

〈논 문〉

Bi-CGSTAB 해법에 의한 복합격자망 해석방법에 관한 연구

배진호* · 이재현**

(1996년 1월 27일 접수)

A Study on Multi-Block Technique by Bi-CGSTAB Solver

Jin-Hyo Bae* and Jae-Heon Lee**

Key Words : Multi-Block Technique(복합격자망 해석방법), Bi-CGSTAB(Bi-Conjugate Gradient STABILized, 2중 공액 구배 안정화), Non-Staggered Grid System(비엇갈린 격자계), Duct System(덕트 시스템)

Abstract

A numerical method on multi-block technique by Bi-CGSTAB(Bi-Conjugate Gradient STABILized) solver has been proposed. The present multi-block technique can reduce the numerical manipulation greatly because the common regions at the interface of each block are not necessary. In order to test the computational performance of present multi-block technique, the flow characteristics in a T type duct system and a N type duct system have been investigated by three kinds of methods such as the single-block method, the previous multi-block technique and the multi-block technique with Bi-CGSTAB solver. The results indicated that the required CPU time by present multi block technique was shorter than that of other two numerical methods and the convergence history was shown very stable at the present multi-block technique.

1. 서 론

Navier-Stokes 방정식의 해를 수치해석방법으로 구하기 위해서는 관심 대상 내부에 격자를 형성시켜야 한다. 많은 공학적인 문제에 있어서 관심대상은 복잡한 형태를 가질 수 있으므로 단일 블록 해석방법(single-block technique)에 의한 격자형성은 불합리하거나 혹은 불가능한 경우가 종종 발생한다. 예를들면 엔진 흡배기구, 공기조화 설비의 유입덕트 혹은 배출덕트가 부착된 덕트시스템 그리고 환기탑이 설치되는 터널 등은 이러한 유형의 범주에 속한다.

유한 체적법에 의하여 전술한 복잡한 기하학적

형상 내부의 유동특성을 고찰하고자 할 때 효과적인 방법은 복합격자망 해석방법(multi-block technique)을 도입하는 것이다. 기존 복합격자망 해석 방법에서는 각 블록에 대하여 독자적으로 격자망을 생성시키고, 이산화된 Navier-Stokes 방정식도 각 블록에서 독립적으로 풀려지게 된다. 이때 블록간의 정보전달을 위해서 각 블록에서 구하여진 해를 이웃한 블록으로 전달시키기 위한 추가적인 수치조작을 수행해야 한다. 많은 연구가들에 의하여 이에 대한 논의가 활발히 진행되어 왔으며 지금까지 알려진 방법은 보존적 방법(conservative method)^(1,2)과 비보존적 방법(non-conservative method)⁽³⁾으로 크게 구별된다.

현재까지의 복합격자망 해석방법에서는 각 블록에서 독립적으로 물리량들을 구한 후, 이웃한 블록에서의 물리량을 전달 받아서 전체계산영역에서의

*한양대학교 대학원 기계공학과

**회원, 한양대학교 공과대학 기계공학과

완전한 해를 구하기 위한 반복계산을 수행하므로 전체 계산영역에서 최종적으로 수렴된 해를 얻는데에는 많은 계산시간이 요구된다. 이와 더불어 대부분의 기존 복합격자망 해석방법에서는 엇갈린 격자계(staggered grid system)를 사용하므로 블록들간의 경계면에 나타나는 속도벡터의 처리가 용이하지 않은 난점도 안고 있다.

복합격자망 문제에서 나타나는 이러한 난점을 해결할 수 있는 방법으로서 비엇갈린 격자계(non-staggered grid system)에서 각 블록에 대하여 Navier-Stokes 방정식을 이산화시킨 후, 모든 블록들에서 구해진 이산화된 방정식들을 조합하여 한번에 전체계산영역에서의 해를 구하는 방법을 고려할 수 있다. 이 경우, 각 블록에서 구해진 이산화 방정식들을 조합시킨 매트릭스는 단일블록문제에서 얻어지는 정렬 매트릭스(structured matrix)와는 달리 비정렬 매트릭스(unstructured matrix)의 형태를 갖게 된다. 많은 연구가들에 의해서 비정렬 매트릭스의 해를 구하기 위한 연구가 시도되었으며, 최근에 Van Der Vorst에 의하여 해의 수렴성이 뛰어난 Bi-CGSTAB(Bi-Conjugate Gradient STABILized, 2중 공액 구배 안정화)⁽⁴⁾ 방법이 고안되었다. 비정렬 매트릭스해법인 Bi-CGSTAB 해법을 이용하여 복합격자망 문제를 해석하면 블록간의 정보전달을 위한 추가적인 고려가 필요없으며, 수치계산을 위한 계산시간도 상당히 감소시킬 수 있다. 이러한 Bi-CGSTAB 해법에 관한 수학적 배경은 참고문헌 (4)에 잘 알려져 있으나, 이 해법을 실제로 복합격자망 문제를 해석하기 위한 유한 체적법(Finite Volume Method)에 적용시킨 수치적 기법의 개발에 관한 연구는 찾아보기 힘들다.

따라서 본연구에서는 Bi-CGSTAB 해법에 의하여 복합격자망문제를 해석하기 위한 수치적 기법을 개발하고자 하였으며, 본 연구의 타당성 및 해의 수렴성을 고찰하기 위하여 T형 덕트시스템과 N형 덕트시스템을 검토문제로 도입하였다. 계산결과 검토를 위하여 단일 블록 해석방법, 기존 복합격자망 해석방법 그리고 Bi-CGSTAB 해법에 의한 복합격자망의 해석방법이 시도되었으며 각 방법에 의한 해의 수렴시간과 수렴경향을 비교하였다.

