

〈논 문〉

일반 비직교 표면좌표계에서의 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 수치해석

강동진* · 배상수**

(1995년 4월 14일 접수)

Calculation of The Incompressible Navier-Stokes Equations in A Generalized Nonorthogonal Body Fitted Coordinate System

Dong Jin Kang and Sang Soo Bae

Key Words : Generalized Nonorthogonal Body Fitted Coordinate System(일반 비직교 표면좌표계), Covariant Velocity Component(공변속도성분), Regular Grid(정규격자계)

Abstract

In this paper, a numerical procedure for the calculation of the incompressible Navier-Stokes equations in a generalized nonorthogonal body fitted coordinate system is proposed and is validated through three test problems. Present numerical procedure derives the pressure equation by using the pressure substitution method on the regular grid system, and discretized momentum equations are based on the covariant velocity components. Cavity flow, backward facing step flow, and two dimensional channel flow with a sinusoidal wavy wall are chosen as three test problems. Numerical solutions obtained by present procedure shows a good agreement with previous numerical and/or experimental results. Convergence rate is also satisfactory.

기 호 설 명	
C_j	: 벽면마찰계수
U, V	: 반변(contravariant) 속도성분
C_p	: 벽면압력계수
u_ξ, u_η	: 공변(covariant) 속도성분
τ_w	: 벽면전단응력
ξ, η	: 일반 비직교 표면좌표계
u, v	: x -방향, y -방향 속도성분
x, y	: 직각좌표계
하첨자	
av	: 평균
w	: 벽면

i, j : 1, 2 ($x_1=x, x_2=y$)
($\xi_1=\xi, \xi_2=\eta$)

1. 서 론

비압축성 Navier-Stokes 방정식의 수치해석에 널리 사용되는 수치해석 방법들은 크게 압력에 기초한 방법(pressure based algorithm)과 밀도에 기초한 방법(density based method)으로 나눌 수가 있다. 이 중에서 후자는 압축성 유동해석에 사용되던 수치해석 방법을 비압축성 유동해석에 적용하기 위해 개발된 방법으로, 연속방정식에 밀도의 시간도함수를 추가하여 수치해를 구하는 소위 가압축성 방법(pseudo-compressibility method)⁽¹⁾이 대표적

*회원, 영남대학교 기계공학과

**회원, 영남대학교 기계공학과 대학원

인 예이다. 이 방법은 비정상유동(unsteady flow)을 해석하는 경우 과도한 계산시간이 요구되는 단점이 있으며, 인공소산항(artificial dissipation)에 따라 수렴속도와 수치해가 영향을 받는 등의 단점이 있다. 반면 압력에 기초한 방법들은 지속적인 연구로 수렴성이 크게 향상되어 최근에 개발되는 수치해석 방법들은 대부분 이 방법을 사용하고 있다.

압력에 기초한 수치해석 방법들 중에서 전산 유체역학자들에 의해 자주 사용되는 방법들로는 SIMPLE⁽²⁾ 혹은 이의 개선된 형태 즉 SIMPLER, SIMPLEN, SIMPLEC 등⁽³⁾과 CELS⁽⁴⁾(coupled equation line solver) 그리고 PISO⁽⁵⁾(pressure implicit with splitting of operators) 등이 있으며, 본 연구에서 제시하는 수치해석 방법도 이들 수치해석 방법 중에서 여러 연구자들에 의해 다양한 형태의 문제에 적용되어 그 유용성이 입증된 SIMPLE 계열의 수치해석 방법과 전체적으로 유사하다.

한편, 압력에 기초한 비압축성 수치해석 방법들도 다음과 같은 몇 가지 수치해석 기법에 의해 서로 구분할 수 있다. 가장 먼저 수치해석에 사용된 좌표계의 선정을 들 수가 있으며, 종래는 직각좌표계(rectangular coordinate system)가 주로 사용되어 왔지만, 최근 들어 전산유체역학이 급속히 발전함에 따라 복잡한 기하학적 형상을 처리할 수 있는 일반 비직교 표면좌표계(generalized nonorthogonal body-fitted coordinate system)^(6~14)가 널리 사용되고 있다.

좌표계의 선정과 더불어 종속변수로 사용할 속도 성분(velocity component)의 선정을 두번째의 주요 수치해석 기법으로 지적할 수 있다. 실제로 일반 비직교 표면좌표계를 채택한 수치해석 관련 많은 연구논문들이^(6~14) 직교(cartesian), 공변(covariant), 그리고 반변(contravariant) 속도성분 등 여러 가지 종류의 속도성분을 종속변수로 사용할 바 있으며, 각각은 고유의 장단점을 지니고 있다. 이 중에서 직교속도성분의 경우 방정식은 간단하나 기하학적 형상(geometrical configuration)이나 유동형태가 복잡해지면 격자와 속도성분간의 왜곡도(skewness)가 커지고 수렴성이 저하되는 단점이 있으며, 반변속도성분의 경우는 유동이 복잡해지면 차분압력방정식의 수렴성이 떨어지는 것으로 알려져 있다. 이에 비해, 공변속도성분을 사용할 경우 차분운동량방정식은 다소 복잡해지나, 차분압력방

정식은 크게 간단해지며 유동이 복잡한 경우에도 수렴성이 떨어지지 않는다. 실제로 많은 선행 연구자들이 이러한 장점 때문에 공변속도성분을 일반 비직교 표면좌표계에서의 종속변수로 사용하고 있다^{(5),(6)}

세번째 수치해석 기법으로는 압력방정식의 유도 방식과 관계가 있다. 비압축성 유동을 수치해석하는데 가장 어려운 점의 하나는 명시된(explicit) 압력방정식이 없어, 연속방정식과 운동량방정식을 적절히 조합하여 압력방정식을 이끌어내야 한다는 것이다. 압력에 기초한 대부분의 수치해석 방법들은 차분운동량방정식과 연속방정식을 조합하여 차분압력방정식을 얻으며, 이는 Pantankar⁽²⁾가 처음 제시한 SIMPLE 알고리즘의 근간이다. 그런데, 이러한 형태의 차분방정식을 정규격자계(regular grid)에서 해석할 경우 Pantankar 등이 지적한 바와 같이 체스판 형태의 압력장(checker board pattern pressure field)이 형성될 우려가 있다. 따라서 Patankar가 치유책으로 제시한 엇물림 격자계(staggered grid)를 흔히들 사용한다.

그런데 엇물림 격자계는 계산영역이 복잡해지면 그 경계의 처리가 대단히 복잡해지며, 많은 컴퓨터의 저장용량이 요구되는 단점이 있다. 따라서 복잡한 형상에 대한 3차원 유동장 해석에는 정규격자계(regular grid)의 도입이 끊임없이 시도되어 왔으며, 최근에 개발되는 대부분의 코드는 정규격자계를 채택하고 있다.^(6~14)

정규격자계에서 체스판 형태의 압력장이 형성되는 것을 방지할 수 있는 방법으로는 참고문헌^(6~14)에서 살펴볼 수 있는 바와 같이, Rhie 등⁽⁶⁾의 소위 운동량보간법(momentum interpolation)과 Hobson 등⁽¹¹⁾이 제안한 소위 압력대입법(pressure substitution method)을 들 수 있다. 이 중에서 전자는 비교적 많은 연구자에 의해 시험된 바 있으며, 압력수정방정식의 도입시 요구되는 유한체적면(finite volume face)에서의 유속을 계산하면서 한 격자 사이에서 얻은 압력구배를 고려하여 체스판 압력장이 형성되는 것을 방지한다.⁽⁸⁾ 이와는 달리 압력대입법(pressure substitution method)은 연속방정식에서 직접 미분압력방정식을 유도하고 미분방정식에 나타나는 각 압력구배항을 한 격자 간격에서 구하는 방법이다. 따라서 이 방법은 운동량보간법과는 달리 Poisson 방정식 형태의 압력방정식을 직접 수치해석하므로 프로그램의 간결성뿐만 아

나라 계산시간 향상에도 크게 기여할 것으로 기대된다.

