

<논 문>

반응혼합층의 복수 불안정성 모드

신 등 신*

(1994년 9월 1일 접수)

Multiple Unstable Modes in the Reacting Mixing Layer

Dong Shin Shin

Key Words : Diffusion Flame(확산화염), Reacting Mixing Layer(반응혼합층), Numerical Simulation(수치해석), Instability(불안정성)

Abstract

This paper investigates the linear stability of reacting mixing layers with special emphasis on the existence of multiple unstable modes. The governing equations for laminar flows are from two-dimensional compressible boundary-layer equations. The chemistry is a finite rate single step irreversible reaction with Arrhenius kinetics. For the incompressible reacting mixing layer with variable density, a necessary condition for instability has been derived. The condition requires that the angular momentum, not the vorticity, to have a maximum in the flow domain. New inflectional modes of instability are found to exist in the outer part of the mixing layer. For the compressible reacting mixing layer, supersonic unstable modes may exist in the absence of a generalized inflection point. The outer modes at high Mach numbers in the reacting mixing layer are continuations of the inflectional modes of low Mach number flows. However, the generalized inflection point is less important at supersonic flows.

1. 서 론

압축성 반응혼합층은 가스 터빈 연소기의 내부유동을 비롯하여 많은 유동에 존재한다. 이러한 반응혼합층은 연료와 공기의 두 개의 유동으로 나누어 지는데 연료와 공기가 분자상태로 혼합되었을 경우 화학반응이 일어나기 시작한다. 연소화학반응에 따른 온도변화는 유동의 열역학적 성질을 변화시키며 유체를 팽창시키는데, 이러한 유동과 화학반응 사이의 강한 간섭은 반응유체의 연구를 어렵게 한다.

연소기내에서는 유동의 체류시간은 매우 짧으므로 연소기, 특히 공기를 사용하는 램-제트(ram-jet)

로켓의 연소기는 연료와 공기의 효율적인 혼합을 요구한다. 일반적으로 층류유동보다 난류유동에서 혼합이 효율적이며, 이를 위해서 층류는 불안정해야 한다.

유동의 불안정성이 커짐에 따라 혼합층내의 연료와 공기의 혼합이 증가하므로 반응전단층의 불안정성을 이해하면 연료와 공기의 혼합 기술이나 유동 제어기술을 개발할 수 있다. 불안정성 해석은 또한 난류 반응혼합층의 특성을 예측할 수도 있으며, 그 해석결과는 제트(jet)와 같은 다른 전단층에도 적용할 수 있다.

비압축성 혼합층에서 변곡점(inflectional point)이 존재할 경우 유동이 불안정하다는 것을 처음으로 보인 것은 Rayleigh⁽¹⁾이었다. Rayleigh는 연속적인 속도장을 가지는 혼합층에 대해 비점성 평행

*홍익대학교 기계공학과

선형 불안정성 해석을 수행하였다. 항공기의 발달과 함께 불안정성 해석은 압축성 혼합층까지 확대되었고 Gropengiesser⁽²⁾가 최초로 압축성 혼합층에서 복수 불안정성 모드를 발견하였다. Gropengiesser는 불안정성 해석을 위한 기본유동으로서 tanh 함수 대신에 압축성 경계층 방정식의 층류해를 사용하여 비점성 불안정성 해석을 수행하였으며, 높은 마하(Mach) 수에서 2차원 교란에 대한 두번째 불안정성 모드를 발견하였는데, 이러한 복수 모드는 Blumen⁽³⁾과 Drazin⁽⁴⁾ 등에 의해서 확인되었다. Mack⁽⁵⁾은 선형 안정성 해석을 통하여 압축성 경계층에서 변곡점을 가지지 않는 초음속 불안정성 모드를 발견하였고, 높은 마하수에서는 3차원 교란이 2차원 교란보다 더 불안정하다는 것을 보였다.

위의 연구들로부터 압축성 혼합층의 경우 높은 마하수에서 복수 불안정성 모드가 존재한다는 것을 알았으나, 화학반응이 있는 경우 위의 불안정성 모드의 존재 여부와 성질에 대해서는 아직 연구되어 있지 않다. 따라서 본 논문은 평행하게 진행하며 혼합과 화학반응을 일으키는, 두 반응물질로 이루어진 압축성 반응혼합층이 복수 불안정성 모드를 가지고 있는지에 대하여 선형 불안정성 해석을 통해 연구한 것이다. 반응혼합층의 간단한 모델로서는 공기와 연료의 평행한 유동을 사용하며 유한반응물을 가지는 비가역적 Arrhenius 형태의 화학반응을 고려하고, 층류유동을 위한 지배방정식은 2차원 압축성 경계층 방정식을 사용한다.⁽⁶⁾

2. 교란방정식 및 수치해법

2.1 선형 교란방정식

Fig. 1은 유동장을 나타낸다. 문제를 단순화시키기 위해서 유속이 빠른 부분을 연료, 유속이 느린 부분을 공기로 가정하며 U_1 과 U_2 로 그 유속을 표시한다. 화학반응은 1단계 비가역반응으로서 연료 F 가 공기 O 와 반응하여 생성물 P 를 만든다.