2. 수치해석 이론

복합격자망 해석방법에 관련된 이론을 제외한 대

부분의 수치 해법 방법은 참고문헌⁽⁵⁾에 설명되어 있으므로 본 논문에서는 복합격자망 해석방법에 관해서만 상세히 기술하고자 한다.

2.1 기존 복합격자망 해석방법

기존 복합격자망 해석방법을 설명하기 위하여 Fig. 1에 두 개의 블록으로 구성되는 간단한 복합격자망 형상을 도시하였다. 그림에서 경계면 1, 8, 7, 9, 10, 11, 3 및 2로 둘러싸인 부분을 관심영역이라 하고, 경계면 4, 5, 6, 9, 10 및 11로 둘러싸인 부분을 블록 U 그리고 경계면 1, 2, 3, 12, 7 및 8로 둘러싸인 부분을 블록 L 으로 칭하기로 하자. 단일블록 해석방법에서는 Fig. 1에 나타난 영역 즉, 블록 U 와 블록 L 외에도 음영으로 표시된 영역을 계산영역에 추가적으로 고려하여야 한다. 기존 복합격자망 해석방법을 이용하는 수치계산시 전체 계산영역을 블록별로 분리하여 개별적으로 해석하므로 블록간의 정보전달을 위하여 블록들이 연결되는 부위에 공통영역이 필요하며, 이러한 공통영역은 Fig. 1의 빗금 친 영역에 해당된다.

상기 공통영역 내의 제어체적에 분포되는 물리량을 결정하는 방법으로는 보존적 방법과 비보존적 방법의 두 가지 방법이 있으나, 여기에서는 속도 구배가 심하거나 공통영역 근처에 재순환 영역이 존재하는 경우에도 만족할 만한 해를 제공할 수 있는 보존적 방법에 관해서만 설명하기로 한다. 보존적 방법은 블록 U 의 해석시 공통영역의 내부 경계면(Fig. 1의 4-5-6면)을 통과하는 플럭스값을 블록 L 에서 전달받은 후 이를 해당 제어체적에 관한 이산화 방정식의 생성항으로 간주하는 방법이다.

Fig. 1에 나타난 2차원 해석영역에 제어체적과

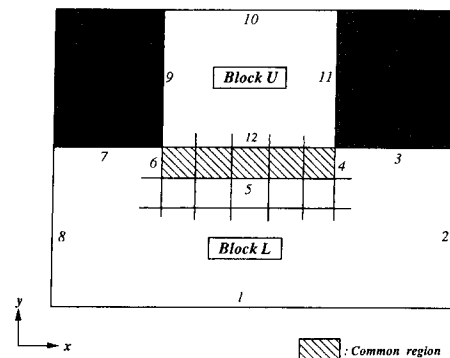


Fig. 1 Schematic diagram of conservative boundary

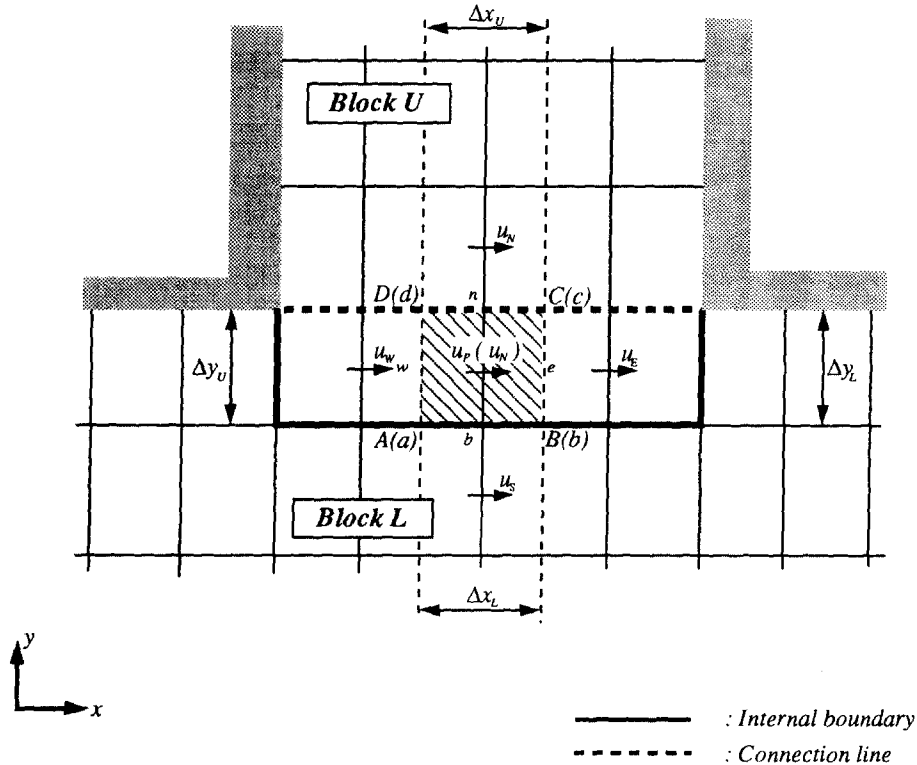


Fig. 2 Detail of overlap region with a u-control volume of branch duct(ABCD)

속도성분을 예시하여 Fig. 2에 나타내었다. Fig. 2에는 블록 U와 블록 L이 공유하는 제어 체적중 크기가 $\Delta x_U \times \Delta y_U$ 혹은 $\Delta x_L \times \Delta y_L$ 인 한 개의 제어 체적인 ABCD 혹은 abcd가 빗금으로 표시되어 있다. 여기서 ABCD는 블록 U에 소속된 제어체적을 뜻하고 abcd는 블록 L에 소속된 제어체적을 뜻한다. 여기에서는 논의의 편의를 위하여 x방향 운동량 방정식에 대해서만 내부 경계면의 물리량을 구하는 방법을 설명한다.