끝으로 대류항의 처리기법을 들 수 있다. 최근에 AIAA 분과⁽¹⁵⁾도 2차 이상의 절단오차(truncation error)를 가지는 수치해석 방법의 사용을 적극적으로 권장하고, 수치해석 결과의 오차해석을 적극적으로 요구하고 있는 사실에서 알 수 있듯이 대류항 처리기법은 수치해석 방법 선정시 주요항목의 하나이다.

널리 알려진 바와 같이 유체유동(fluid flow)은 유속의 증가에 따라 포물형(parabolic) 성질이 강해져서 2차의 절단오차를 가지는 중앙차분법(central differencing)은 수치적으로 불안정한 거동을 보여, 높은 레이놀즈수 유동(high Reynolds number flows) 해석에는 상류차분법(upwind differencing)이나 hybrid 법이 일반적으로 사용되어 왔다.⁽²⁾ 그런데 상류차분법은 물론이고 hybrid 법도 엄밀한 의미에서는 1차의 절단오차를 가지며 박리 유동영역에서는 그의 예측성이 크게 떨어지는 것으로 널리 알려져 있다. 이에 따라 여러 연구가에 의해 다양한 형태의 고차의 상류차분법(higher order upstream differencing)이 제시되어 왔으며, 예를 들면 QUICK(quadratic upstream interpolation for convective kinematics)⁽¹⁶⁾, CUI(cubic upstream interpolation)⁽¹⁷⁾, CCCT(curvature compensated convective transport)⁽¹⁸⁾, SMART(sharp and monotonic algorithm for realistic transport)⁽¹⁸⁾, SHARP(simple high accuracy resolution program)⁽¹⁷⁾ 등이 연구문헌에 발표된 바 있다.

연구문헌에 제시되어 있는 여러 종류의 고차 상류차분법 중에서 QUICK 법은 최근 들어 여러 전산유체역학자에 의해 애용되고 있는 차분법으로, 상대적으로 많은 연구가 이루어져 안정된 수치적 거동을 얻기 위한 여러 가지 형태의 QUICK 법들이 문헌에 나타나 있다. 예를 들면 Pollard 등⁽¹⁹⁾과 Hayase 등⁽²⁰⁾ 수치적으로 보다 안정된 해의 거동을 보여주는 QUICK 법을 제시한 바 있고, 국내에서도 조성호 등⁽²¹⁾과 신중근 등⁽²²⁾은 유사한 연구를 수행한 바 있다.

이상과 같은 분석을 근거로 저자는 다음과 같은 최신의 수치해석 기법들을 조합하여, 비압축성 점성 유동 해석방법을 구성하고, 이를 다양한 예제문제에 적용하여 봄으로써 본 방법의 타당성을 수치적으로 평가하고자 한다. 본 연구에서 제시하는 수치

해석방법은 일반 비직교 표면좌표계에서 공변속도 성분을 종속변수로 하며, Hobson 등의 압력대입 법과 정규격자계를 사용하고 QUICK 법으로 대류항을 처리하고자 한다. 예제문제로는 공동유동(cavity flow), 후향계단 재부착 유동, 정현파(sinusoidal wave) 벽면을 가지는 이차원 채널 유동 등 다양한 형태의 박리를 수반하는 유동을 선택하였다. 또한, 이 예제들은 $Re=400$ 의 낮은 레이놀즈수에서 $Re=10,760$ 의 높은 레이놀즈수에 이르는 광범위한 유동문제들이다. 저자는 본 연구에서 개발한 2차원 비압축성 코드를 압축성 유동장으로의 확대 적용과 3차원으로의 확장을 계속적으로 연구중이며, 본 논문은 이러한 일련의 연구의 초기결과이다.

2. 지배방정식 및 차분방정식

2.1 지배방정식

본 논문에서는 이차원 직교좌표계에서의 비압축성 비정상 Navier-Stokes 방정식을 일반 비직교 표면좌표계로 좌표 변환하여 얻은 다음과 같은 비압축성 비정상 Navier-Stokes 방정식을 이용하였다.⁽¹³⁻¹⁴⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} J u_i + \frac{\partial}{\partial \xi} (J U u_i + J p \frac{\partial \xi}{\partial x_i}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J V u_i + J p \frac{\partial \eta}{\partial x_i}) &= \frac{\partial}{\partial \xi} (J \Gamma g^{11} \frac{\partial u_i}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (J \Gamma g^{12} \frac{\partial u_i}{\partial \eta}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} (J \Gamma g^{21} \frac{\partial u_i}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J \Gamma g^{22} \frac{\partial u_i}{\partial \eta}) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 Γ 는 유체의 동점성계수 ν 를 가리키고, (ξ, η) 는 일반 비직교 표면좌표계의 축이며 나머지 좌표변환 함수들은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} J &= x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta, \quad g^{ij} = (\xi_i)_x (\xi_j)_x + (\xi_i)_y (\xi_j)_y, \\ \xi_x &= \frac{y_\eta}{J}, \quad \xi_y = -\frac{x_\eta}{J}, \quad \eta_x = -\frac{y_\xi}{J}, \quad \eta_y = \frac{x_\xi}{J} \end{aligned} \quad (2)$$

또 U 와 V 는 각각 $\frac{y_\eta u - x_\eta v}{J}$ 와 $\frac{-y_\xi u - x_\xi v}{J}$ 로 정의되는 반변속도성분이다.

연속방정식은 다음의 식 (3)과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial J U}{\partial \xi} + \frac{\partial J V}{\partial \eta} = 0 \quad (3)$$

2.2 차분방정식

운동량방정식 식 (1)을 x -방향 속도성분 u 에 대

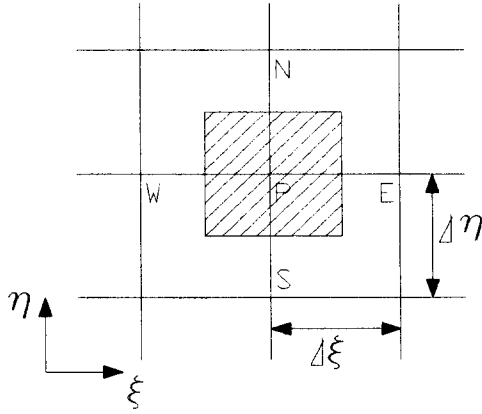


Fig. 1 Finite Volume

하여 정리한 후 Fig. 1과 같은 유한체적 (finite volume)에 대하여 적분하여 정리하면 다음의 식 (4)를 얻을 수 있다.

$$a_P u_P = a_E u_E + a_W u_W + a_N u_N + a_S u_S + b_u \quad (4)$$

여기서

$$\begin{aligned} a_E &= -F_e SUEM + D_{e1}, \quad a_W = F_w SUWP + D_{w1} \\ a_N &= -F_n SVN M + D_{n1}, \quad a_S = F_s SVNP + D_{s1} \\ a_P &= F_e SUEP + D_{e1} - F_w SUWM + D_{w1} \\ &\quad + F_n SVNP + D_{n1} - F_s SVSM + D_{s1} \\ b_u &= -(p_e y_\eta - p_w y_\eta) + (p_n y_\xi - p_s y_\xi) \\ &\quad - D_{e2}(u_{en} - u_{es}) + D_{w2}(u_{wn} - u_{ws}) \\ &\quad - D_{n2}(u_{ne} - u_{nw}) + D_{s2}(u_{se} - u_{sw}) \\ &\quad - F_e (a_{ue1} u_w + a_{ue2} u_P + a_{ue3} u_E \\ &\quad + a_{ue4} u_{EE}) \\ &\quad + F_w (a_{uw1} u_W + a_{uw2} u_W + a_{uw3} u_P \\ &\quad + a_{uw4} u_E) \\ &\quad - F_n (a_{wn1} u_S + a_{wn2} u_P + a_{wn3} u_N \\ &\quad + a_{wn4} u_{NN}) \\ &\quad + F_s (a_{ws1} u_{SS} + a_{ws2} u_S + a_{ws3} u_P \\ &\quad + a_{ws4} u_N) \end{aligned}$$

