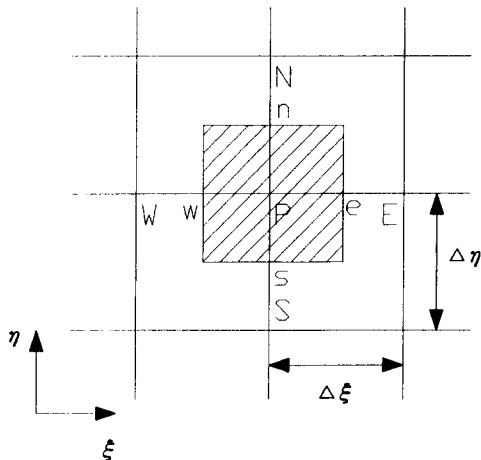


Fig. 1 Schematic of a finite volume

Hayase 등<sup>(8)</sup>은 직교좌표계에서의 QUICK법을 제시하였는데, 본 연구에서는 이를 다음과 같이 적용하였다.

e경계면에서의 반변 속도성분  $U$ 가 0보다 큰 경우

$$u_e = u_P + \frac{1}{8}(-u_w - 2u_P + 3u_E) \quad (4)$$

e경계면에서의 반변 속도성분  $U$ 가 0보다 작은 경우

$$u_e = u_E + \frac{1}{8}(-5u_E + 6u_P - u_w) \quad (5)$$

여기서 하첨자 W, E, S, N은 Fig. 1에 도시되어 있듯이 유한체적의 중심점 P의 좌우상하에 위치한 격자점을 가리킨다.

Hybrid법은 이미 널리 알려져 있는 수치기법이므로 본 논문에서는 서술을 생략한다. 자세한 내용은 참고문헌 (3)에서 찾을 수 있다.

### 3. 수치해석 과정

본 연구에서 사용하는 수치해석 과정은 참고문헌 (11, 21)에 자세히 서술되어 있지만, 이해를 돕기 위해 간략하게 정리하면 다음과 같다.

(1) 경계조건을 대입하고 속도장을 적절히 가정한다.

(2) 연속방정식으로부터 유도된 차분 압력방정식을 풀어서 압력장을 수정한다.

(3) 위의 과정 (2)에서 구한 압력장을 이용하여 운동량의 방정식을 풀어서 속도장을 구한다. 이때 직교좌표계의 속도성분  $u$ 와  $v$  대신에 본 연구에서는 공변 속도성분  $u_\xi$ 와  $u_\eta$ 에 대한 차분방정식을 유도하여 푼다.

(4) 위의 과정 (3)에서 구한 속도장의 최대변화가 미리 설정한 값보다 크면 과정 (2)로 돌아가서 과정 (2)~(4)를 반복한다.

과정 (2)에서 압력방정식의 유도에는 Hobson 등<sup>(8)</sup>이 제안한 소위 압력대입법 (pressure substitution method)이 사용되며, 이에 대한 자세한 내용은 참고문헌(11, 12)에 정리되어 있다.

### 4. 결과 및 토의

본 논문에서는 운동량 방정식에서 대류항의 차분

방법으로 흔히 사용되는 hybrid법과 QUICK법을 일반 비직교 표면좌표계에서 사용할 때 수치해에 미치는 영향을 저 레이놀즈 수 유동에 대하여 다음과 같이 살펴보았다.

4.1 이차원 확대 채널 내의 유동

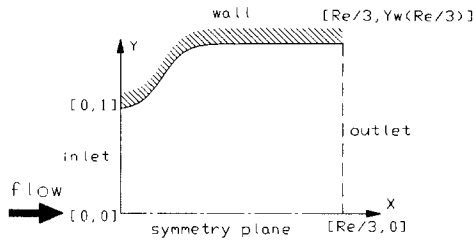
Fig. 2(a)는 본 연구에서 다룬 이차원 확대 채널의 모양을 도시한 그림이다. 그림에서, 채널의 벽면은 다음의 식 (6)으로 정의되며 채널 입구부터 바로 확대된다. 또한 레이놀즈 수가 작을수록 채널은 급하게 확대된다.

$$Y_{wall} = 1 - \frac{\tanh(2 - 30x/Re) - \tanh 2}{2},$$

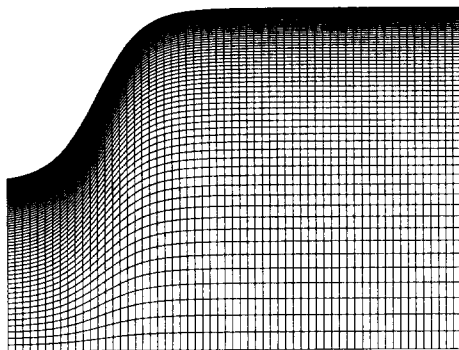
$$0 \leq x \leq \frac{Re}{3} \quad (6)$$

여기서  $Re$ 는 레이놀즈 수로 채널 입구의 평균유속  $U_{av}$ 과 채널 입구 크기의 반인  $h$ 를 이용하여  $2U_{av}h/\nu$ 로 정의된다.