ν_F, ν_O 및 ν_P 는 각각 연료, 공기, 생성물의 이론계수(stoichiometric coefficient)들이다. 반응물은 빠른 반응(fast chemistry) 또는 화염면(flame sheet) 모델보다 실제 현상에 가까운 Arrhenius의 법칙을 따른다.

자유 전단층 유동에서 점성은 교란을 약화시키는

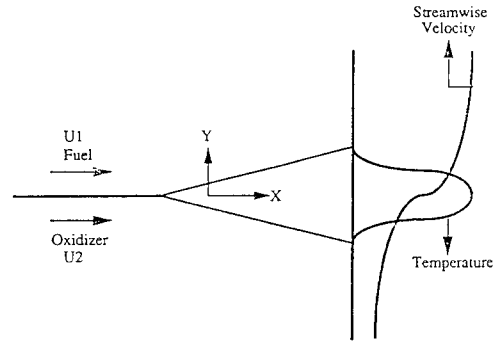


Fig. 1 Schematic diagram of reacting mixing layer

역할만을 하므로 본 연구에서는 점성 문제보다 간단한 비점성 안정성 문제만을 고려한다. 지배 방정식은 화학반응을 포함하는 압축성 이상기체에 대한 Euler 방정식을 고려한다. 질량, 운동량, 에너지 및 농도의 보존식과 이상기체 방정식은 다음과 같다.⁽⁶⁾

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = - \frac{1}{\gamma M_1^2} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (3)$$

$$\rho \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] = - p(\gamma - 1) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + Da \omega_T \quad (4)$$

$$\rho \left[\frac{\partial y_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right] = Da \omega_i \quad (5)$$

$$p = \rho T \quad (6)$$

모든 변수들은 연료유동의 변수들 및 입구 속도분포의 vorticity thickness로 무차원화되어 있으며 p, u, v, T 는 각각 밀도, x, y 방향의 속도, 온도를 나타내고 y_i 는 연료, 공기, 생성물의 질량비이며, y_i 의 하첨자 i 는 연료, 공기 또는 생성물을 나타낸다. Da 는 무차원수인 Damköhler 수이며, γ 는 비열비, M_1 은 연료유동의 Mach 수이다. ω_T, ω_i 는 열생성물 및 물질 i 의 반응률로서 다음과 같이 정의한다.

$$\omega_T = \frac{Q}{W_F \nu_F} (\rho y_F)^{\nu_F} (\rho y_O)^{\nu_O} \times \exp \left[-\beta' \left(\frac{1}{T} - 1 \right) \right] \quad (7)$$

$$\omega_i = \frac{W_i (\nu_i'' - \nu_i')}{W_F \nu_F} (\rho y_F)^{\nu_F} (\rho y_O)^{\nu_O} \times \exp \left[-\beta' \left(\frac{1}{T} - 1 \right) \right] \quad (8)$$

W_i, ν_i', ν_i'' 는 각각 물질량, 그리고 반응물질 또는

생성물질의 이론계수(stoichiometric coefficient)들이다. β '은 무차원 반응활성 에너지이며, Q 는 반응열을 나타내는 무차원수로서, 무차원 단열화염온도(adiabatic flame temperature) T_{aa} 와 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$T_{aa} = Q + 1 \quad (9)$$

본 논문에서는 ν_F, ν_O 는 1이고 γ 는 1.4인 경우만을 고려한다.

교란 방정식을 유도하기 위해서 층류유동이 평행하여 유동 방향에 수직인 방향의 구배만이 존재하며, 층류유동의 압력은 일정하고 그 무차원 값은 1로 가정한다. 모든 변수들은 층류유동과 파장형태의 교란의 합으로 생각할 수 있다.

$$f(x, y, z, t) = \bar{f}(y) + f(x, y, z, t) \quad (10)$$

$$f'(x, y, z, t) = \bar{f}'(y) \exp[i(ax + \beta y - \omega t)] \quad (11)$$

$\bar{f}(y)$ 는 층류 유동을, $\bar{f}'(y)$ 는 고유함수를 나타낸다. α 와 β 는 x 와 y 방향의 고유치들이며 ω 는 주파수이다. 고유치들과 교란이 전파하는 각도 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\tan \theta = \beta / \alpha \quad (12)$$

시간에 대한 안정성 해석에서는 α 가 실수이고 ω 가 복소수이며, 공간에 대한 안정성 해석에서는 α 가 복소수이고 ω 가 실수이며, 각각의 성장률(amplification rates)은 ω_i 와 $-\alpha_i$ 이다. 복소파장 속도(complex wave velocity), c 는 ω/α 이다.