이고 F 는 $F=J(U, V)$ 로 정의되는 각 유한체적면을 통과하는 유량으로 하첨자 e, w, n, s 는 유한체적면의 위치를 가리킨다. 또 D 는 $D=(\alpha, \beta, r)\Gamma/J$ 로 정의되는 각 유한체적면에서의 확산을 나타내는 양으로 하첨자의 의미는 유량에서와 동일하다. SUEP, SUWP, SVNP, SVSP 등은 각각 유한체적면 e, w, n, s 에서 유량의 흐름 방향을 지시하는 양으로 F_e, F_w, F_n, F_s 가 0보다 클 경우에만 1이고 그 외에는 0으로 정의된다. SUEM, SUWM,

SVNM, SVSM 등도 같은 방법으로 정의되며 F_e, F_w, F_n, F_s 가 0보다 작을 경우에만 1이고 그 외에는 0으로 정의된다. 끝으로, a_{ue1}, \dots, a_{ue4} 는 유한체적면 e 에서 대류항을 Hayase 등⁽²⁰⁾의 QUICK 법으로 처리하는데 사용된 계수로 다음과 같이 정의된다.

Hayase 등⁽²⁰⁾에 의하면, 유한체적면 e 에서 유량이 양의 방향이면 속도성분 u 는 다음의 식 (5)로 근사할 수 있다.

$$u_e = u_P + \frac{1}{8}(-u_W - 2u_P + 3u_E) \quad (5)$$

또 식 (5)는 다음의 식 (6)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_e &= u_P + (a_{ue1} u_W + a_{ue2} u_P + a_{ue3} u_E \\ &\quad + a_{ue4} u_{EE}) \end{aligned} \quad (6)$$

따라서,

$$a_{ue1} = -\frac{1}{8}, \quad a_{ue2} = -\frac{1}{4}, \quad a_{ue3} = \frac{3}{8}, \quad a_{ue4} = 0$$

가 된다. 나머지 $a_{ue1} u_W \dots a_{uw4} u_W, a_{un1} \dots a_{un4} u_S, a_{us1} \dots a_{us4} u_S$ 등도 각각 유한체적면 w, n, s 에서 같은 방법으로 정의된 양이다.

y -방향 속도성분 v 에 대하여서도 같은 방법으로 다음과 같은 차분방정식을 얻을 수 있다.

$$a_P v_P = a_E v_E + a_W v_W + a_N v_N + a_S v_S + b_v \quad (7)$$

여기서

$$\begin{aligned} a_E &= -F_e SUEM + D_{e1}, \quad a_W = F_w SUWP + D_{w1} \\ a_N &= -F_n SVN M + D_{n1}, \quad a_S = F_s SVNP + D_{s1} \\ a_P &= F_e SUEP + D_{e1} - F_w SUWM + D_{w1} \\ &\quad + F_n SVNP + D_{n1} - F_s SVSM + D_{s1} \\ b_v &= (p_e x_\eta - p_w x_\eta) - (p_n x_\xi - p_s x_\xi) \\ &\quad - D_{e2}(v_{en} - v_{es}) + D_{w2}(v_{wn} - v_{ws}) - D_{n2}(v_{ne} \\ &\quad - v_{nw}) + D_{s2}(v_{se} - v_{sw}) \\ &\quad - F_e (a_{ve1} v_W + a_{ve2} v_P + a_{ve3} v_E \\ &\quad + a_{ve4} v_{EE}) \\ &\quad + F_w (a_{vw1} v_W + a_{vw2} v_W + a_{vw3} v_P \\ &\quad + a_{vw4} v_E) \\ &\quad - F_n (a_{wn1} v_S + a_{wn2} v_P + a_{wn3} v_N \\ &\quad + a_{wn4} v_{NN}) \\ &\quad + F_s (a_{ws1} v_{SS} + a_{ws2} v_S + a_{ws3} v_P \\ &\quad + a_{ws4} v_N) \end{aligned}$$

이다.

공변속도성분 u_ξ, u_η 에 대한 차분방정식은 다음

과 같이 구할 수 있다. 공변속도성분 u_ϵ 는 $u_\epsilon =$

$$\vec{V} \cdot e_\epsilon = \frac{\left[u \frac{\partial x}{\partial \xi} + v \frac{\partial y}{\partial \xi} \right]}{(r)^{1/2}}$$

로 정의되므로 식 (4)와 (7)을 조합하여 다음의 식 (8)과 같은 차분방정식을 얻을 수 있다.

$$a_P u_{\epsilon,p} = a_E u_{\epsilon,E} + a_W u_{\epsilon,W} + a_N u_{\epsilon,N} + a_S u_{\epsilon,S} + b_{\epsilon,u} \quad (8)$$

여기서

$$b_{\epsilon,u} = a_E (u'_{\epsilon,E} - u_{\epsilon,E}) + a_W (u'_{\epsilon,W} - u_{\epsilon,W}) + a_N (u'_{\epsilon,N} - u_{\epsilon,N}) + a_S (u'_{\epsilon,S} - u_{\epsilon,S}) + \left[b^u \frac{\partial x}{\partial \xi} + b^v \frac{\partial y}{\partial \xi} \right]_{(r)^{1/2}}$$

$$u'_{\epsilon,E} = \frac{\left[u_E \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)_P + v_E \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_P \right]}{(r)^{1/2}}$$

$$u'_{\epsilon,W} = \frac{\left[u_W \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)_P + v_W \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_P \right]}{(r)^{1/2}}$$

$$u'_{\epsilon,N} = \frac{\left[u_N \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)_N + v_N \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_N \right]}{(r)^{1/2}}$$

$$u'_{\epsilon,S} = \frac{\left[u_S \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)_S + v_S \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_S \right]}{(r)^{1/2}}$$

$$r = (x_\epsilon)^2 + (y_\epsilon)^2 \text{이다.}$$

같은 방법으로 공변속도성분 u_η 에 대한 차분방정식은 다음의 식 (9)와 같이 정리할 수 있다.

$$a_P u_\eta = a_E u_{\eta,E} + a_W u_{\eta,W} + a_N u_{\eta,N} + a_S u_{\eta,S} + b_{\eta,v} \quad (9)$$

여기서

$$b_{\epsilon,v} = a_E (u'_{\eta,E} - u_{\eta,E}) + a_W (u'_{\eta,W} - u_{\eta,W}) + a_N (u'_{\eta,N} - u_{\eta,N}) + a_S (u'_{\eta,S} - u_{\eta,S}) + \left[b^u \frac{\partial x}{\partial \eta} + b^v \frac{\partial y}{\partial \eta} \right]_{(\alpha)^{1/2}}$$

이고, $u'_{\eta,E}$, $u'_{\eta,W}$, $u'_{\eta,N}$, $u'_{\eta,S}$ 는 공변 속도성분 u_ϵ 에서와 같은 방법으로 구하면 된다. 또 a 는 $a = (x_\eta)^2 + (y_\eta)^2$ 로 정의된다.

차분압력방정식은 식 (3)의 연속방정식을 적분하여 구한다. 식 (3)을 Fig. 1의 유한체적에 대하여 적분하면 다음의 식 (10)을 얻을 수 있다.

$$(JU)_e - (JU)_w + (JV)_n - (JV)_s = 0 \quad (10)$$

반변속도성분 U 와 V 는 공변속도성분 u_ϵ 와 u_η 와 다음의 식 (11)과 같은 관계가 있다.

$$JU = \alpha \frac{\sqrt{r}}{J} u_\epsilon - \beta \frac{\sqrt{\alpha}}{J} u_\eta$$

$$JV = r \frac{\sqrt{\alpha}}{J} u_\eta - \beta \frac{\sqrt{r}}{J} u_\epsilon \quad (11)$$

여기서 $\beta = x_\epsilon x_\eta + y_\epsilon y_\eta$ 이다.