Fig. 2(a)에 도시된 이차원 확대 채널은 로마에서 개최된 Fifth International Association for Hydraulic Research Working Group on Refined



(a) Schematic

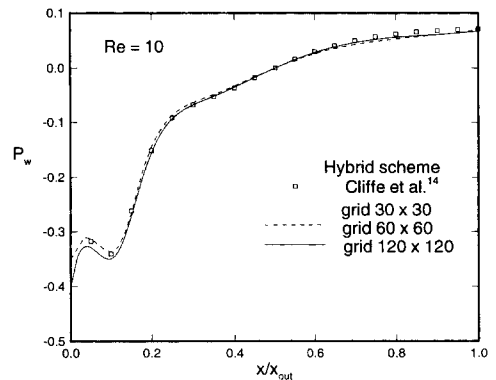


(b) Grid (60x60)

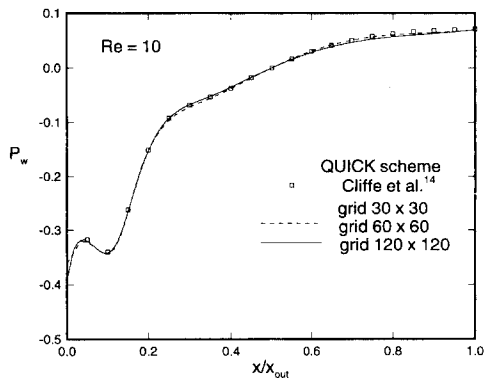
Fig. 2 Two dimensional channel

Modeling of Flows<sup>(13)</sup>(이하 5차 IAHR이라 함)에서도 다루어진 문제로 비직교 표면좌표계에서 개발된 해석 프로그램의 시험에 자주 사용되고 있다.

이차원 확대 채널에 대한 수치해석적 선행연구는 주로 레이놀즈 수가 10이거나 100인 두 가지 경우를 다루고 있어 본 연구에서도 같은 유동조건을 계산하였다. 계산영역도 선행연구<sup>(13~15)</sup>에서와 같은 크기로 잡았다. 비교 데이터로는 5차 IAHR에서 비교자료로 사용한 Cliffe 등<sup>(14)</sup>의 수치해를 선택하였다. Cliffe 등<sup>(14)</sup>의 결과는 계산영역을 약 1800개 (60x30)의 유한요소로 분할하여 유한요소법으로 얻은 것이다. Napolitano 등<sup>(13)</sup>이 지적한 바와 같이 본 예제 문제는 간단한 기하학적 형상에도 불구하고 대단히 까다로운 문제로, 5차 IAHR에서 계산한 수치해들이 서로 상당한 차이를 보이고 있으며, 이의 원인 중 하나는 충분하지 않은 격자수로



(a) Hybrid scheme



(b) QUICK scheme

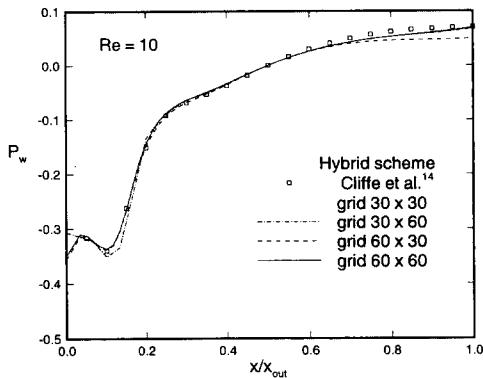
Fig. 3 Comparison of wall pressure distributions for Re=10

판단되어 격자수를 늘려가며 수치해의 거동을 살펴 보았다.

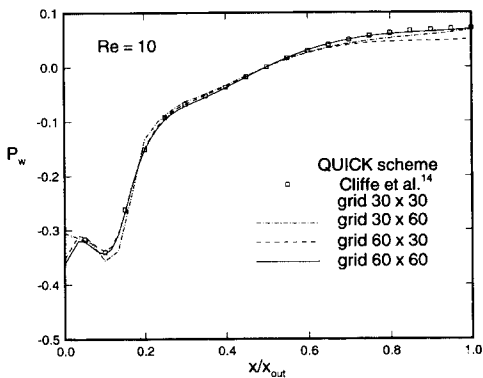
x-방향 격자는 계산영역을 일정한 크기로 나누어 구성하고, y-방향으로는 두 격자간 간격이 일정한 비율로 증가하도록하여 Fig. 2(b)에 도시된 바와 같이 벽면 부근에 상대적으로 많은 격자가 밀집되도록하였다. 경계조건으로는 채널의 입구와 출구에서 모두 유동이 완전히 발달되었다(fully developed flow)고 가정하였고, 벽면에서는 점착조건(no-slip condition)을 대칭면에서는 대칭조건(symmetric condition)을 사용하였다. 수렴조건으로는 두 반복계산 간의 속도성분의 최대 변화량이  $10^{-4}$ 보다 작을 때를 기준으로 하였다.