블록 U에 관한 수치해석 중, 공통영역 내부(대표적인 제어체적 ABCD)에서의 속도 u_P 를 계산하기 위해서는 내부 경계면 AB(ab)에서의 x방향 속도값이 경계값으로 요구된다. 그러나 이 경계값은 블록 L에서 계산된 x방향 속도값으로부터 직접 얻을 수 없으므로, 보존적 방법하에 이산화된 아래의 식 (1)을 사용하여 블록 U의 제어체적 ABCD에서의 속도 u_P 를 직접 계산한다.

$$a_P u_P = a_E u_E + a_w u_w + a_N u_N - (F_n + F_e - F_w) u_P + J_{AB} \quad (1)$$

$$a_P = a_E + a_w + a_N \quad (2)$$

$$\begin{aligned} a_E &= D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0] \\ a_w &= D_w A(|P_w|) + [F_w, 0] \\ a_N &= D_n A(|P_n|) + [-F_n, 0] \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, 하첨자 P, E, W 및 N은 그림에 나타낸 바와 같이 각각 제어체적 ABCD의 내부, 제어체적의 동쪽, 서쪽 및 북쪽에 인접한 위치임을 뜻한다. 또한 하첨자 e, w 및 n은 각각 제어체적 ABCD의 동쪽 면, 서쪽 면 및 북쪽 면을 뜻한다. F, D 그리고 함수 A는 각각 대류 플럭스, 확산 플럭스 및 대류-확산 도식(scheme)을 나타내며 참고문헌 (5)의 정의를 따랐다. 식 (1)에서의 생성항 J_{AB} 는 블록 U에 속한 단면 AB를 통과하는 x방향 운동량 플럭스이며 보존적 복합격자망 해석방법으로부터 아래 식과 같이 표현될 수 있다.

$$J_{AB} = J_{ab} \quad (4)$$

이때 블록 L에 속한 단면 ab를 통과하는 x방향 운동량 플럭스, J_{ab} 는 이미 계산되어진 블록 L에서의 속도 등이 이용되어 아래와 같이 계산될 수 있다.

$$J_{ab} = \{D_{ab}A(|P_{ab}|) + [F_{ab}, 0]\} \times u_N - \{D_{ab}A(|P_{ab}|) + [-F_{ab}, 0]\} \times u_S \quad (5)$$

여기서, u_N 과 u_S 는 블록 L 에서의 속도 성분으로서 각각 ab 면의 위와 아래에 인접해 있는 u 속도 성분이며 하첨자 ab 는 제어 체적 $abcd$ 에 속한 ab 면임을 나타낸다.

SIMPLE 알고리즘에 의하면 식 (1)에 의하여 구하여진 속도 u_p 는 연속방정식이 변형된 압력 수정값 p' 에 의하여 다시 교정되어야 하므로 적절한 압력 수정값이 구하여야 한다. 공통영역에서 압력수정 방정식의 유도를 위한 제어체적을 Fig. 3에 나타내었다. 이 그림의 기호 설명은 Fig. 2의 예를 따랐다. 그림을 참고하면 블록 U 의 제어체적 $ABCD$ 에 대한 압력수정 방정식의 이산화 방정식의 형태는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$a_p p'_p = a_E p'_E + a_w p'_w + a_N p'_N + b \quad (6)$$

여기서, b 는 생성항을 뜻하며 아래와 같이 정의된다.

$$b = [(\rho u^*)_w - (\rho u^*)_e] \Delta y_U + \dot{m}_U$$

$$- (\rho v^*)_n \Delta x_L \quad (7)$$

여기서 상첨자 $*$ 는 이전 반복 계산에서의 값임을 뜻하며, 하첨자로 사용된 w, e 및 n 은 압력수정값이 정의되는 제어체적의 서쪽 면, 동쪽 면 및 북쪽 면을 뜻한다. \dot{m}_U 는 블록 U 에 해당되는 AB 면을 통과하는 질량 플럭스이며 이 질량 플럭스는 블록 L 에 해당되는 ab 면을 통과하는 질량 플럭스 \dot{m}_L 과 같으므로 아래 식으로 표현된다.

$$\dot{m}_U = \dot{m}_L \quad (8)$$

여기서, 질량 플럭스 \dot{m}_L 은 이미 계산되어진 블록 L 에서의 속도값을 이용하여 구할 수 있다.

지금까지의 논의로부터 블록 L 과 블록 U 로 구성되는 복합격자망에 대하여 각각의 블록에서 종속변수의 이산화 방정식을 구하였으며, 이로부터 전체 계산영역에서 해를 얻는 과정은 다음과 같다.

- (1) 블록 L 에서의 초기 유동장을 가정하고 단일블럭 해석방법과 동일한 방법으로 적당한 횡수의 내부 반복계산을 수행하여 유동장과 압력장을 개선한다.