또 공변속도성분 u_ϵ 와 u_η 는 각각 식 (8)과 (9)를 다시 정리하여 다음의 식 (12)로 표현할 수 있다.

$$u_{\epsilon,e} = u_{\epsilon,e}^* - \frac{J}{a_P \sqrt{r}} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_e$$

$$u_{\epsilon,w} = u_{\epsilon,w}^* - \frac{J}{a_P \sqrt{r}} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_w$$

$$u_{\eta,n} = u_{\eta,n}^* - \frac{J}{a_P \sqrt{\alpha}} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_n$$

$$u_{\eta,s} = u_{\eta,s}^* - \frac{J}{a_P \sqrt{\alpha}} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_s \quad (12)$$

이제 식 (10)~(12)를 조합하면 다음의 식 (13)과 같은 미분 압력방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{\sqrt{r}}{J} u_{\epsilon,e}^* - \frac{1}{a_P} \left(\frac{\partial p^*}{\partial \xi} \right)_e - \beta \frac{\sqrt{\alpha}}{J} u_{\eta,e}^0 - \alpha \frac{\sqrt{r}}{J} u_{\epsilon,w}^* \\ & + \frac{1}{a_P} \left(\frac{\partial p^*}{\partial \xi} \right)_w + \beta \frac{\sqrt{\alpha}}{J} u_{\eta,w}^0 + \gamma \frac{\sqrt{\alpha}}{J} u_{\eta,n}^* \\ & - \frac{1}{a_P} \left(\frac{\partial p^*}{\partial \eta} \right)_n - \beta \frac{\sqrt{r}}{J} u_{\epsilon,n}^0 - r \frac{\sqrt{\alpha}}{J} u_{\eta,s}^* \\ & + \frac{1}{a_P} \left(\frac{\partial p^*}{\partial \eta} \right)_s + \beta \frac{\sqrt{r}}{J} u_{\epsilon,s}^0 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 u_{ϵ}^0 와 u_{η}^0 는 이전 반복계산(previous iteration step)에서 구한 값을 의미한다.

식 (13)을 Fig. 1과 같은 유한체적에 대하여 적분하면 다음의 식 (14)와 같은 차분압력방정식을 얻을 수 있다.

$$a_P p_P = a_E p_E + a_W p_W + a_N p_N + a_S p_S + b_P \quad (14)$$

여기서

$$a_E = \frac{\alpha_e}{(a_P)_e}, \quad a_W = \frac{\alpha_w}{(a_P)_w}$$

$$a_N = \frac{r_n}{(a_P)_n}, \quad a_S = \frac{r_s}{(a_P)_s}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S$$

$$b_P = -(\alpha \frac{\sqrt{r}}{J})_e U_e^* + (\alpha \frac{\sqrt{r}}{J})_w U_w^*$$

$$- (\alpha \frac{\sqrt{r}}{J})_n U_n^* + (\alpha \frac{\sqrt{r}}{J})_s U_s^*$$

$$+ (\beta \frac{\sqrt{\alpha}}{J})_e U_e - (\beta \frac{\sqrt{\alpha}}{J})_w U_w$$

$$+ (\beta \frac{\sqrt{\alpha}}{J})_n U_n - (\beta \frac{\sqrt{\alpha}}{J})_s U_s \text{이다.}$$

3. 수치해석 과정

본 연구에서 사용한 수치해석 과정을 간략하게 정리하면 다음과 같다.

(1) 경계조건을 대입하고 속도장을 적절히 가정한다.

(2) 연속방정식으로부터 유도된 차분압력방정식 (14)를 이용하여 압력장을 수정한다.

(3) 위의 과정 (2)에서 구한 압력장을 이용하여 운동량 방정식 식 (8)과 (9)를 풀어서 공변속도성분 u_ξ 와 u_η 를 수정한다. 공변속도성분 u_ξ 와 u_η 로부터 직교좌표계 속도성분 u 와 v 를 다음의 식 (15)를 이용하여 구한다.

$$u = \frac{u_\xi \sqrt{r y_\eta} - u_\eta \sqrt{a y_\xi}}{x_\eta y_\xi - x_\xi y_\eta}$$

$$v = \frac{u_\xi \sqrt{r x_\eta} - u_\eta \sqrt{a x_\xi}}{x_\eta y_\xi - x_\xi y_\eta} \quad (15)$$

(4) 위의 과정 (3)에서 구한 속도장의 최대변화가 적절한 값보다 크면 과정 (2)로 돌아가서 과정 (2)~(4)를 반복한다.

수치해석에서 수렴판정은 임의의 두 반복계산간의 속도성분의 최대변화량과 압력의 최대변화량이 모두 10^{-4} 보다 작을 때를 기준으로하였고, 수렴속도의 증가를 위해 0.4의 완화계수를 사용하였다.

4. 결과 및 토의

본 논문에서 제시하는 수치해석 방법의 타당성을 검토하기 위해 다음과 같이 세 가지 예제문제를 살펴보았다.

4.1 공동유동 (cavity flow)

공동유동은 유선이 큰 구배를 가질뿐만 아니라 다수의 재순환 영역이 존재하는 복잡한 유동장으로, 다양한 수치해석 기법의 검증에 사용되는 대표적인 유동문제이다. 대한기계학회⁽²³⁾에서도 여러가지 수치해석 기법을 비교평가하기 위해 예제로 채택한 바 있다.

Fig. 2는 본 연구에서 고려한 공동을 격자로 나눈 예를 도시한 그림으로, 41×41 의 경우이다. 그림에서 알 수 있듯이, 공동의 높이 H 와 폭 W 는 동일하고 격자는 벽면에 밀집하여 구성하였다. 유

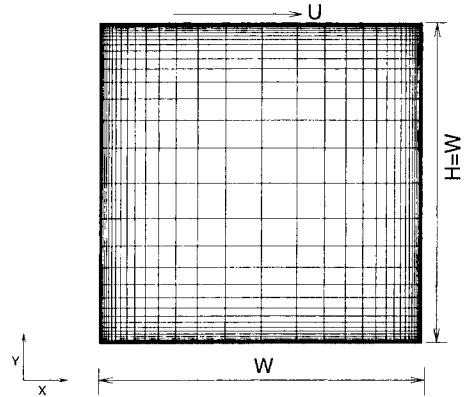
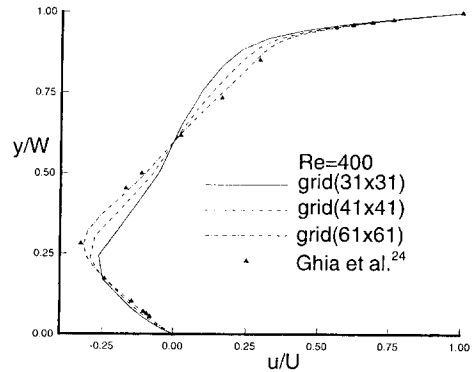
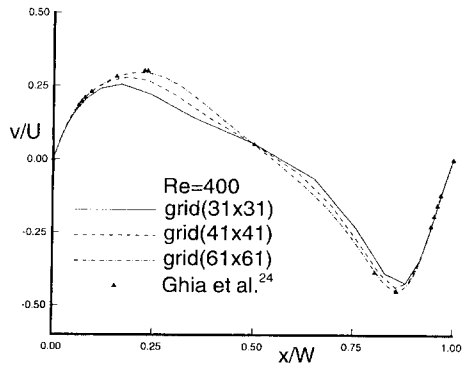


Fig. 2 A grid distribution for cavity flow and its dimensions



(a) Horizontal



(b) Vertical

Fig. 3 Comparison of velocity profiles with those of Ghia et al for $Re=400$

동조건으로는 공동의 폭과 윗면의 속도 그리고 동점성계수로 계산한 레이놀즈수 $Re=UW/\nu$ 가 400과 1000인 두 경우를 고려하였다. 격자수는 $31 \times$

31, 41×41, 그리고 61×61의 세 가지로 변화시켜 가면서 계산을 수행하였다. 경계조건으로는 공동의 윗면에서 x -방향 속도성분 u 를 U 로, 나머지 벽면에서는 점착조건(no slip condition)을 대입하였다. 압력은 모든 벽면에서 Neumann 조건으로 처리하였다.