Fig. 3은 레이놀즈 수가 10인 경우에 얻은 수치해로 격자수 변화에 따른 채널 벽면을 따른 압력분포  $P_w = p_w / \rho U_{av}^2$ 의 변화를 비교하여 도시한 그림이다. Fig. 3(a)와 (b)는 각각 hybrid법과 QUICK

법으로 얻은 결과이며, 그림에서 기호는 Cliffe 등<sup>(14)</sup>의 수치해로 본 수치해와 좋은 일치성을 보이고 있다. Fig. 3(a)에 도시된 hybrid법은 격자수의 증가에 따라 채널의 입구에서 다소 심한 변화를 보이는 반면, Fig. 3(b)의 QUICK법은 상대적으로 빠른 수렴성을 보이고 있다. 또한  $120 \times 120$ 의 상당히 많은 격자수로 얻은 hybrid법 수치해도 같은 격자수의 QUICK법 수치해나 Cliffe 등<sup>(14)</sup>의 수치해와 비교할 때 입구 영역에서 큰 차이를 보이고 있다. Hybrid법이 QUICK법에 비해 채널 입구 영역에서 심한 격자 의존성을 보이는 것은 채널은 입구에서부터 바로 확대되며, 이로 인해 강한 박리유동(separated flow)이 형성되기 때문으로 판단된다. x- 및 y-방향 격자수가 수치해에 미치는 영향을 자세히 살펴보기 위해  $30 \times 60$ 과  $60 \times 30$ 의 격자로 얻은 수치해를  $30 \times 30$ 과  $60 \times 60$ 의 수치해와 비교하여 보았다. Fig. 4는 그 결과로 (a)와 (b)는 각각

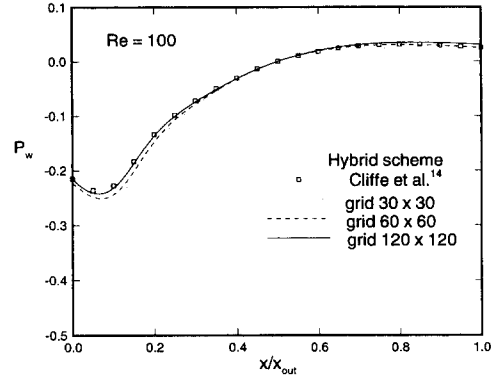


(a) Hybrid scheme

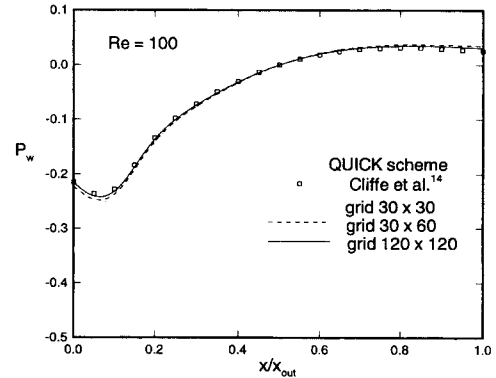


(b) QUICK scheme

Fig. 4 Effect of grid refinement for Re=10



(a) Hybrid scheme



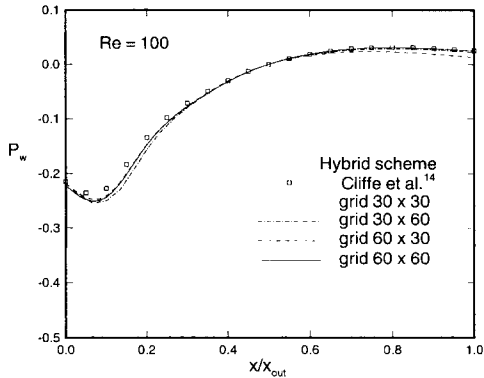
(b) QUICK scheme

Fig. 5 Comparison of wall pressure distributions for Re=100

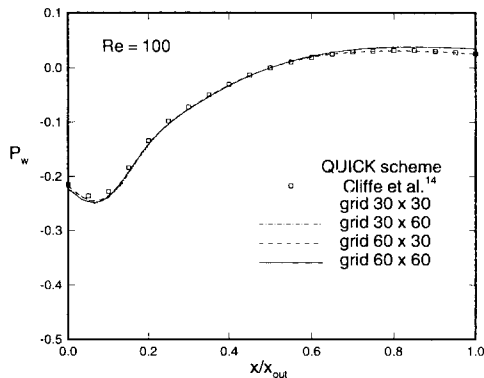
hybrid법과 QUICK법으로 얻은 수치해이다. 두 그림을 살펴보면 대류항 처리기법에 관계 없이  $60 \times 30$ 의 수치해는  $30 \times 30$ 의 수치해에 비해 채널 입구 영역 ( $x/x_o \leq 0.2$ )에서 크게 개선된 해를 주고 있으며,  $30 \times 60$  격자수 수치해는 채널 입구 영역 이후에서 크게 개선됨을 알 수 있다. 여기서 채널 입구 영역에서는 박리유동이, 하류 영역에서는 박리유동에 의한 경계층의 급속한 성장과 채널의 확대에 따른 유동영역의 확대가 수치해의 격자 의존성에 주된 영향을 끼친 것으로 사료된다.