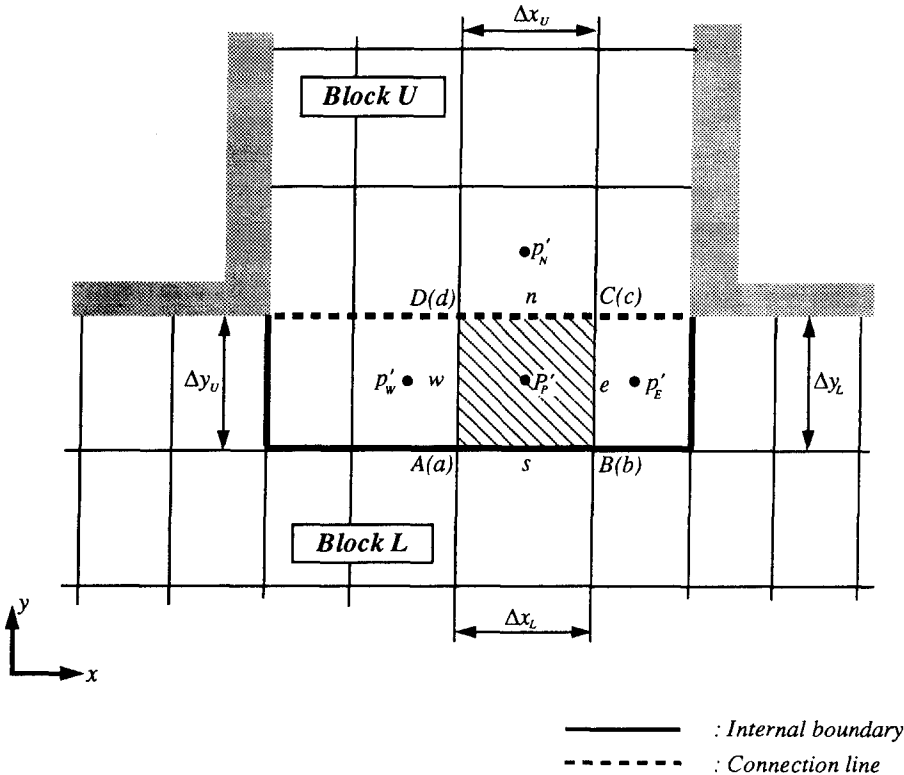


Fig. 3 Detail of overlap region with a p' -control volume of branch duct (ABCD)

- (2) 블록 U 에서의 초기 유동장을 가정하고 공통영역에서의 종속변수의 이산화 방정식을 보존적 방법으로 구한다. 블록 L 에서와 마찬가지로 적당한 횡수의 내부반복계산을 수행하여 유동장과 압력장을 개선한다.
- (3) 전체 계산영역에서 유동장과 압력장이 수렴할 때까지 과정 1과 과정 2를 되풀이한다.

2.2 Bi-CGSTAB 해법에 의한 복합격자망 해석방법

2.2.1 종속변수의 이산화

본 연구에서는 복합격자망 문제의 해석을 위하여 격자계로서 비엇갈린 격자계^(6,7,8)를 사용하였다. Fig. 4에는 Fig. 1에 나타낸 블록 U 와 블록 L 이 접합되어 있는 전형적인 복합격자망에서 비엇갈린 격자계를 사용할 경우, 속도와 압력수정값의 위치를 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이 본 연구에서 제안하는 방법에서는 블록과 블록의 경계에 공

통영역이 존재하지 않으며, 종속변수 u, v 그리고 p' 는 모두 제어체적의 중앙에 위치하게 된다. Fig. 4에서 하첨자로 사용된 U 와 L 은 각각 블록 U 와 블록 L 을 의미한다.

그림에 나타낸 바와 같이 블록 U 와 블록 L 이 접합되어 있는 경우, 블록간의 경계면에 인접한 두 개의 대표적인 제어체적(Fig. 4에서 음영부분)에 관심을 두자. 이때 블록 U 에서의 x 방향 속도 $u_{p,U}$ 와 블록 L 에서의 x 방향 속도 $u_{p,L}$ 은 아래 식으로부터 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} a_{pU}u_{p,U} &= a_{EU}e_{E,U} + a_{wU}u_{w,U} + a_{nU}u_{n,U} \\ &\quad + a_{sU}u_{p,L} + \Delta y_U (p_w - p_e)_U \\ a_{pL}u_{p,L} &= a_{EL}e_{E,L} + a_{wL}u_{w,L} + a_{nL}u_{p,U} \\ &\quad + a_{sL}u_{s,L} + \Delta y_L (p_w - p_e)_L \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 압력차이 $(p_w - p_e)_U$ 와 $(p_w - p_e)_L$ 은 각각 속도 $u_{p,U}$ 와 $u_{p,L}$ 이 존재하는 제어체적의 서쪽 면과 동쪽 면에서의 압력차이로서 운동량 방정식의