Fig. 3은 레이놀즈 수가 400인 경우 본 논문에서 제시한 방법으로 얻은 수치해와 Ghia 등⁽²⁴⁾의 수치해를 비교한 그림이다. 그림에서 (a)는 $x=W/2$ 에서 x -방향 속도성분을 (b)는 $y=H/2$ 에서 y -방향 속도성분을 각각 Ghia 등⁽²⁴⁾의 결과와 비교하여 도시하고 있다. 그림을 살펴보면, 격자수가 증가함에 따라 본 계산치는 Ghia 등⁽²⁴⁾의 수치해에 접근하여 격자수가 약 60×60 이상에서는 거의 일치하는 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

Fig. 4는 공동내의 유동형태를 유선함수의 분포로 나타낸 그림으로, (a)는 본 논문에서 얻은 유

선함수의 분포를 (b)는 Ghia 등⁽²⁴⁾의 결과 각각 도시하고 있다. 두 그림을 비교하여 살펴보면, 공동 내에 크게 형성되는 주와류유동(primary vortical flow)뿐만 아니라 공동의 아래쪽 양모서리 부근에 형성되는 이차와류유동(secondary vortical flow)의 위치나 크기 등도 대체로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 다만, 그림에서 이차와류유동의 위치나 크기 등의 차이가 다소 드러나 보이지만, 그림에 도시된 유선함수의 분포는 등간격을 도시한 것이 아니어서 그림에서 차이가 드러나 보이는 이차와류 부근의 유선함수의 값도 실제로는 10^{-4} 정도의 대단히 작은 변화이다. 또한, 본 수치해석 방법은 원시변수(primitive variable)를 사용하여 속도성분을 얻은 다음 유선함수를 구한 반면, Ghia 등⁽²⁴⁾은 유선함수와 와도(vorticity)를 이용하여 Navier-Stokes 방정식을 해석하여, 두 수치해가 유선함수의 분포에서 미세한 차이를 보일 수도 있다.

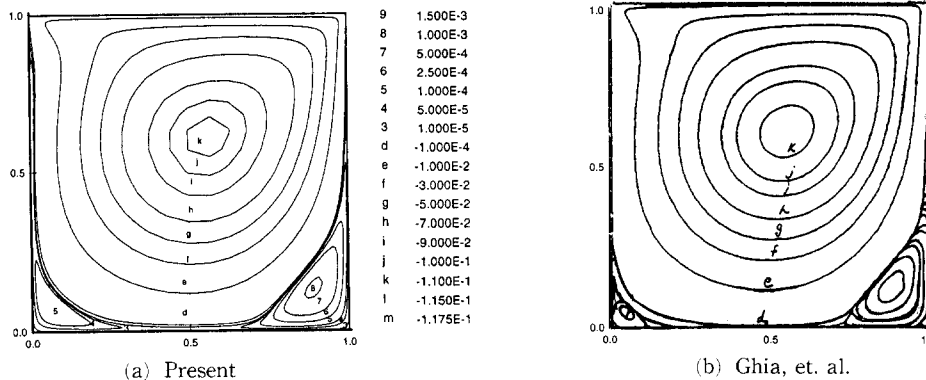


Fig. 4 Comparison of streamline patterns for $Re=400$

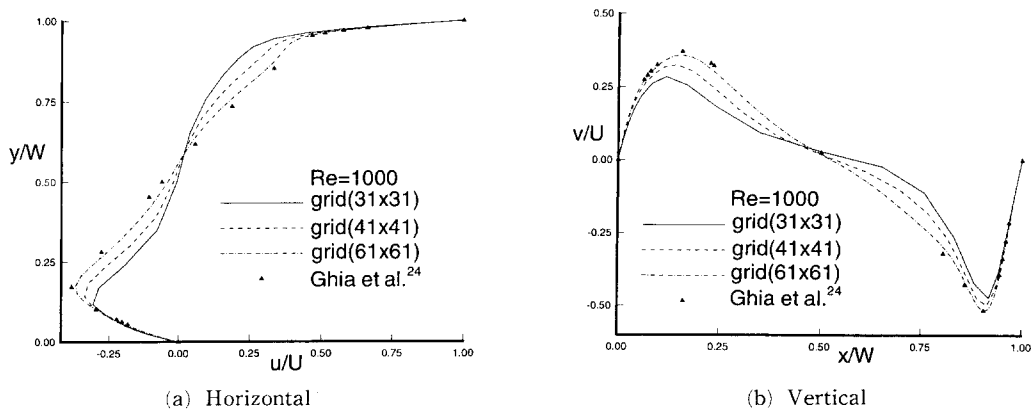


Fig. 5 Comparison of velocity profiles with those of Ghia et al for $Re=1000$

레이놀즈수를 1000으로 증가시켜 얻은 수치해를 살펴보면 다음과 같다. Fig. 5는 레이놀즈수가 1000인 경우에 본 계산치를 Ghia 등⁽²⁴⁾의 수치해와 비교한 그림으로, (a)는 $x=W/2$ 에서 x -방향 속도 성분을 (b)는 $y=H/2$ 에서 y -방향 속도성분의 분포를 보여주고 있다. 그림에서 알 수 있듯이, 두 결과는 레이놀즈수가 증가하였음에도 불구하고 서로 잘 일치하고 있으며, 격자수의 증가에 따른 본 수치해의 수렴성도 저하되지 않았음을 알 수 있다.

Fig. 6은 공동내의 유동형태를 유선함수의 분포로 나타낸 그림으로, (a)는 본 논문에서 얻은 유선함수의 분포를 (b)는 Ghia 등⁽²⁴⁾의 결과 각각 도시하고 있다. 두 그림을 비교하여 보면, 본 계산 결과는 주와류유동 뿐만 아니라 아래쪽 양모서리 부근의 이차와류와 왼쪽 상단부의 삼차와류유동등의 유동영역에서도 Ghia 등⁽²⁴⁾의 수치해와 좋은 일치를 보여주고 있다.

Fig. 7은 앞서 살펴본 두 계산경우의 수렴거동을 보여주는 그림으로, 두 반복계산간의 속도성분의 최대변화량과 압력의 최대변화량을 반복계산횟수에 대하여 도시한 그림이다. 그림에서 (a)는 속도성분의 최대변화량의 반복계산수에 대한, (b)는 압력의 최대변화량의 반복계산수에 대한 수렴거동을 보여주고 있다. 그림을 살펴보면, 레이놀즈수가 400인 경우에는 약 800번의 반복계산으로 수렴된 해를 얻을 수 있으며, 레이놀즈수가 1000인 경우에도 약 1000번의 반복계산이 요구되어 수렴속도가 크게 저하되지 않는 것을 알 수 있다.

4.2 이차원 후향계단의 재부착유동

Fig. 8은 본 연구에 사용된 후향계단의 형상을 경계조건과 함께 개략적으로 도시한 그림이다. 그림에서 알 수 있듯이, 후향계단의 높이는 후향계단이 후 채널 높이의 약 반이다. 실제계산에서는 후