Fig. 5는 레이놀즈 수가 100인 경우에 얻은 수치해로 격자수에 따른 채널 벽면을 따른 압력분포의 변화를 비교한 그림이다. Fig. 5(a)와 (b)는 각각 hybrid법과 QUICK법 결과이며, 그림에서 기호는 Cliffe 등<sup>(14)</sup>의 수치해로 본 수치해와 좋은 일치율을 보이고 있다. Fig. 5(a)와 (b)를 살펴보면, 전체적으로 레이놀즈 수 10의 경우와 유사하지만, hybrid

법도 채널 입구 영역에서 만족할만한 수렴거동을 보이고 있는 것이 눈에 띈다. 이러한 개선은 식 (6)에서 알 수 있는 바와 같이 레이놀즈 수가 증가하면 채널 벽면이 완만하게 확대되기 때문으로 판단되며, Fig. 3과 Fig. 5의  $x/x_o = 0.2$  부근의 역압력구배(adverse pressure gradient) 비교에서 확인할 수 있다. 다시 말하면, 레이놀즈 수가 100인 경우의 역압력구배가 10인 경우에 비해 완만하여, 박리유동의 세기가 약해지고 hybrid법이 크게 개선된 수렴거동을 보이는 것으로 판단된다. x- 및 y-방향 격자수의 증가에 따른 수치해의 거동은 레이놀즈 수 10의 경우와 유사하여, x-방향으로의 증가는 채널입구의 박리유동 영역에서 y-방향으로의 증가는 박리유동 이후의 영역에서 수치해를 개선시켰고, 이런 거동은 대류항 처리기법과는 무관하였다. Fig. 6은 그 결과를 도시한 그림으로, (a)는 hybrid법의 결과를 (b)는 QUICK법 결과를 각각

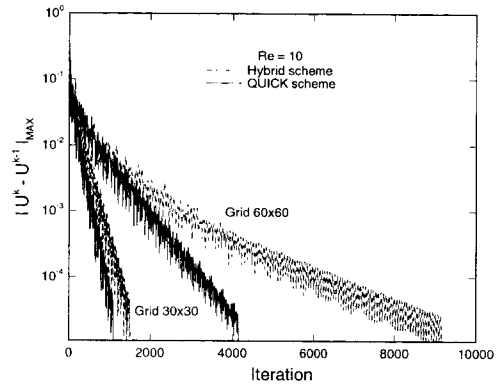


(a) Hybrid scheme

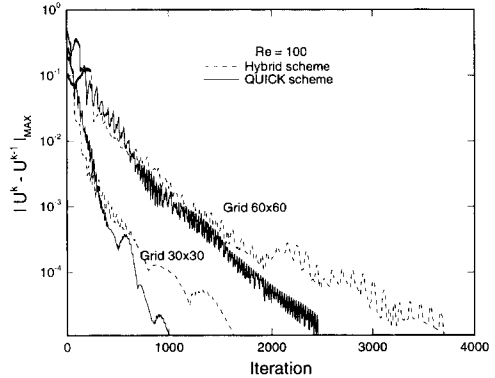


(b) QUICK scheme

Fig. 6 Effect of grid refinement for Re=100



(a) Re=10



(b) Re=100

Fig. 7 Comparison of convergence history

보여주고 있다. 두 그림에서, 30×30과 60×30의 두 수치해는 x-방향 격자수 변화의 영향을 30×30과 30×60의 두 수치해는 y-방향 격자수 변화의 영향을 잘 보여주고 있다.

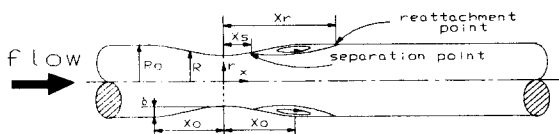
Fig. 7은 본 수치해의 수렴거동을 반복계산에 따른 속도성분  $(u^k - u^{k-1})_{max}$ 의 최대 변화량으로 도시한 그림으로, (a)는 레이놀즈 수가 10인 경우이고 (b)는 100인 경우이다. 두 그림을 살펴보면, hybrid법이나 QUICK법은 유사한 수렴거동을 보여주지만, 수렴속도는 10과 100의 두 레이놀즈 수 모두에 대하여 QUICK법이 격자수에 관계 없이 우수함을 알 수 있다. 또한 격자수의 증가에 따른 반복 횟수도 레이놀즈 수 100인 경우는 hybrid법과 QUICK법이 약 2.5배(격자수가 30×30에서 60×60으로 4배 증가한 경우)의 비슷한 증가율을 보이지만, 레이놀즈 수 10의 경우는 QUICK법이 약 4배의 증가율을 보인 반면 hybrid법은 약 6.2배의 높은 증가율을 나타내고 있다. 이러한 수렴거동은 레이놀즈 수 10인 경우에 채널이 더욱 급격하게 확대되기 때문으로 판단되며, 박리유동의 세기가 강해질수록 hybrid법의 격자수 증가에 대한 수렴성이 저하되는 것으로 보인다. 또 차분기법에 관계 없이 격자수가 증가함에 따라 수치해가 심하게 진동함을 두 그림으로부터 추정할 수 있다.