식 (10)을 식 (2), (3)에 대입한 후 교란의 곱들을 무시함으로써 압력에 대한 교란 방정식을 얻을 수 있다.

$$\bar{p}'' - \frac{2\alpha\bar{u}'}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \bar{p}' + \gamma M_1^2 (\alpha\bar{u} - \omega)^2 \bar{p} - (\alpha^2 + \beta^2) \bar{p} = 0 \quad (13)$$

'은 y 에 대한 미분을 나타낸다. 위의 방정식은 밀도가 일정한 경우 Rayleigh 방정식⁽⁷⁾이 된다. \bar{p} 을 식 (4), (5), (6)을 사용하여 \bar{T} 와 \bar{p} 로 표시하면 위의 식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{p}'' - \left\{ \frac{2\alpha\bar{u}'}{(\alpha\bar{u} - \omega)} + \frac{\bar{p}}{T} (\alpha\bar{u} - \omega)^2 [RXN1] \right\} \bar{p}' - [(\alpha^2 + \beta^2) - \gamma M_1^2 (\alpha\bar{u} - \omega)^2] \times \left\{ \frac{1}{T} + \frac{\bar{p}}{T} [RXN2] \right\} \bar{p} = 0 \quad (14)$$

[RXN1]과 [RXN2]는 화학반응과 압축성에 의한 밀도 변화에 따른 영향을 나타내는 항들로서 자세한 설명은 부록에 첨부하였다. Squire⁽⁸⁾의 변환은 3차원 문제를 2차원 문제로 변환시킬 수 있다. 불안정성에서 화학반응을 무시하고 식 (15)의 관계식을 사용하면 식 (14)는 식 (16)으로 변환된다.

$$\bar{\alpha} = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}, \quad \bar{p}/\alpha = \bar{p}/\bar{\alpha} \\ \bar{\omega}/\bar{\alpha} = \omega/\alpha, \quad \bar{M}_1/\alpha = M_1/\bar{\alpha} \quad (15)$$

$$\bar{p}'' - \left\{ \frac{2\alpha\bar{u}'}{(\alpha\bar{u} - \omega)} + \frac{\bar{T}'}{T} \right\} \bar{p}' - \left[\bar{\alpha}^2 - \frac{\bar{M}_1^2}{T} (\bar{\alpha}\bar{u} - \bar{\omega})^2 \right] \bar{p} = 0 \quad (16)$$

식 (16)은 불안정성 해석에서 화학반응을 무시한 2차원 경우의 식 (14)에 해당하며, 화학반응을 무시하면 Squire의 변환은 3차원 문제를 2차원 문제로 변환시킬 수 있음을 보여준다.

2.2 경계조건 및 교란의 성질

$y \rightarrow \pm\infty$ 일 때 압력 교란은 유한하여야 함이 식 (14)의 경계조건이 된다. $y \rightarrow \pm\infty$ 일 때, \bar{u}' 과 [RXN1]은 무시할 수 있으며, [RXN2]는 $-\bar{T}'(\gamma - 1)\gamma$ 이 되므로, 식 (14)는 다음과 같이 된다.

$$\bar{p}'' - q^2 \bar{p} = 0 \quad (17)$$

$$q^2 = (\alpha^2 + \beta^2) - \frac{M_1^2}{T} (\alpha\bar{u} - \omega)^2 \quad (18)$$

$y \rightarrow \pm\infty$ 일 때 압력의 경계조건은 다음과 같이 된다.

$$y \rightarrow -\infty \text{일 때 } \bar{p} \rightarrow \exp(qy) \\ y \rightarrow \infty \text{일 때 } \bar{p} \rightarrow \exp(-qy) \quad (19)$$

교란의 성질은 자유유동 i 에 대한 파장 벡터(α, β) 방향으로의 교란의 마하수인 상대 마하수, M_{ri} 로써 설명할 수 있다.

$$M_{r1} = \frac{\alpha(c^* - \bar{u}_1^*)}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} a_1^*} = \bar{M}_1(c-1) \\ M_{r2} = \frac{\alpha(c^* - \bar{u}_2^*)}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} a_2^*} = \frac{\bar{M}_1(c - \bar{u}_2)}{T_2^{1/2}} \quad (20)$$

상첨자 *는 차원수를 나타내며, c^* 는 교란의 전파 속도이고 a_i^* 는 자유유동 i 에서의 음속이다. 상대 마하수의 절대값이 1보다 작으면 교란은 그 경계에 대하여 아음속이라 하고, 1보다 크면 초음속이라 한다. q^2 가 0인 곳에서 교란은 음속으로 된다.