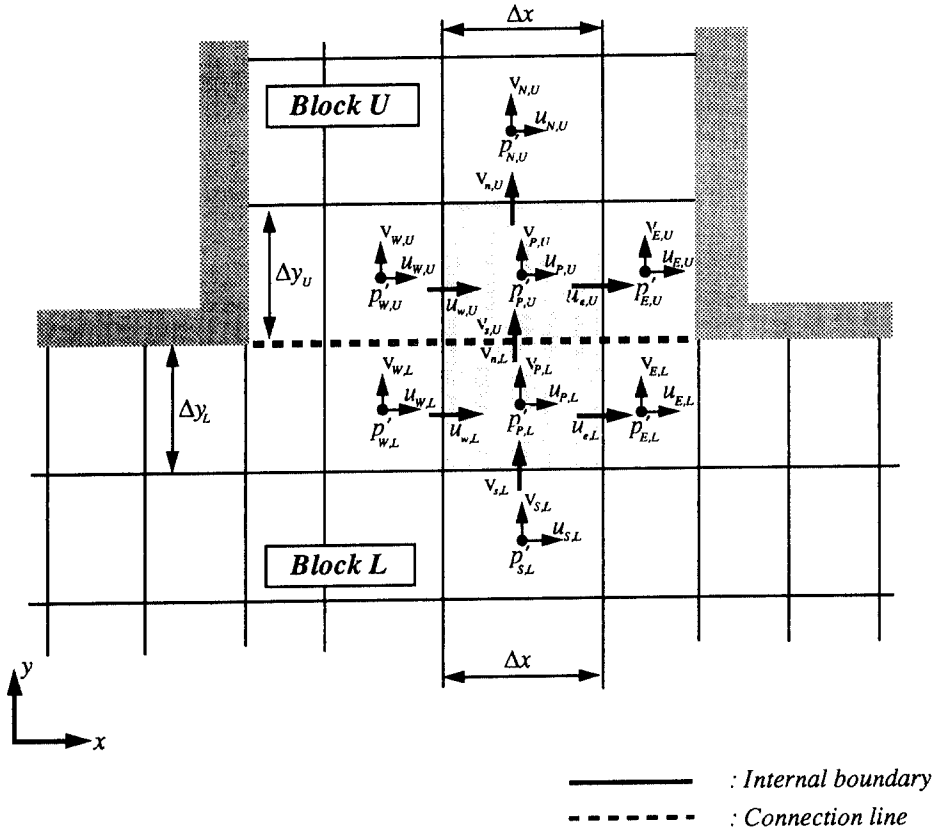


Fig. 4 Detail of interface region with u, v , and p' control volume

추진력으로 작용한다. 이때 해당 제어체적면에서의 압력값 p_w 와 p_e 는 x 방향으로 인접한 제어체적내의 압력값들을 선형보간하여 구한다. 마찬가지로 블럭 U 에서의 y 방향속도 $v_{p,U}$ 와 블럭 L 에서의 y 방향 속도 $v_{p,L}$ 은 아래 식으로부터 구한다.

$$\begin{aligned} a_p v_{p,U} &= a_E v_{E,U} + a_w v_{w,U} + a_n v_{n,U} \\ &\quad + a_s v_{p,L} + \Delta x (p_s - p_n)_U \\ a_p v_{p,L} &= a_E v_{E,L} + a_w v_{w,L} + a_n v_{p,U} \\ &\quad + a_s v_{s,L} + \Delta x (p_s - p_n)_L \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 압력차 $(p_s - p_n)_U$ 와 $(p_s - p_n)_L$ 은 각각 $v_{p,U}$ 와 $v_{p,L}$ 이 존재하는 제어체적의 남쪽면과 북쪽면에서의 압력차이다. 비엇갈린 격자계를 사용할 경우, 제어체적면에 수직한 속도값이 필요하며 이의 계산시 단점이 될 수 있는 체크보드(check board)형의 압력장⁽⁵⁾을 방지하기 위하여 Rhie and Chow⁽⁶⁾의 운동량 보간방법을 이용하였다. Rhie and Chow의 운동량 보간방법을 사용하면 블럭 U 와 블럭 L 사이 경계면에서의 속도 $v_{n,L}$ 과 $v_{s,U}$ 는 아래 식으로부터 구해질 수 있다.

$$\begin{aligned} v_{n,L} &= f \cdot \frac{\sum a_{nb} v_{nb}}{a_p} \Big|_{v_{p,L}} + (1-f) \cdot \frac{\sum a_{nb} v_{nb}}{a_p} \Big|_{v_{p,U}} \\ &\quad + \left\{ f \cdot \frac{1}{a_p} \Big|_{v_{p,L}} + (1-f) \cdot \frac{1}{a_p} \Big|_{v_{p,U}} \right\} \\ &\quad (p_{p,L} - p_{p,U}) \cdot \Delta x \end{aligned} \quad (11)$$

$$v_{s,U} = v_{n,L} \quad (12)$$

여기서 하첨자로 사용된 $v_{p,L}$ 과 $v_{p,U}$ 는 각각 $v_{p,L}$ 과 $v_{p,U}$ 가 존재하는 제어체적에서의 값들임을 나타낸다. 또한 하첨자 nb 는 고려중인 제어체적의 이웃하는 위치의 제어체적을 나타내며, f 는 보간계수로서 다음과 같이 정의된다.

$$f = \frac{\Delta y_U}{\Delta y_L + \Delta y_U} \quad (13)$$

제어체적면에서의 y 방향속도 $v_{s,L}$, $v_{n,U}$ 와 x 방향속도 $u_{e,U}$, $u_{w,U}$, $u_{e,L}$ 및 $u_{w,L}$ 도 위와 동일한 방법으로 얻을 수 있으므로 이에 관한 상세한 논의는 생략하기로 한다.