4.2 축대칭 유동장의 경우

두번째 예제문제로는 Fig. 8(a)에 도시되어 있는 축소부분 가지는 원형관 내의 축대칭 유동을 선택하였다. 이 축대칭 유동장은 생의학(biomedical engineering)적인 관심 외에도, 축대칭 유동장의 대표적인 예제로 여러 연구가에 의해 다루어진 바 있다. (15~19)

Fig. 8(a)의 원형관에서 축소부는 다음의 식 (7)로 정의된다.

$$\frac{R}{R_0} = 1 - \frac{\delta}{2R_0} \left( 1 + \cos \frac{\pi x}{x_0} \right), \quad -x_0 < x < x_0 \quad (7)$$



(a) Schematic

여기서  $x_0$ 와  $\delta$ 는 축소부의 길이와 최소반경에 관한 양으로 본 연구에서는 선행연구(15~19)에서와 같이 다음의 두 경우를 고려하였다.

$$\text{case 1: } \frac{\delta}{R_0} = \frac{2}{3}, \quad \frac{x_0}{R_0} = 4 \quad (8)$$

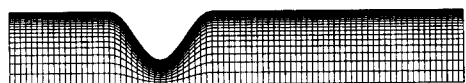
$$\text{case 2: } \frac{\delta}{R_0} = \frac{2}{3}, \quad \frac{x_0}{R_0} = 2 \quad (9)$$

또  $R_0$ 는 축소되지 않은 원형관의 반경이며, 레이놀즈 수는 축소되지 않은 원형관내의 평균유속  $U_{av}$ 를 이용하여  $2U_{av}R_0/\nu$ 로 정의하였다.

계산영역은 선행연구 결과와의 비교를 위해 참고문헌(16~19)에 사용된 것과 같은 크기로 잡아  $x/R_0=24$ 에 하류 경계를 두었다. x-방향 격자에 대한 독립성(grid independence)은 Melaen(15)의 연구와 같은 선행연구에서 다루어진 바 있지만, y-방향 격자에 대한 독립성은 소홀히 다루어졌다. 실제로 참고문헌(15~19)에 사용된 x-방향 격자수는 44, 82, 91, 111 등으로 다양하며 조밀하지만, y-방향 격자수는 22 혹은 32로 상대적으로 작은 수를 사용하였다. 따라서, 본 연구에서는 x-방향 뿐만 아니라 y-방향 격자수도 늘려가며 계산을 수행하여 양방향 격자수에 독립적인 수치해를 구하였다. 이때 x-방향 격자는 균일 분포로 구성하였다. Fig. 8(b)는 본 예제 계산에 사용된 격자분포의 한 예로 46×22의 경우이다. 레이놀즈 수는 40과 100의 두 가지 경우를 고려하였다. 경계조건으로는 원형관의 입구와 출구에서 각각 완전히 발달된 유동으로 가정하고, 벽면에서는 점착조건을 대칭면에서는 대칭조건을 가정하였다. 따라서 앞서 다룬 이차원 확대 채널내의 유동과 유사함으로 자세한 서술은 생략하고, 입구에 사용된 입구속도 분포만 다음의 식 (10)에 나타내었다.

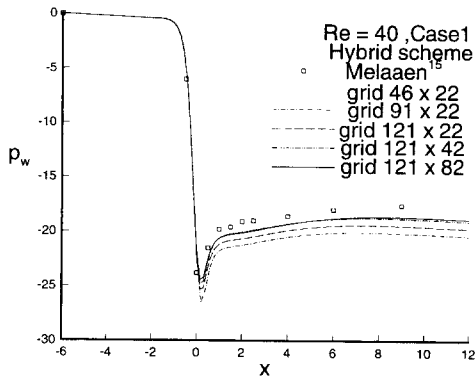
$$\frac{u}{2U_{av}} = 1 - \left( \frac{r}{R_0} \right)^2, \quad \frac{v}{2U_{av}} = 0 \quad (10)$$

Fig. 9는 case 1의 경우에 레이놀즈 수를 40으로

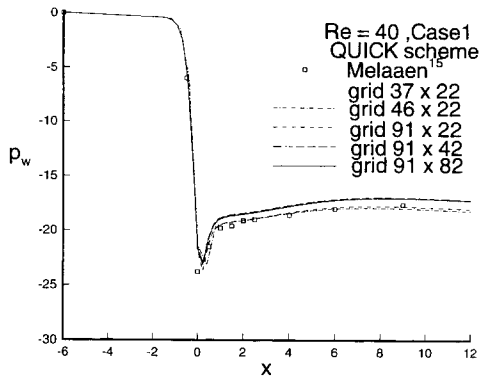


(b) Grid(46x22)