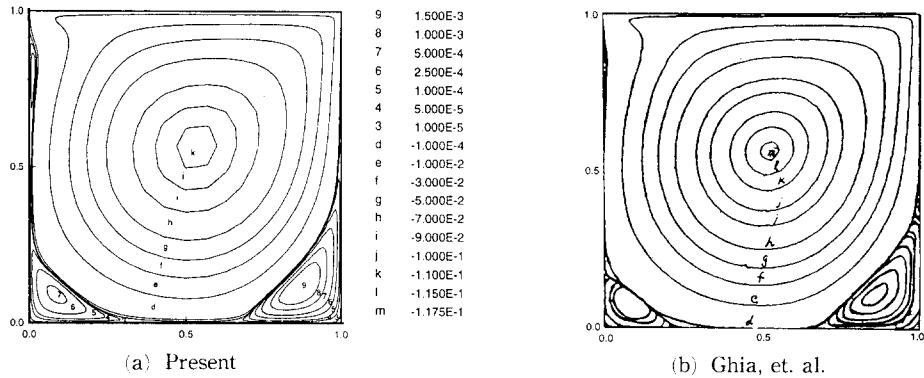


Fig. 6 Comparison of streamline patterns for $Re=1000$

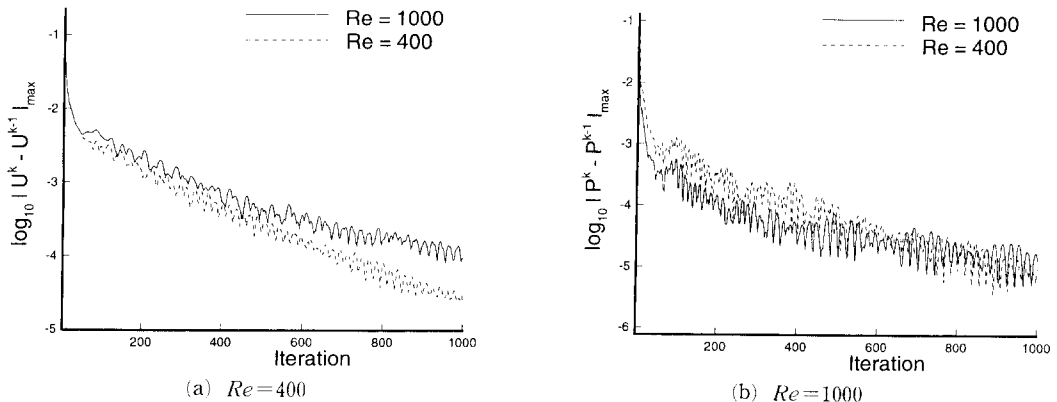


Fig. 7 Convergence history

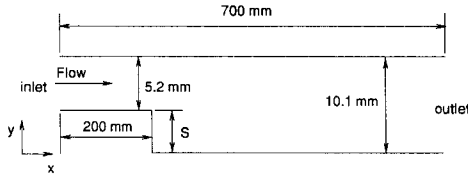


Fig. 8 Backward facing step

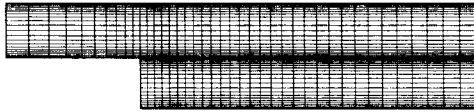


Fig. 9 A grid system for the backward facing flow

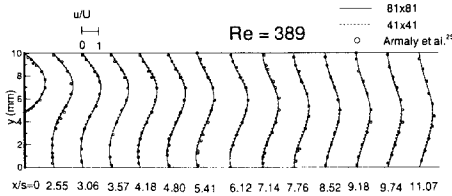


Fig. 10 Comparison of velocity profiles with those of Armaly, et. al. for $Re=389$

항계단 이전의 채널 높이 h 를 기준 길이 $L(=2h)$ 의 반으로, 평균유속 U_{av} 를 기준속도로하여 무차원화 하였다. 따라서 본 계산에 사용된 레이놀즈수는 $Re=2hU_{av}/\nu$ 이고 여기서 ν 는 동점성계수이다. 이 정의는 본 연구에서 비교자료로 채택한 Armaly 등⁽²⁵⁾이 사용한 것과 동일하다. 경계조건으로는 채널의 입구에서 일정한유속(uniform flow)으로 가정하고 채널의 하류에서는 완전히 발달된 유동이 형성된다고 가정하여 다음의 식 (16)을 대입하였다. 채널의 상하벽면을 따라서는 점착조건(no-slip condition)을 적용하였다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

Fig. 9는 본 연구에 사용된 격자분포로 41×41 격자의 예를 도시한 그림이다. 그림에서 알 수 있듯이 채널의 확대부에 x -방향으로 격자를 많이 밀집하고, y -방향으로는 벽면 부근에는 많은 격자를 심어 구성하였다. 본 연구에서는 이러한 격자분포에 대하여 41×41 과 81×81 의 두 가지 격자수에 대하여 수치해를 구하고 그 결과를 살펴보았다.

Fig. 10은 레이놀즈수가 389일 경우에 얻은 결과들로, 41×41 과 81×81 의 두 가지 격자수에서 얻은

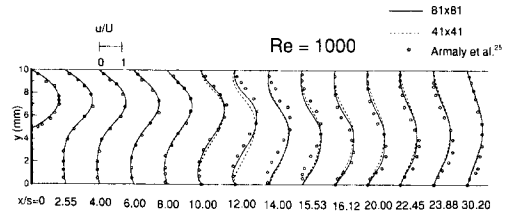


Fig. 11 Comparison of velocity profiles with those of Armaly, et. al. for $Re=1000$

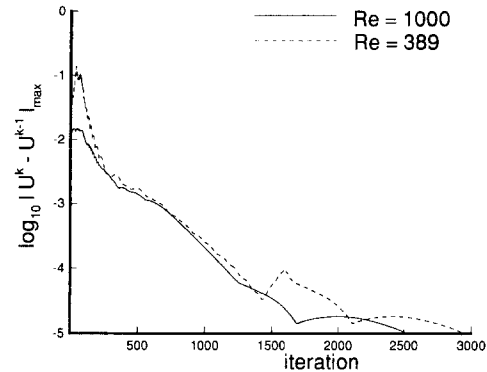


Fig. 12 Convergence history for the backward facing step flow

수치해 즉 x -방향 속도성분의 분포를 Armaly 등⁽²⁵⁾의 실험치와 후항계단 이후의 14지점에서 비교하여 도시한 그림이다. 그림을 살펴보면, 41×41 의 비교적 작은 수의 격자라도 박리되고 재부착되는 복잡한 유동현상을 잘 예측하고 있음을 알 수 있다. 또 후항계단 후의 재부착점의 예측에서도 본 수치해는 격자수 41×41 과 81×81 에서 각각 7.6과 7.8로 예측하여 Armaly 등⁽²⁵⁾의 실험치 8.0에 대단히 근접하였다.

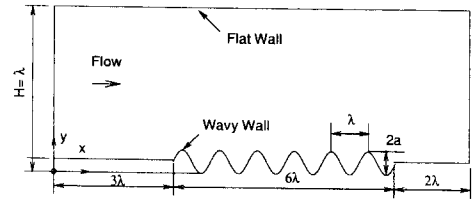
Fig. 11은 레이놀즈수가 1000일 경우에 얻은 결과들로, 두 가지 격자수 41×41 과 81×81 에서 얻은 수치해를 Armaly 등⁽²⁵⁾의 실험치와 비교하여 도시하고 있다. 그림을 살펴보면 박리유동영역인 $10 \leq x/s \leq 23$ 영역에서 수치해는 실험치와 다소 큰 차이를 보이고 있는데, 이는 Armaly 등⁽²⁵⁾이 지적한 바와 같이 레이놀즈수가 1000인 경우에는 3차원 유동이 형성되기 때문으로 사료된다. 따라서 2차원으로 가정한 본 계산은 근본적으로 Armaly 등⁽²⁵⁾의 실험치와 다소 차이를 가질 수 밖에 없다고 판단되며, 최근에 대한기계학회 CFD 분과위원회에서 개최한 workshop⁽²⁶⁾에서도 같은 결론이 내려진 바

있다.

Fig. 12는 앞서 살펴본 두 경우의 수렴거동을 보여주는 그림으로, 두 반복계산간의 속도성분 최대 변화량을 반복계산 수에 대하여 도시하고 있다. 그림을 살펴보면, 레이놀즈수가 389인 경우가 상대적으로 보다 빠른 수렴속도를 보이고 있으며, 레이놀즈수가 1000인 경우에도 빠른 속도로 수렴한다고 말할 수 있다. 또한, 이 경우는 앞의 공동유동의 경우와는 달리 반복횟수가 증가함에 따라 두 반복계산간의 속도성분 최대변화량이 거의 단조감소(monotonically decrease)하는 좋은 수렴거동을 보이고 있다.