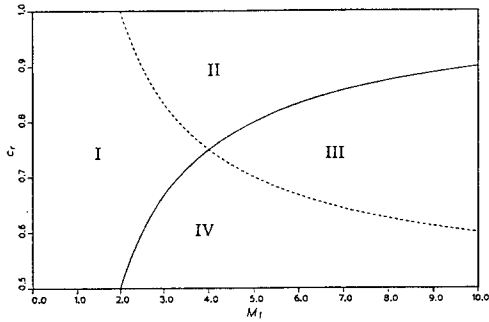


Fig. 2 The sonic phase speeds of disturbances vs. Mach number. ---, c_i , —, c_u

c_i 을 느린 유동에 대하여 음속인 교란의 위상속도이고 c_u 를 빠른 유동에 대하여 음속인 교란의 위상속도라고 하면, c_i 과 c_u 는 다음과 같이 정의된다.

$$c_i = \bar{u}_2 + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} \bar{T}_2^{1/2}}{\alpha M_1} = \bar{u}_2 + \frac{\bar{T}_2^{1/2}}{M_1}$$

$$c_u = 1 - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}{\alpha M_1} = 1 - \frac{1}{M_1} \quad (21)$$

Fig. 2는 M_1 에 대해서 c_u 와 c_i 을 $\bar{u}_2=0.5$, $\bar{T}_2=1$, $\beta=0$ 인 경우에 나타낸 것이다. 이 곡선들은 (c_r , M_1) 평면을 4영역으로 나눈다. 이 영역들은 교란들이 양 경계에 대하여 아음속인 영역 ($|M_{r1,2}| < 1$, 영역 I), 빠른 유동에 대해서는 아음속이고 느린 유동에 대해서는 초음속인 영역 ($|M_{r1}| > 1$, $|M_{r2}| < 1$, 영역 II), 빠른 유동에 대해서는 초음속이고 느린 유동에 대해서는 아음속인 영역 ($|M_{r1}| > 1$, $|M_{r2}| < 1$, 영역 IV), 그리고 양 경계에 대해 초음속인 영역 ($|M_{r1,2}| > 1$, $M_{r1,2} < 1$, 영역 III)으로 이루어진다. Mack⁽⁵⁾과 Zhuang⁽⁹⁾ 등은 가장 불안정한 교란의 상대 마하수를 대류 마하수(convective Mach number)라 칭하였다.

2.3 수치해법

식 (14)를 풀기 위해 슈팅(shooting)과 Newton-Raphson 법을 사용한다. 우선 고유치를 추측하고 식 (19)를 사용하여 상당히 큰 y 값에 대한 \bar{v} 을 계산하는데, y 값은 층류 유동장이 허용하는 한도내에서 해가 일정할 정도의 큰 값을 취하도록 한다. 그 다음에 식 (14)를 양쪽 경계에서 혼합층의 중심선까지 적분한다.

$y=0$ 인 중심선에서 빠른 유동에서부터 적분해서 계산한 \bar{v} 와 \bar{v}' 의 값을 느린 유동에서부터 적분한

값들과 비교하여 허용된 오차내에서 수렴하지 않으면, 새로운 고유치를 Newton-Raphson 법에 의해 선택하여 적분을 수행한다. 위의 반복계산은 고유치 증가가 10^{-6} 이내가 될 때까지 계속한다.

3. 복수 불안정성 모드

3.1 변곡점과 복수 불안정성 모드

Rayleigh의 변곡점 정리 (1)에 따르면, 비압축성 유체가 불안정하기 위한 필요조건은 층류유동이 변곡점을 가져야 하는 것이다. 이 조건은 유동 영역 내에서 \bar{u}'' 이 적어도 한번 부호를 바꾸거나 혹은 \bar{u}' 이 극값을 가질 것을 요구한다. Fjörtoft⁽⁷⁾는 위의 조건을 더욱 제한하여 유동이 불안정하기 위해서는 유동 영역내에서 $\bar{u}''(\bar{u} - \bar{u}_s) < 0$ 이어야 한다고 밝혔다. 여기서, $\bar{u}_s = \bar{u}(y_s)$ 로 y_s 는 \bar{u}'' 이 0이 되는 점이다. 이 조건을 밀도 변화가 있는 비압축성 유동에 확장시켜 본다.

비압축성 유동의 경우 불안정성 해석에서 $D_a=0$ 인 결과와 $D_a \neq 0$ 인 결과가 거의 일치하므로⁽¹⁰⁾, 문제를 단순화시키기 위해서 $D_a=0$ 로써 화학반응을 무시하면, 시간적 불안정성에 대하여 식 (14)는 유동 방향에 수직한 속도의 교란 \bar{v} 에 대하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left(\frac{\bar{v}'}{\bar{\rho}}\right) - \left\{ \frac{(\bar{\rho}\bar{u}')}{\bar{\rho}^2(\bar{u}-c)} + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{\bar{\rho}} \right\} \bar{v} = 0 \quad (22)$$

위 식에 \bar{v} 의 공액복소수 \bar{v}^* 를 곱하고 $-\infty$ 에서 ∞ 까지 적분한다. 첫번째 항을 부분적분하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{|D\bar{v}|^2 + (\alpha^2 + \beta^2)|\bar{v}|^2}{\bar{\rho}} + \frac{(\bar{u}-c_r)(\bar{\rho}\bar{u}')|\bar{v}|^2}{\bar{\rho}^2|\bar{u}-c|^2} \right\} dy + ic_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\bar{\rho}\bar{u}')|\bar{v}|^2}{\bar{\rho}^2|\bar{u}-c|^2} dy = 0 \quad (23)$$