Fig. 8 Axisymmetric channel with constriction



(a) Hybrid scheme

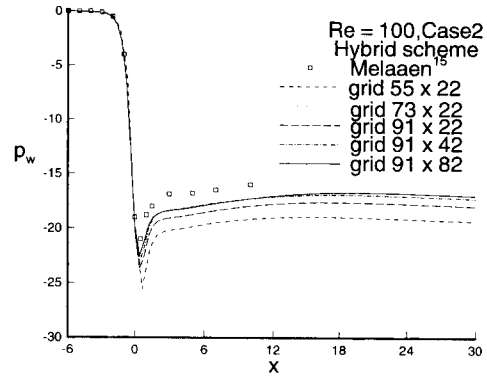


(b) QUICK scheme

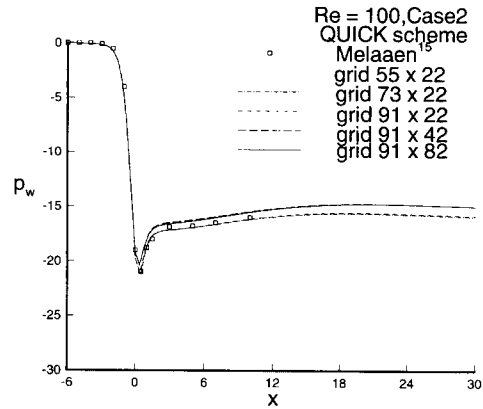
Fig. 9 Comparison of wall pressure distributions for case1, Re=40

두고 얻은 벽면 압력분포를 Melaaen<sup>(15)</sup>의 수치해와 비교하고 있다. Fig. 9(a)와 (b)는 각각 hybrid법과 QUICK법으로 얻은 수치해이다. 여기서 Melaaen<sup>(15)</sup>의 수치해는 82×22의 격자수로 이차상류차분법(second order upwind differencing scheme)을 이용하여 SIMPLE 알고리즘으로 얻은 수치해이다. Fig. 9(a)의 hybrid법은 x-방향 격자수의 증가에 따라 Melaaen<sup>(15)</sup>의 수치해에 접근하는 경향을 보이지만, 122×22의 많은 격자수의 경우에도 Melaaen<sup>(15)</sup>의 수치해와는 상당한 차이를 보이고 있다. 특히, x=0(최대 축소부 지점)으로 이후부터 박리유동이 형성됨) 부근에서부터 큰 차이를 보인다. 한편, y-방향으로는 42개 이상의 격자수에서 y-방향 격자 독립성을 얻을 수 있음을 알 수 있다.

Fig. 9(b)의 QUICK법은 x-방향 격자수가 46 이



(a) Hybrid scheme



(b) QUICK scheme

Fig. 10 Comparison of wall pressure distributions for case2, Re=100

상이 되면 x-방향 격자에 대한 독립성을 보이며, Melaaen<sup>(15)</sup>의 수치해와도 거의 일치함을 알 수 있다. 다만, 이때 얻은 본 수치해나 Melaaen<sup>(15)</sup>의 수치해는 y-방향으로 22개의 격자수를 씌어 얻은 것으로, Fig. 9(b)에서 알 수 있는 바와 같이 완전한 격자 독립성을 가진 해는 아니다. 다시 말하면 91×22와 91×42 그리고 91×82의 격자수로 얻은 세 가지 수치해를 비교하면 y-방향 격자 의존성을 배제하기 위해서는 약 42개 이상의 y-방향 격자가 필요함을 알 수 있으며, 이러한 y 방향 격자에 대한 거동은 Fig. 9(a)의 hybrid법의 경우에도 동일하게 관찰되었다. Fig. 9(a)와 (b)의 두 그림을 비교하여 보면, 같은 격자계에서 hybrid법 수치해가 QUICK법 수치해보다 벽면 압력을 낮게 예측하는데, 이러한 경향은 Melaaen<sup>(15)</sup>의 연구결과(power law와 이차 상류차분법을 비교한 결과 power law



가 낮게 예측하였음)와 일치하는 것이다.

식 (8)과 (9)를 비교해보면 case 2의 경우 축소부의 형상이 case 1에 비해 상대적으로 뭉뚱하여 하류 경계조건으로 완전히 발달된 유동을 가정하기 위해서는 보다 큰 계산영역이 필요하였고, 본 연구에서는 case 2의 경우 하류경계를  $x/R_0=30$ 의 위치에 두었다.