4.3 정현파 벽면을 가진 이차원 채널내의 유동

Fig. 13(a)는 아래쪽 벽면에 6개의 정현파 형상이 존재하는 이차원 채널을 도시한 그림으로, Patel 등⁽²⁷⁾이 높은 레이놀즈수에서 다수의 박리점(separation point)과 재부착점(reattachment po-



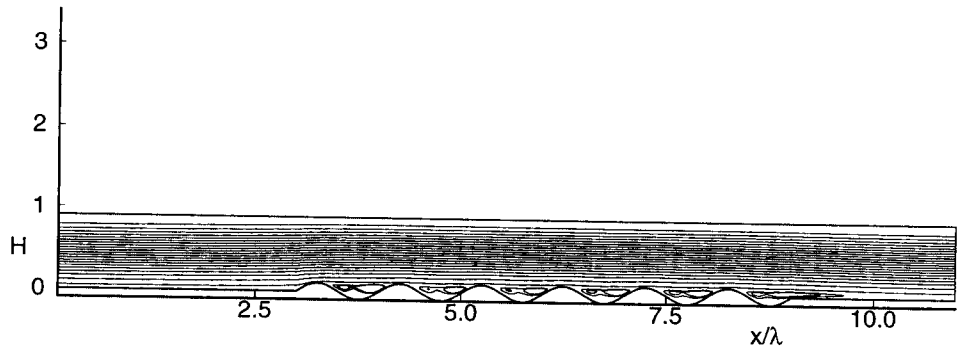
(a) Channel dimensions



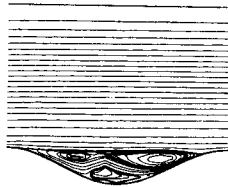
(b) A grid system

Fig. 13 Two dimensional channel with a sinusoidal wavy wall

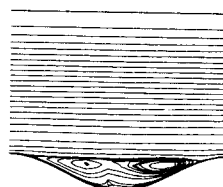
int)을 가지는 복잡한 유동장의 한 예제로 다룬 것이다. 본 논문에서는 Patel 등이 다룬 예제를 동일한 조건하에서 계산을 수행하고 그 결과를 서로 비교하였다. 본 논문과 Patel 등⁽²⁷⁾이 다룬 예제 계산의 레이놀즈수 Re 는 채널의 평균유속 U 와 채널의



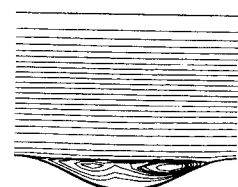
(a) Entire flow field



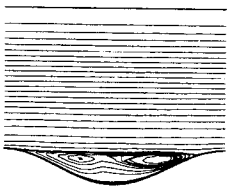
(b) First cavity



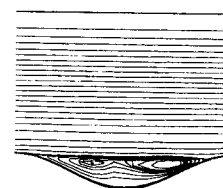
(c) Second cavity



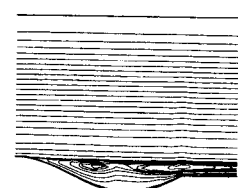
(d) Third cavity



(e) Fourth cavity



(f) Fifth cavity



(g) Sixth cavity

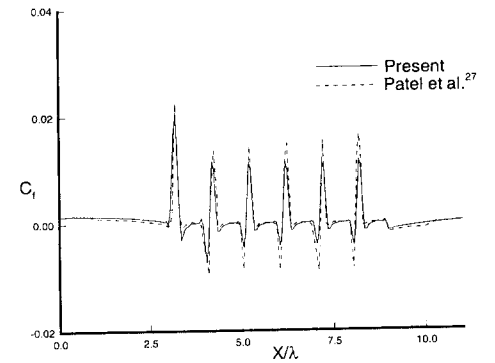
Fig. 14 Flow visualization by using streamlines

높이 H 에 의해 UH/ν 로 정의되고, $Re=10,760$ 인 경우를 가정하여 수치해석을 수행하였다. 이 레이놀즈수에서는 실제 유동은 난류가 이지만, Patel 등이 밝힌 바와 같이 본 예제는 높은 레이놀즈수 유동의 한 예제로 고안된 것으로 층류로 가정하여 계산을 수행하였다.

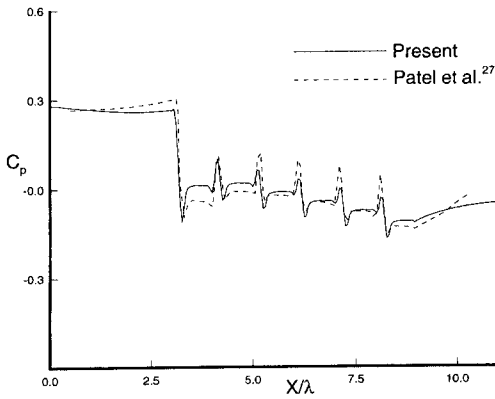
이차원 채널내의 격자구성은 가급적 Patel 등⁽²⁷⁾과 동일한 방법으로 구성하고자 노력하였다. 다만, Patel 등⁽²⁷⁾의 논문에 격자계에 대한 서술이 완벽하지 않아서, 서로 다소 차이가 남을 밝혀둔다. Fig. 13(b)는 본 연구에 사용된 격자계를 보여주고 있다. 그림에서 알 수 있듯이, 6개의 정현파 형상 구간에서는 x -방향으로 등간격의 격자를 그외의 상류와 하류는 일정 간격으로 각각 감소하고 증가하도록 구성하였다. 또 벽면부근에는 많은 격자가 놓이도록 벽면에서 채널의 중심을 향하여 격자간격이 일정하게 증가하도록 구성하였다. 이 때 첫

번째 격자는 벽면으로 부터 10^{-5} (이 크기는 Patel 등⁽²⁷⁾의 논문에 제시되어 있는 첫번째 격자 간격과 동일한 크기 차수(order of magnitude)임)의 위치에 놓이도록 하였다. 본 예제는 앞의 두 경우와 달리 비정상 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 수치해석하였으며, 이때 사용된 시간증분 Δt 는 $0.1H/U_{av}$ 이다. 경계조건으로는 채널의 입구와 출구에서 완전히 발달된 유동으로 가정하였고, 벽면에서는 점착조건을 대입하였다.

Fig. 14는 전체 유동장과 6개의 정현파 공동(sinusoidal cavity)내의 유동형태를 유선함수로 도시한 그림이다. 그림에서 (a)는 전체유동장을 (b)~(g)는 차례대로 첫번째에서 여섯번째 공동을 가리킨다. 그림을 살펴보면 정현파 공동내의 유동은 전체적으로는 대단히 유사하지만, 자세히 살펴보면 주와류유동 아랫부분에 이차의 와류유동이 형성되기도 하고 그 크기도 공동의 위치에 따라 다소 차

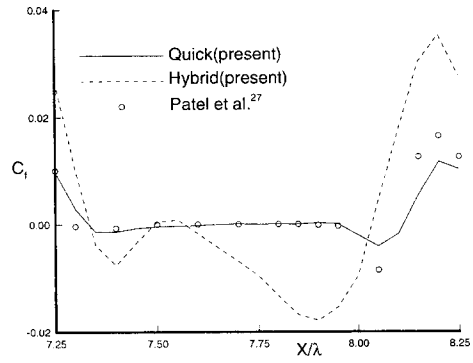


(a) Skin friction coefficient

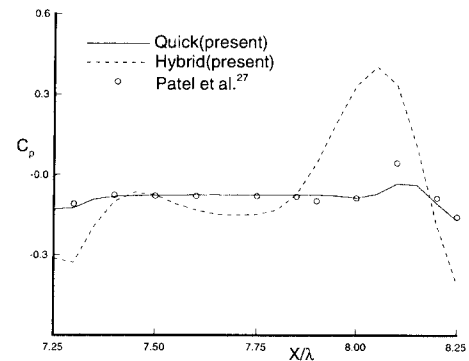


(b) Wall pressure coefficient

Fig. 15 Comparison of present results with those of Patel, et. al.