D 는 미분 기호 d/dy 이고 c_r 과 c_i 는 파장 속도의 실수 및 허수 부분이다. 식 (23)의 허수 부분은

$$c_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\bar{\rho}\bar{u}')|\bar{v}|^2}{\bar{\rho}^2|\bar{u}-c|^2} dy = 0 \quad (24)$$

이며, $-\infty < y < \infty$ 에서 $(\bar{\rho}\bar{u}')$ 가 최소한 한번 부호를 바꿀 것을 요구하는데 이것이 불안정성을 위한 필요조건이 된다. 중요한 것은 vorticity가 아닌 각운동량 $\bar{\rho}\bar{u}'$ 이 극값을 가져야 한다는 것이다. 이

조건의 더욱 제한적인 형태는 식 (23)의 실수 부분을 고려하여 구할 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\bar{u}-c_r)(\bar{\rho}\bar{u}')'\bar{v}^2}{\bar{\rho}^2|\bar{u}-c|^2} dy = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|D\bar{v}|^2+(\alpha^2+\beta^2)|\bar{v}|^2}{\bar{\rho}} dy \quad (25)$$

$c_i > 0$ 이라고 가정하고 식 (24)에 $(c_r - \bar{u}_s)/c_i$ 를 곱한 뒤 식 (25)에 더하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\bar{u}-\bar{u}_s)(\bar{\rho}\bar{u}')'\bar{v}^2}{\bar{\rho}^2|\bar{u}-c|^2} dy = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|D\bar{v}|^2+(\alpha^2+\beta^2)|\bar{v}|^2}{\bar{\rho}} dy \quad (26)$$

따라서 불안정성을 위한 필요 조건은 $-\infty < y < \infty$ 의 어딘가에서 $(\bar{\rho}\bar{u}')'(\bar{u}-\bar{u}_s) < 0$ 이어야 한다.

층류 유동에 대해서 조건 (24)와 (26)을 만족시키는 점들을 찾아보았다. Fig. 3에서 화학반응이

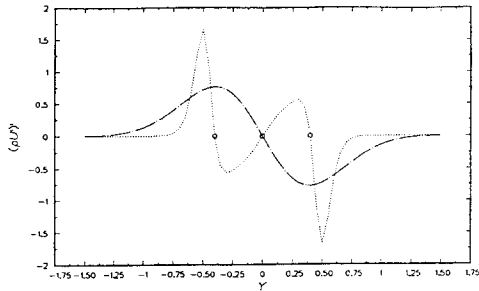


Fig. 3 The function appearing in the necessary condition for temporal instability. $T_2=1$, $Da=10$. \cdots , $T_{ad}=1$; $\cdots\cdots$, $T_{ad}=8$; \square , \circ , inflection points

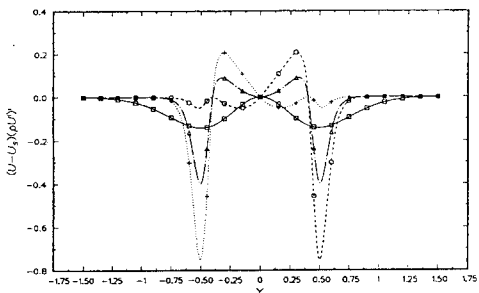
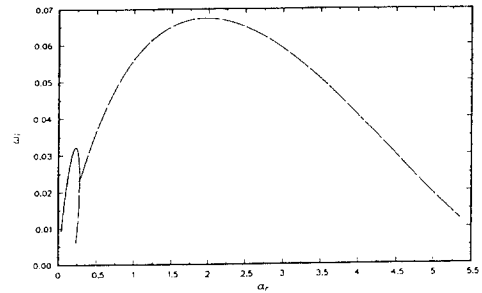


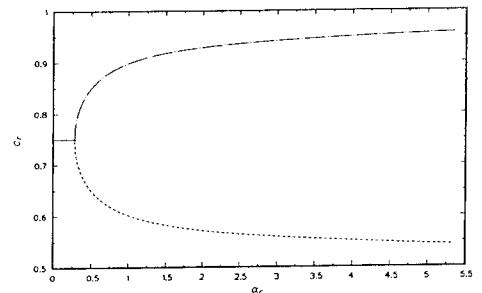
Fig. 4 The function appearing in the strong necessary condition for temporal instability. $T_2=1$, $Da=10$. \square , $T_{ad}=1$, $\bar{u}_s=0.75$; \circ , $T_{ad}=8$, $\bar{u}_s=0.64$; \triangle , $T_{ad}=8$, $\bar{u}_s=0.75$; $+$, $T_{ad}=8$, $\bar{u}_s=0.96$

없는 경우 유동이 하나의 변곡점을 가지는 데 반하여 화학반응이 있는 경우 ($T_{ad} \geq 3$)는 세 개의 변곡점을 가진다. Fig. 4는 불안정성의 더욱 제한적인 조건을 조사한 것으로 위의 세 점 모두 제한적 조건을 만족하므로 화학반응이 있는 유동은 세 개의 다른 불안정성 모드를 갖게 된다.