Fig. 10은 case 2이고 레이놀즈 수가 100인 경우에 얻은 벽면을 따른 압력분포를 Melaaen<sup>(15)</sup>의 수치해와 비교하고 있다. 여기서 (a)와 (b)는 각각 hybrid법과 QUICK법으로 얻은 본 수치해와 Melaaen<sup>(15)</sup>의 수치해를 비교하고 있으며, Fig. 9 (a)와 (b)의 case 1이고 레이놀즈 수가 40인 경우와 정성적으로 일치하는 거동을 보이고 있다. Fig. 10(a)의 hybrid법은 x-방향 격자수에 큰 의존성을 보이며,  $91 \times 22$ 의 많은 격자수의 경우에도 Melaaen<sup>(15)</sup>의 수치해와는 상당한 차이를 보이고 있으며, 이는 앞서 살펴본 Fig. 9에서도 확인한 것이다. 이에 비해 Fig. 10(b)의 QUICK법은 55개의 비교적 작은 수의 격자로도 좋은 수치해를 얻을 수 있으며, 격자수의 증가에 따른 수렴성도 좋음을 알 수 있다. 다만, 그림에서 Melaaen<sup>(15)</sup>의 수치해는 앞서 지적한 바와 같이  $82 \times 22$ 의 격자수로 이차 상류차분법을 이용하여 SIMPLE 알고리즘으로 얻은 것으로, y-방향으로의 격자 독립성을 확보하지 못한 수치해이다. 본 수치해석 실험에 따르면 y-방향으로 약 42개의 이상의 격자를 심어야 격자 의존성이 배제된 수치해를 얻을 수 있다. y-방향 격자

수의 영향은 유선분포를 도시한 Fig. 11 (a)에서도 확인할 수 있다. 그림을 살펴보면,  $91 \times 22$ 의 경우는  $91 \times 42$ 나  $91 \times 82$ 에 비해 박리유동 영역을 다소 작게 예측하고 있으며, Fig. 11 (b)에 도시된 hybrid법과 QUICK법의 비교에서도 hybrid법이 박리유동 영역을 작게 예측하고 있음을 살펴볼 수 있다. 따라서, 주유동방향이 x-방향일지라도 박리유동 영역에서는 y-방향으로의 격자수가 대류항 근사에 큰 영향을 미치고 있음을 알 수 있다.

Fig. 12는 hybrid법과 QUICK법의 수렴성을 비교한 그림으로, (a)는 case 1이고 레이놀즈 수가 40인 경우에 (b)는 case 2이고 레이놀즈 수가 100인 경우에 얻은 것이다. 두 그림을 비교해보면 QUICK법은 hybrid법과 전체적으로 유사한 수렴거동을 보이지만, 격자수와 레이놀즈 수에 관계 없이 빠른 수렴성을 보이고 있음을 알 수 있다. 앞서 다룬 이차원 경우와 마찬가지로 격자수가 증가함에

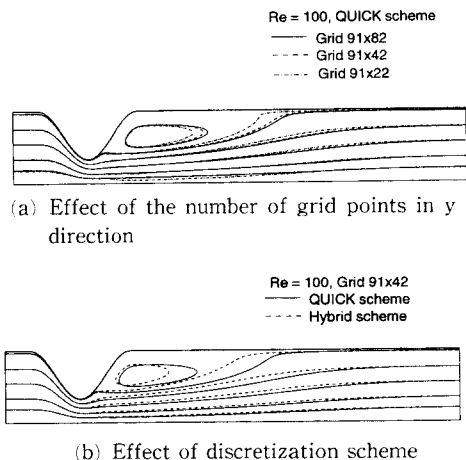
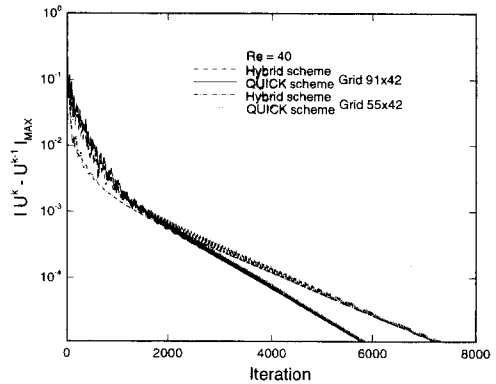
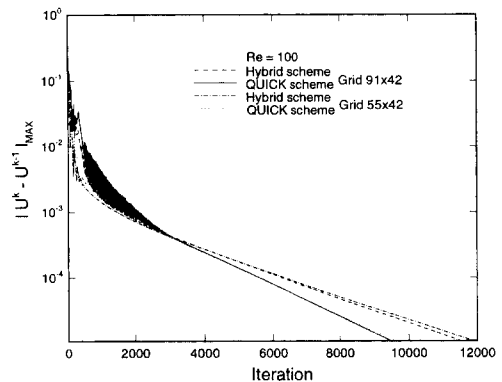


Fig. 11 Comparison of streamlines



(a) Case1, Re=40



(b) Case2, Re=100

Fig. 12 Comparison of convergence history

따라 수치해의 진동이 심해지며 특히 계산초기에 뚜렷함을 알 수 있다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 Navier-Stokes 방정식을 수치해석할 경우 대류항을 차분하는 방법으로 흔히들 사용하는 hybrid법과 QUICK법의 거동을 일반 비직교 표면좌표계에서 살펴보았다. 예제 문제로는 이차원 확대채널 유동과 축대칭 축소부를 가진 원형관내의 유동을 선택하여, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

① 이차원 확대 채널 내의 유동과 축대칭 유동의 두 가지 예제 문제 모두에 대하여 QUICK법이 레이놀즈 수나 격자수에 관계 없이 hybrid법에 비해 빠른 수렴거동을 보였다. 이차원 유동의 경우는 격자수가 증가함에 따라 hybrid법이 훨씬 큰 반복 횟수 증가율을 보였다(격자수가 4배 증가할 경우 hybrid법은 6.2배 QUICK법은 2.5배의 반복 횟수 증가율을 보였다). 또한 모든 수치해는 격자수가 증가함에 심하게 진동하며, 특히 계산초기에 뚜렷하였다.