(a) Skin friction coefficient



(b) Wall pressure coefficient

Fig. 16 Effects of convection discretization techniques

이가 남을 알 수 있다.

Fig. 15는 patel 등⁽²⁷⁾의 수치해와 보다 자세히 비교해 보기 위해 벽면마찰계수(skin friction coefficient) $C_f = \tau_w / (\rho U^2 / 2)$ 와 벽면압력계수(wall pressure coefficient) $C_p = P_w / (\rho U^2 / 2)$ 를 비교하여 도시하고 있다. 여기서 τ_w 과 P_w 는 각각 벽면전단 응력(wall shear stress)과 벽면압력을 가리킨다. 그림을 살펴보면, 두 가지 수치해는 전체적으로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 다만 세세하게는 다소 차이가 보이는데, 이러한 차이는 두 가지 수치해를 얻는데 사용된 수치해석방법, 특히 대류항의 처리방법이 차이가 남으로써 기인된 것으로 사료된다. 이를 간단히 살펴보기 위해 본 연구에서 제시한 방법에서 대류항의 처리기법만을 hybrid 법으로 바꾸어 수치해를 얻어 그 결과를 비교하여 보았다. Fig. 16은 5번째 정현파 공동에서의 벽면마찰계수와 벽면압력계수를 비교하여 도시한 그림으로, (a)는 벽면마찰계수를 (b)는 벽면압력계수를 각각 비교하여 도시하고 있다. 그림을 살펴보면, 대류항의 처리기법에 따라 벽면마찰계수와 벽면압력계수의 분포가 크게 달라짐을 확인할 수 있어 앞서 지적한 차이의 원인이 타당함을 반증한다고 말할 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 일반 비직교 표면좌표계에서의 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 수치해석하는 방법을 제시하고, 세 가지 예제문제를 통해 타당성을 살펴본 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

본 연구에서 제시하는 수치해석방법은 박리될 수 반하는 여러 가지 종류의 유동장에 대하여 수치적으로 만족할 만한 수렴성을 보이고, 격자수의 증가에 따라 빠른 격자독립성을 보임을 알 수 있었다. 또한 가상적으로 만든 높은 레이놀즈수 유동에서도 좋은 예측성을 확인함으로써 본 연구에서 제시하는 수치해석방법이 복잡한 기하학적 형상이나 높은 레이놀즈수 유동예측에 유용하게 사용될 수 있음을 알 수 있었다.

후 기

본 논문은 1995년도 영남대학교 학술연구조성비에 의해 이루어진 것으로, 관계자 여러분께 감사드

립니다.

참고문헌

- (1) Chang, J. L. C. and Kwak, D., 1984, "On the Method of Pseudo-Compressibility for Numerically Solving Incompressible Flows," *AIAA Paper* 84~0252.
- (2) Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow," Hemisphere Pub. Co.
- (3) Jang, D. S., Jetli, R. and Acharya, S., 1986, "Comparison of the PISO, SIMPLER, and SIM- PLEC Algorithms for the Treatment of the Pressure-Velocity Coupling in Steady Flow Problems," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 10, pp. 209~228.
- (4) Galpin, P. F., Vandoormaal, I. P., and Rathiby, G. D., 1985, "Solution of the Incompressible Mass and Momentum Equations by Application of a Coupled Equation Line Solver," *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 5, pp. 615~625.
- (5) Issa, R. I., 1982, "Solution of the Implicit Discretized Fluid Flow Equations by Operator Splitting," *Mechanical Eng. Rept. FS/82/15*, Imperial College, London.
- (6) Lee, D. and Chiu, J. J., 1992, "Covariant Velocity Based Calculation Procedure With Nonstaggered Grids for Computation of Pulsatile Flows," *Numerical Heat transfer, Part B*, Vol. 21, pp. 269~286.
- (7) Agouzoul, M., Reggio, M. and Camarero, R., 1990, "Calculation of Turbulent Flows in a Hydraulic Turbine Draft Tube," *J. Fluids Eng.*, Vol. 112, pp. 257~263.
- (8) Majumdar, S., Rodi, W. and Zhu, J., 1992, "Three-Dimensional Finite Volume Method for Incompressible Flows with Complex Boundaries," *J. Fluids Eng.*, Vol. 114, pp. 496~503.
- (9) Rhie, C. M. and Chow, W. L., 1983, "Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation," *AIAA J.*, Vol. 21, No. 11, pp. 1525~1532.
- (10) Karki, K. C. and Pantankar, S. V., 1989, "Pressure Based Calculation Procedure for Vis-

- cous Flows at All Speeds in Arbitrary Configurations," *AIAA J.*, Vol. 27, No. 9, pp. 1167~1174.
- (11) Vanka, S. P., Chen, B. C. J. and Sha, W. T., 1980, "A Semi-Implicit Calculation Procedure for Flows Described in Boundary Fitted Coordinate Systems," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 3, pp. 1~19.
- (12) Hobson, G. V. and Lakshminarayana, B., 1991, "Prediction of Cascade Performance Using an Incompressible Navier-Stokes Technique," *J. Turbomachinery*, Vol. 113, pp. 561~572.
- (13) Vradis, G., Zalak, V. and Benton, J., 1992, "Simultaneous Variable Solutions of the Incompressible Steady Navier-Stokes Equations in General Curvilinear Coordinate Systems," *J. Fluid Eng.*, Vol. 114, pp. 299~305.
- (14) Tamamidis, P. and Assanis, D. N., 1993, "Prediction of Three-Dimensional Steady Incompressible Flows Using Body-Fitted Coordinates," *J. Fluids Eng.*, Vol. 115, pp. 457~462.
- (15) AIAA, 1994, "Editorial Policy Statement on Numerical Accuracy and Experimental Uncertainty," *AIAA J.* Vol. 23, No. 1, p. 3
- (16) Leonard, B. P., 1979, "A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 19, pp. 59~98.
- (17) Leonard, B. P., 1979, "A Survey of Finite Differences of Opinion on Numerical Modelling of Incompressible Defusive Convection Equation," *ASME, Applied Mechanics Division, Winter Annual Meeting*.
- (18) Gaskell, P. H. and Lau, A. K. C., 1988, "Curvature-Compensated Convective Transport : SMART, A New Boundedness Perserving Transport Algorithm," *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, Vol. 8, pp. 617~641.
- (19) Pollard, A. and Siu, A. L. W., 1982, "The Calculation of Some Laminar Flows Using Various Discretization Schemes," *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 35, pp. 293~313.
- (20) Hayase, T., Humphery, J. A. C. and Grief, R., 1990, "A Consistently Formulated QUICK Scheme for Fast and Stable Convergence Using Finite Volume Iterative Calculation Procedures," *J. Comp. Physics*, Vol. 98, pp. 108~118.
- (21) 조성호, 강인준, 박승호, 1993, "Hybrid 기법과 QUICK 기법 : 공동유동의 계산 특성 비교," 대한기계학회논문집 제17권 제6호, pp. 1640~1647.
- (22) 신종호, 최영돈, 1992, "수치해의 정확성과 안정성이 보장되는 대류항 미분법 개선에 관한 연구," 대한기계학회논문집, 제16권 제6호, pp. 1178~1194.
- (23) 대한기계학회, 1993, "Numerical Simulation of Natural Convection in Square Cavity," 대한기계학회 열 및 유체역학부문. 제2회 전산유체역학분과회 Workshop.
- (24) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multi-grid Method," *J. Comp. Physics*, Vol. 48, pp. 387~411.
- (25) Armaly, B. F., Durst, F., Pereira, J. C. and Schonung, 1983, "Experimental and Theoretical Investigation of Backward Facing Step Flow," *J. Fluid Mechanics*, Vol. 27, pp. 473~496.
- (26) 대한기계학회, 1995, "후향계단에서의 재부착 유동 해석," 열 및 유체공학부문 CFD 분과회 workshop.
- (27) Patel, V. C., Chon, J. T. and Yoon, J. Y., 1991, "Laminar Flow over Wavy Walls," *J. Fluids Eng.*, Vol. 113, pp. 574~578.