Fig. 5는 $T_{ad}=8$ 인 경우에 시간적 성장률과 위상 속도를 주파수의 함수로써 나타낸 것이다. 시간적인 경우 유동장이 중심선에 대하여 대칭이기 때문에 불안정성 모드 중 두 개는 같은 성장률을 보이므로 단지 두 개의 성장률만이 나타난다. 첫번째 모드는 기본 유동의 vorticity와 각운동량이 모두 극값을 가지는 중심 변곡점에서 생기는 것으로 그 위상속도는 두 자유유동의 평균 속도이다. 두번째 성장률은 바깥 변곡점에서 생기는 두 불안정성 모드의 성장률이다. Vorticity가 아닌 각운동량이 바깥 변곡점에서 극값을 가지기 때문에 바깥 모드들



(a)



(b)

Fig. 5 The multiple instability modes in the temporal flow. (a) growth rate (b) phase velocity. $T_{ad}=8$, $M_1=0$, $T_2=1$, $Da=10$. --- , center mode; --- , slow mode; $\text{-}\cdot\text{-}$, fast mode. Note that the two outer modes have identical growth rates

은 vorticity와 관계가 없다. 연소열이 상당히 큰 경우에는 바깥 모드가 중심 모드보다 더욱 불안정해져 유동 전체를 지배하게 되며, 그 최대 성장률은 중심 모드에 비해서 열 배나 큰 주파수에서 일어나 매우 짧은 파장을 갖게 된다. Fig. 5b에서와 같이 두 바깥 모드의 위상속도는 서로 다르다. 하나는 중심 모드보다 빠르게(빠른 모드) 다른 하나는 느리게 움직이며(느린 모드), 주파수가 증가함에 따라 각각 대응하는 변곡점의 층류유동 속도에 접근한다.

3.2 변곡점을 포함하지 않는 초음속 복수 불안정성 모드

압축성 유동에서 중립 아음속 파장이 존재하는 필요 충분 조건은 $(\bar{u}'/\bar{T})'=0$ 으로⁽¹¹⁾, 위의 조건을 만족하는 점을 일반 변곡점이라 한다. Lees와 Lin⁽¹¹⁾이 증명한 충분 조건은 일반 변곡점에서 자유유동에 대한 교란의 상대 마하수가 아음속일 것을 요구한다.

상대 마하수가 초음속인 경우에는 불안정하기 위해서 일반 변곡점을 꼭 필요로 하지는 않으며 복수 모드가 존재할 수 있다. 이 복수 불안정성 모드의 존재 가능성은 압력 교란에 대한 불안정성 방정식인 식 (14)의 2차원 경우를 고려함으로써 설명할 수 있다. 상대 마하수의 정의를 사용하여 식 (14)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{p}'' - \alpha^2(1 - M_1^2)\bar{p} = 0 \tag{27}$$

식 (13)을 사용하여 식 (27)을 다음의 편미분 방정식으로 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \bar{p}'}{\partial y^2} + (1 - M_1^2) \frac{\partial^2 \bar{p}'}{\partial x^2} = 0 \tag{28}$$

$M_1^2 < 1$ 이면 식 (28)은 타원형 미분방정식이 되며, 일반 변곡점에서 생기는 유일해가 존재한다. 반면에 $M_1^2 > 1$ 이면 식 (28)은 쌍곡선형 미분방정식이 되어 $y = \pm \infty$ 에서의 경계 조건을 만족하는 많은 해가 존재할 수 있다. Mack⁽⁵⁾은 위와 비슷한 많은 해를 압축성 경계층에서 발견했다.

화학반응이 없는 비반응성 혼합층은 압축성 경계층⁽⁵⁾과 마찬가지로 높은 마하수에서도 한 개의 일반 변곡점을 갖는다. Fig. 6은 $M_1=5$ 에서 비반응성 혼합층이 한 개의 변곡점을 갖는데 반해서 반응혼합층 ($T_{ad}=4$)은 낮은 마하수의 유동과 같이 세 개

의 변곡점을 가짐을 보이고 있다. 이와 같이 한 개의 변곡점을 갖는다 해도 자유유동이 교란의 위상속도에 대해서 초음속인 영역이 존재하면 변곡점에 관계 없이 복수 불안정성 모드가 존재할 수 있다.