② y 방향(반유동방향 cross flow direction)으로의 격자수는 박리유동 영역에서 대류항 근사에 큰 영향을 미치며, 격자수가 충분하지 않을 경우는 저차의 상류차분법을 사용하는 것과 유사한 효과를 살펴볼 수 있었다.

③ 선행연구 결과와의 정량적인 비교에서 같은 격자계에서 QUICK법이 hybrid법 보다 정확한 수치해를 주었으며, 특히 박리유동 영역에서 두드러졌다.

이상의 결론에서 알 수 있는 바와 같이 일반 비직교 표면좌표계에서도 QUICK법과 같은 고차 상류차분법을 사용하는 것이 레이놀즈 수가 증가하고 박리유동 영역이 커짐에 따라 수치적으로 유용한 것으로 판단된다.

## 참고문헌

- (1) AIAA, 1994, "Editorial Policy Statement on Numerical Accuracy and Experimental Uncertainty," *AIAA J.* Vol. 23, No. 1, p. 3.
- (2) Demirdzic, I. and Peric, M., 1990, "Finite Volume Method for Prediction of Fluid Flow in Arbitrarily Shaped Domains with Moving Boundaries," *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 10, pp. 771~790.
- (3) Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow," Hemisphere Pub. Co.
- (4) Leonard, B. P., 1979, "A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 19, pp. 59~98.
- (5) Leonard, B. P., 1979, "A Survey of Finite Differences of Opinion on Numerical Modelling of Incompressible Defusive Convection Equation," *ASME, Applied Mechanics Division*, Winter Annual Meeting.
- (6) Gaskell, P. H. and Lau, A. K. C., 1988, "Curvature-Compensated Convective Transport : SMART, a New Boundedness Perserving Transport Algorithm," *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, Vol. 8, pp. 617~641.
- (7) Pollard, A. and Siu, A. L. W., 1982, "The Calculation of Some Laminar Flows Using Various Discretization Schemes," *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 35, pp. 293~313.
- (8) Hayase, T., Humphery, J. A. C., and Grief, R., 1990, "A Consistently Formulated QUICK Scheme for Fast and Stable Convergence Using Finite Volume Iterative Calculation Procedures," *J. Comp. Physics*, Vol. 98, pp. 108~118.
- (9) 조성호, 강인준, 박승호, 1993, "Hybrid기법과 QUICK기법 : 공동유동의 계산 특성 비교," 대한기계학회논문집 제17권 제6호, pp. 1640~1647.
- (10) 신중호, 최영돈, 1992, "수치해의 정확성과 안정성이 보장되는 대류항 미분법 개선에 관한 연구," 대한기계학회논문집, 제16권 제6호, pp. 1178~1194.
- (11) 강 동진, 배 상수, 1995, "비직교 표면좌표계에서의 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 수치해석," 대한기계학회 인쇄중.
- (12) Hobson, G. V. and Lakshiminarayana, B., 1991, "Prediction of Cascade Performance Using an Incompressible Navier-Stokes Technique," *J. Turbomachinery*, Vol. 113, pp. 561~572.
- (13) Napolitano, M., and Orlandi, P., 1985,

- "Laminar Flow in a Complex Geometry: A Comparison," *Int. J. Nume. Methods Fluids*, Vol. 5, pp. 667~683.
- (14) Cliffe, K. A., Jackson, C. P., and Greenfield, A. C., "Finite Element Solutions for Flow in a Symmetric Channel with a Smooth Expansion," AERE-R. 10608.
- (15) Melaaen, M. C., 1992, "Calculation of Fluid Flows with Staggered and Nonstaggered Curvilinear Nonorthogonal Grids-A Comparison," *Numerical Heat Transfer, Part II*, Vol. 21, pp. 21~39.
- (16) Karki, K. C., 1986, "A Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speeds in Complex Geometries," Ph. D. thesis, Univ. of Minnesota.
- (17) Deshpande, M. D., Giddens, D. P. and Mabon, R. F., 1976, "Steady Laminar Flow Through Modeled Vascular Stenoses," *J. Biomech.*, Vol. 9, pp. 165~174.
- (18) Kadja, M., 1987, "Computation of Recirculating Flow in Complex Domains with Algebraic Reynolds Stress Closure and Body Fitted Meshes," Ph. D. thesis, Univ. of Manchester.
- (19) Rastogi, A. K., 1984, "Hydrodynamics in Tubes Perturbed by Curvilinear Obstructions," *Trans. ASME* Vol. 106, pp. 262~269.