SIMPLE 알고리즘을 사용하면 식 (9)~(12)에 의하여 구해진 속도들은 연속방정식을 변형시킨 압력수정(pressure correction)값 p' 에 의하여 교정되어야 하므로 적절한 압력 수정값이 구해져야 한다. 블럭 U 및 블럭 L 에서의 압력수정값 $p'_{p,U}$ 와 $p'_{p,L}$ 은 아래 식으로부터 구해질 수 있다.

$$\begin{aligned} a_p p'_{p,U} &= a_E p'_{E,U} + a_w p'_{w,U} + a_n p'_{n,U} + a_s p'_{p,L} + b_U \\ a_p p'_{p,L} &= a_E p'_{E,L} + a_w p'_{w,L} + a_n p'_{p,U} + a_s p'_{s,L} \\ &\quad + b_L \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 b 항은 제어체적으로 유출입되는 질량유량의 합을 뜻하며, 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} b_U &= [(\rho u^*)_{w,U} - (\rho u^*)_{e,U}] \Delta y_U \\ &\quad + [(\rho v^*)_{s,U} - (\rho v^*)_{n,U}] \Delta x \\ b_L &= [(\rho u^*)_{w,L} - (\rho u^*)_{e,L}] \Delta y_L \\ &\quad + [(\rho v^*)_{s,L} - (\rho v^*)_{n,L}] \Delta x \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 상첨자로 사용된 *는 이전 반복계산에서의 값을 뜻한다.

지금까지의 논의로부터 블럭과 블럭의 경계면에 위치한 제어체적에서의 속도 및 압력에 관한 이산화 방정식을 정의하였으며, 그의 나머지 제어체적에서의 속도 및 압력에 대한 이산화 방정식은 일반적인 방법으로 구할 수 있으므로 여기서는 생략한다.

2.2.2 해를 구하는 방법

복합격자망이 모두 N 개의 독립적인 블럭으로 구성된다면, 전체 계산영역에서 종속변수 ϕ 에 관한 이산화 방정식의 매트릭스 표현은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$A\phi = B \quad (16)$$

여기서 A , ϕ 그리고 B 는 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} [A_1] \\ [A_2] \\ \vdots \\ [A_{N-1}] \\ [A_N] \end{bmatrix}, \quad \phi = \begin{bmatrix} [\phi_1] \\ [\phi_2] \\ \vdots \\ [\phi_{N-1}] \\ [\phi_N] \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} [B_1] \\ [B_2] \\ \vdots \\ [B_{N-1}] \\ [B_N] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 $[A_i]$, $[\phi_i]$ 그리고 $[B_i]$ 는 각각 i 번째 블럭에 대한 이산화 방정식의 계수, 연고자 하는 종속변수 그리고 생성항에 대한 매트릭스 표현을 나타낸다. 여기서 블럭 1~블럭 N 이 각각 $I_1 \sim I_N$ 개의 제어체적으로 구성된다면 매트릭스 A , ϕ 그리고

B 의 형태는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} A &: \sum_{j=1}^N I_j \times \sum_{j=1}^N I_j \\ \Phi &: \sum_{j=1}^N I_j \times 1 \\ B &: \sum_{j=1}^N I_j \times 1 \end{aligned} \quad (18)$$

예를들어 전체계산영역이 세 개의 블록으로 구성되며 각각 10, 20 및 30개의 제어체적으로 이루어진다면 매트릭스 A 는 60×60 의 크기를 갖는다.

전술한 바와 같이 복합격자망 문제에서 계수 매트릭스 A 는 비정규 형태의 매트릭스이므로 식 (16)의 해를 구하기 위해서는 특별한 고려가 요구된다. 매트릭스의 해를 구하는 방법으로는 크게 직접법(direct method)과 반복법(iterative method)이 있다. 직접법은 계수 매트릭스의 역변환을 구하거나, LU변환 그리고 Cholesky LU변환⁽⁹⁾ 등을 통하여 한번의 계산으로 해를 구하는 방법이다. 이 방법은 비정규 형태의 매트릭스에도 적용할 수 있으나, 많은 계산시간과 컴퓨터 메모리를 요구하므로 유한체적법에 의한 수치해석방법에는 사용되지 않는다. 반복법으로서 가장 많이 알려진 방법으로는 ADI(Alternating Direction Implicit), ADI-B(Alternating Direction Implicit with Block correction), SIP(Strongly Implicit Procedure)⁽¹⁰⁾, CGS(Conjugate Gradient Squared)⁽¹¹⁾ 및 MCGS(Modified Conjugate Gradient Squared)⁽¹²⁾ 등이 있다. 여기서 MCGS는 압력 수정 방정식과 같이 대칭 매트릭스(symmetric metrics)의 해를 구할 때 사용된다. 그러나 이러한 반복법은 정규 매트릭스에만 적용될 수 있으며 본 연구와 같은 복합격자망 문제에서 나타나는 비정규 매트릭스에는 적용이 불가능하다. 비정규 매트릭스의 해를 구하기 위하여 근래에 개발된 방법으로는 Bi-CGSTAB(Bi-Conjugate Gradient STABILized) 방법이 있으며 본 연구에서는 매트릭스의 해를 구하기 위해서 이 해법을 사용하였다. Bi-CGSTAB해법에서는 매트릭스의 역변환이나 전치행렬(transpose matrix)을 구할 필요가 없으며, 벡터의 내적만이 요구되므로 반복 계산시간 및 컴퓨터 메모리를 상당히 줄일 수 있는 장점이 있다. 이 방법의 기본개념은 아래와 같이 정의되는 이차함수 $f(\Phi)$ 의 값을 최소화시키는 벡터가 식 (16)의 해와 일치한다는 것이다.