Fig. 7은 $M_1=5$ 에서의 성장률과 위상속도를 주파수의 함수로서 표시한 것이다. 비반응성 경우에는 한 개의 변곡점을 가지는 데도 불구하고 두 개의 불안정성 모드를 보이고 있다. 하나는 낮은 자유유동에 대해서 초음속이고(빠른 모드) 다른 하나는 빠른

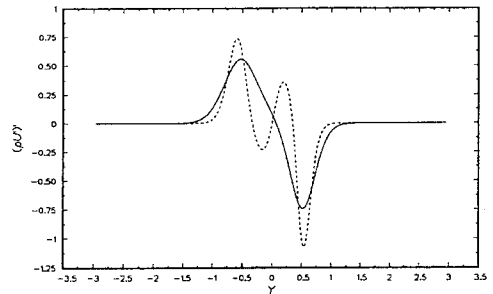
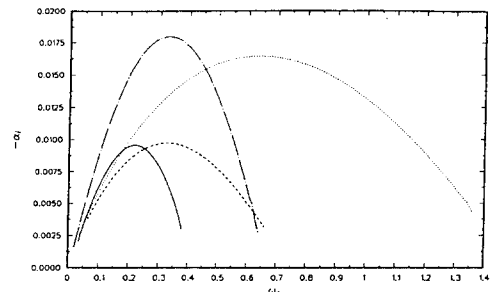
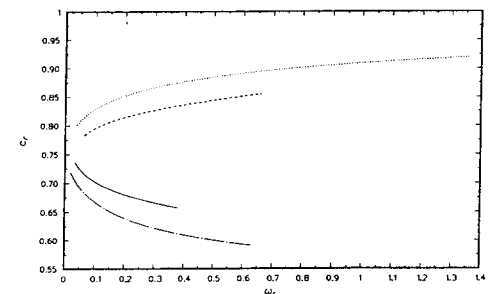


Fig. 6 $(\bar{\rho} \bar{u}')$ in the laminar flow. $M_1=5$, $T_2=1$, $Da=10$. —, $T_{ad}=1$; ---, $T_{ad}=4$



(a)



(b)

Fig. 7 The multiple instability modes in the compressible flow. (a) growth rate (b) phase velocity. $M_1=5$, $T_2=1$. —, slow mode($T_{ad}=1$); ---, fast mode($T_{ad}=1$); - · -, slow mode($T_{ad}=4$); ·····, fast mode($T_{ad}=4$)

자유유동에 대해서 초음속이다(느린 모드). 두 모드는 거의 비슷한 성장률을 보이나 빠른 모드가 좀 더 넓은 주파수 영역을 차지한다. 위의 두 모드는 낮은 속도의 반응혼합층이나 경계층에서 불안정하기 위해서 변곡점 및 변곡점에서 아음속이어야 하는 vorticity 모드와는 다르다.

반응혼합층($T_{ad}=4$)은 세 개의 변곡점을 가지고 있으나 두 개의 불안정성 모드를 보인다. 이들은 바깥 모드로서 위상속도들은 자유유동에 대해서 초음속이나 바깥 변곡점에서의 층류 속도에 접근하고 있다. 이는 반응혼합층에서의 불안정성 교란이 낮은 속도에서의 불안정성 교란의 연속임을 제시한다.

Fig. 8은 마하수에 따른 교란의 형태를 조사하기 위해서 가장 불안정한 교란의 위상속도 c_r 을 마하수의 함수로써 반응이 없는 경우($T_{ad}=1$)와 반응이 있는 경우($T_{ad}=4$)에 나타낸 것이다. 실선은 빠른 자유유동에 대하여 음속인 교란의 위상속도

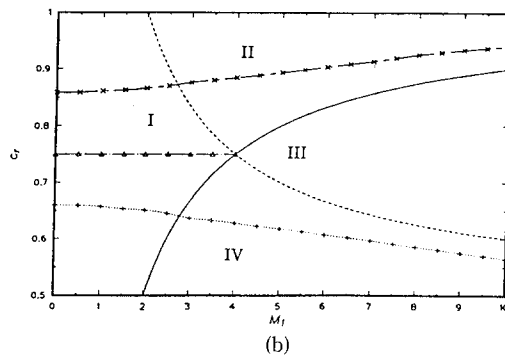
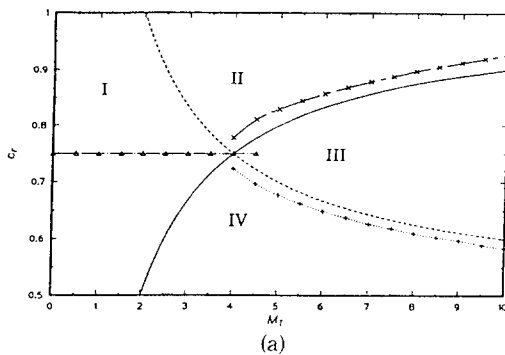