$$f(\Phi) = \langle \Phi, A\Phi \rangle - 2\langle \Phi, B \rangle \quad (19)$$

```

R* = B - A*Phi
R-tilde = R*
for i = 1, 2, 3, ..., m
  C_{i-1} = < R-tilde, R^{*i-1} >
  if i = 1
    P^i = R^{*i-1}
  else
    beta_{i-1} = (C_{i-1} / C_{i-2}) * (alpha_{i-1} / omega_{i-1})
    P^i = R^{*i-1} + beta_{i-1} * (P^{i-1} - omega_{i-1} * Q^{i-1})
  endif
  solve M*P-tilde = P^i
  Q^i = A*P-tilde
  alpha_i = C_{i-1} / < R-tilde, Q^i >
  S = R^{*i-1} - alpha_i * Q^i
  solve M*S-tilde = S
  T = A*S-tilde
  omega_i = < T, S > / < T, T >
  Phi^i = Phi^{i-1} + alpha_i * P-tilde + omega_i * S-tilde
  R^i = S - omega_i * T
  lambda = R^i / R^*
  if (lambda < lambda_{exit}) end
end

```

Fig. 5 The algorithm of Bi-CGSTAB solver

여기서 $\langle a, b \rangle$ 는 벡터 a 와 b 의 내적을 뜻한다.

Fig. 5에는 Bi-CGSTAB해법의 알고리즘을 나타내었으며, 일반적인 매트릭스 해법 알고리즘의 표기방식을 따랐다. Fig. 5에서 “for”는 반복계산을 “if”, “else” 및 “endif”는 조건판단인자를 나타낸다. Bi-CGSTAB해법에 의하면, 식 (16)의 해인 매트릭스 Φ 를 구하기 위해서 초기 예측값 Φ^0 로부터 Fig. 5에 나타낸 반복계산과정을 m 회 수행하게 된다. 또한 하첨자가 함께 사용된 변수는 상수값을, 상첨자가 함께 사용된 변수는 매트릭스를 나타낸다. λ_{exit} 는 반복계산중에 수렴성을 판단하는 인자로서 본 연구에서는 0.2를 사용하였다. 만약 반복계산과정중에 유수 감소비 λ 의 값이 λ_{exit} 보다 작게 되면 반복계산과정을 끝내게 된다. 또한 M 은 해의 수렴성을 촉진시키기 위하여 도입된 예비(preconditioner) 매트릭스로서 여기에서는 매트릭스 A 의 대각선 요소(diagonal term)를 사용하였다.

3. 복합격자망 해석방법의 성능 비교

Bi-CGSTAB 해법에 의한 복합격자망 해석방법의 성능을 예측하기 위하여 T형 덕트시스템과 N형 덕트시스템을 검토문제로 도입하였다. T형 덕트시스템에서의 유동장은 블록 수정을 고려하는 ADI 해법(ADI-B)에 의한 단일블록계산, ADI-B

해법을 적용한 기존 복합격자망 해석방법 그리고 본 연구에서 제안하는 Bi-CGSTAB 방법을 적용하는 복합격자망 해석방법 등 세 가지 방법에 의하여 풀려졌으며, N형 덕트 시스템의 유동장을 얻기 위해서는 추가적으로 블록 수정을 고려하지 않은 ADI 해법(ADI)에 의한 단일블럭계산도 수행하였다.

3.1 T형 덕트시스템

하나의 유입구와 두 개의 유출구를 갖는 T형 덕트시스템의 개략적인 형상을 Fig. 6에 보여주고 있다. 유입구의 길이는 덕트 높이 H 의 세 배로 설정하였으며, 유출구의 길이 L 은 유출구가 완전발달된 유동영역에 위치할 수 있도록 Shah and London⁽¹³⁾이 제안한 다음 식으로 구하였다.

$$\frac{L}{2H} = \frac{0.315}{0.0175 \cdot Re} + 0.011 \cdot Re \quad (20)$$

여기서 Reynolds수 Re 는 유입구의 수력반경과 평균 유입속도를 특성길이 및 특성속도로 사용하여 정의하였다.

이러한 T형 덕트시스템내의 유동특성을 지배하는 2차원, 정상상태, 비압축성 및 층류유동에 관한 지배방정식은 연속 방정식과 운동량 방정식이며 아래와 같이 무차원식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{V} &= 0 \\ (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} &= \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{V} - \nabla P \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 \vec{V} 는 무차원 속도벡터를 표시하며 Reynolds수, Re 의 정의는 식 (20)에 나타난 Reynolds수의 정의와 동일하다. 유입구의 경계조건으로서는 유량 \dot{m}_{in} 이 완전발달된 속도분포 (fully developed velocity profile)를 가지고 유입되는 것으로 가정하였으며, 벽에서는 점착조건(no slip condition)을 부여하였다. 유출구의 경계조건으로서는 속도경계조건을 사용하여, 유입유량 \dot{m}_{in} 이 x 방향과 y 방향의 끝단에 위치하는 두 개의 유출구로 각각 $0.5\dot{m}_{in}$ 만큼 완전발달된 유동형태로 유출되는 것으로 가정하였다. 실제로 이러한 유동형태는 유출구 근처에 적절한 유동저항체(스크린 혹은 메쉬)를 설치하여 얻어질 수 있다.