Fig. 8 Phase speeds of the most unstable modes versus Mach number. (a) non-reacting flow ($T_{ad}=1$) (b) reacting flow ($T_{ad}=4$). ---, c_i ; —, c_u ; Δ , center mode; +, slow mode; x, fast mode

c_u 이며, 파선은 느린 자유유동에 대해서 음속인 교란의 위상속도 c_i 이다. 상대 마하수가 아음속이면 ($|M_{r1,2}| < 1$, 영역 I), 비반응 혼합층에는 중심 교란만이 존재하는데 이는 두 자유유동의 평균 속도로 움직이는 Kelvin-Helmholtz 모드이다. 마하수가 증가함에 따라 중심 모드는 두 자유유동에 대해서 모두 초음속이 되고 ($|M_{r1,2}| > 1$, 영역 III), 조금씩 안정되다가 완전히 안정된다. 초음속 상대 마하수에서는 Fig. 7에서와 같이 일반 변곡점과 관계 없는 불안정성 교란이 일어난다. Fig. 8a는 비반응성의 경우에 빠른 모드가 빠른 유동에 대하여는 아음속이나 느린 유동에 대하여는 초음속이고 ($|M_{r1}| < 1, |M_{r2}| > 1$, 영역 II), 느린 모드가 빠른 유동에 대해서는 초음속이나 느린 유동에 대해서는 아음속임을 ($|M_{r1}| > 1, |M_{r2}| < 1$, 영역 IV) 보인다. 마하수가 증가함에 따라 바깥 교란의 위상속도는 자유유동의 속도에 접근한다. Fig. 8b에서 반응혼합층의 경우($T_{ad}=4$), 낮은 마하수에서는 세 개의 변곡점에 따른 불안정성 교란이 존재한다. 마하수가 증가함에 따라 바깥 교란의 위상속도는 초음속이 되며, 중심 모드도 또한 초음속이 된다. 높은 마하수에서 바깥 모드들은 낮은 마하수에서 변곡점에 따른 불안정성 교란의 연속이나, 변곡점 또는 기본 유동의 각운동량의 극값 등은 더 이상 불안정성의 필요 조건이 아니기 때문에 초음속 유동에서는 그 의미를 잃는다.

4. 결 론

화학반응이 존재하는 혼합층에 대하여 안정성 해석을 수행하였다. 반응혼합층의 간단한 모델로서는 공기와 연료의 평행한 유동을 사용하며 유한반응물을 가지는 비가역적 Arrhenius 형태의 화학반응을 고려하고, 층류유동은 2차원 압축성 경계층 방정식으로 부터 계산하였다. 비압축성이나 밀도의 변화를 가지는 유동에 대하여 불안정성을 위한 필요 조건을 유도하였다. 비압축성 반응혼합층의 바깥 부분에 각운동량이 극값을 가지는 변곡점에서 새로운 불안정성 모드가 존재한다. 이러한 바깥 모드는 중심 모드보다 빠르거나 느리게 움직인다. 압축성 유동에서는 교란의 위상속도가 층류 유동에 대하여 초음속인 영역이 존재한다면 변곡점에 관계 없이 복수 불안정성 모드가 존재한다. 높은 마하수에서의 반응혼합층의 바깥 모드들은 낮은 마하수에서

변곡점에 따른 불안정성 교란의 연속이나, 변곡점은 초음속 유동에서는 그다지 중요하지 않다.

참고문헌

- (1) Rayleigh, Lord, 1880, "On the Stability, or Instability, of Certain Flow Motions," *Proceedings of the London Math. Soc.* Vol. 11, pp. 57~70.
- (2) Groppengiesser, H., 1970, "Study on the Stability of Boundary Layers in Compressible Fluids," *NASA TT F-12*, p. 786.
- (3) Blumen, W., 1970, "Shear Layer Instability of an Inviscid Compressible Fluid," *J. Fluid Mech.* Vol. 40, pp. 769~781.
- (4) Drazin, P. G. and Davey, A., 1977, "Shear Layer Instability of an Inviscid Compressible Fluid. Part 3," *J. Fluid Mech.* Vol. 82, pp. 255~260.
- (5) Mack, L. M., 1984, "Linear Stability and the Problem of Supersonic Boundary-Layer Transition," *AIAA Journal* Vol. 13, pp. 278~289.
- (6) Marble, F. E. and Adamson, T. C., 1954, "Ignition and Combustion in a Laminar Mixing Zone," *Jet Propulsion*, Vol. 24, No. 85.
- (7) Drazin, P. G. and Reid, W. H., 1982, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, UK.
- (8) Squire, H. B., 1933, "On the Stability for Three-Dimensional Disturbances of Viscous Fluid Flow between Parallel Walls," *Proc. Royal Soc. of London, Series A* Vol. 142, pp. 621~628.
- (9) Zhuang, M., Dimotakis, P. E. and Kubota, T., 1990, "The Effect of Walls on a Spatially Growing Supersonic Shear Layer," *Phys. Fluids A*, Vol. 2, pp. 599~604.
- (10) 신동신, 추후 발표예정.
- (11) Lees, L. and Lin, C. C., 1946, "Investigation of the Stability of the Laminar Boundary Layers in a Compressible Fluid," *NACA Tech. Note No.* 1115.