이와 같은 T형 덕트시스템내에서 실제 수치계산은 위에서 언급한 세 가지 해석방법에 의하여 수행되었다. 복합격자망에 의한 유동장 해석시에는 전

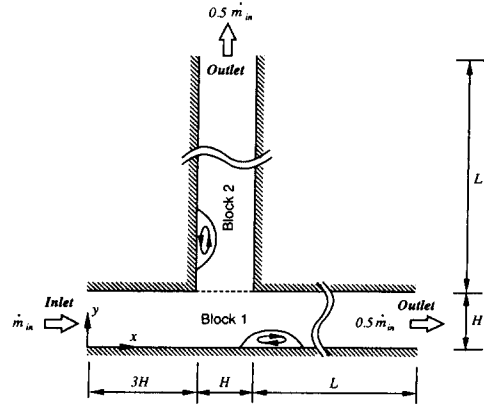


Fig. 6 Physical model of T type duct system

체 계산영역을 Fig. 6에 나타낸 바와 같이 점선을 기준으로하여 블록 1과 블록 2로 분리하여 계산을 수행하였다.

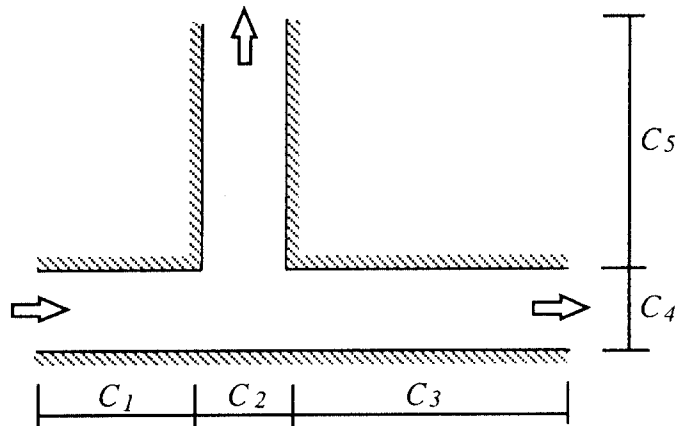
격자계에 따른 유동장의 수렴성을 고찰하기 위하여 격자계로서는 모두 세 가지의 경우가 고려되었으며, Table 1에 각각의 영역에 부여된 상세한 격자수를 그림과 함께 나타내었다. 이 격자계는 단일블럭에 대하여 x, y 방향으로 각각 $60 \times 45, 120 \times 90$ 및 180×135 격자수에 해당된다. 수치해석시 초기값으로 유동진행방향을 따르는 속도성분에는 유입구의 속도성분을 부여하고 나머지 속도 성분에는 0을 부여하였다. 반복계산시 해의 수렴성을 안정시키기 위하여 반복계산값들을 선형이완(linear relaxation)시켰으며, 이완계수로서 u, v 그리고 p 에 대하여 0.5를 사용하였다. Reynolds 수에 따른 결과를 고찰하기 위하여 Reynolds 수는 100, 500의 두 경우를 선택하였다. 해의 수렴정도를 판단하기 위하여 전체 계산영역내의 질량 유출입의 합인 S_m 과 최대 질량 유수(maximum mass residual)인 S_{max} 를 도입하였으며, 이 값들이 아래 두 조건을 동시에 만족시킬 때 유동장이 수렴된 것으로 간주하였다. 수치계산을 위해서는 IBM 486 DX2-66 컴퓨터를 사용하였다.

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{all \ domain} \\ S_i &= \sum_{all \ domain} \{ (\rho u \Delta y)_w - (\rho u \Delta y)_e \\ &\quad + (\rho v \Delta x)_s - (\rho v \Delta x)_n \} < 10^{-7} \\ S_{max} &= \max\{ |S_i| \} < 10^{-7} \end{aligned} \quad (22)$$

Fig. 7에는 세 가지 격자계 중 가장 조밀한 격자계에 대하여 Reynolds 수 100의 경우에 얻어진 유

Table 1 The computational detail for T type duct system ; The $C_1 \sim C_5$ correspond to number of cell at each region. (see below figure.)

Method	Grid System (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)	Re
Single-Block (ADI-B solver)	60×45 (15, 5, 40, 5, 40)	100
	120×90 (30, 10, 80, 10, 80)	500
	180×135 (45, 15, 120, 15, 120)	
Multi-Block (ADI-B solver)	same	same
Multi-Block (Bi-CGSTAB solver)	same	same



선분포를 보여주고 있다. 단일블럭 해석방법에 의하여 얻어진 유선분포와 Bi-CGSTAB 해법을 사용하는 복합격자망 해석방법에 의하여 얻어진 유선분

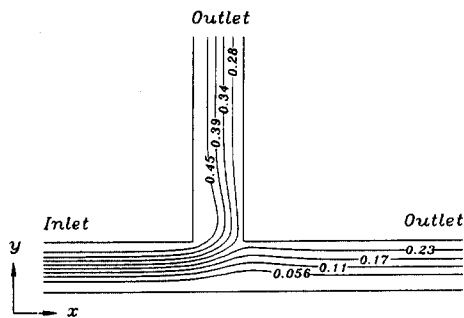


Fig. 7 Distribution of streamlines from multi-block method with Bi-CGSTAB solver and single-blok method for $Re=100$ and the 180×135 grid system in the T type duct system ; (No visible difference was shown in the two methods)

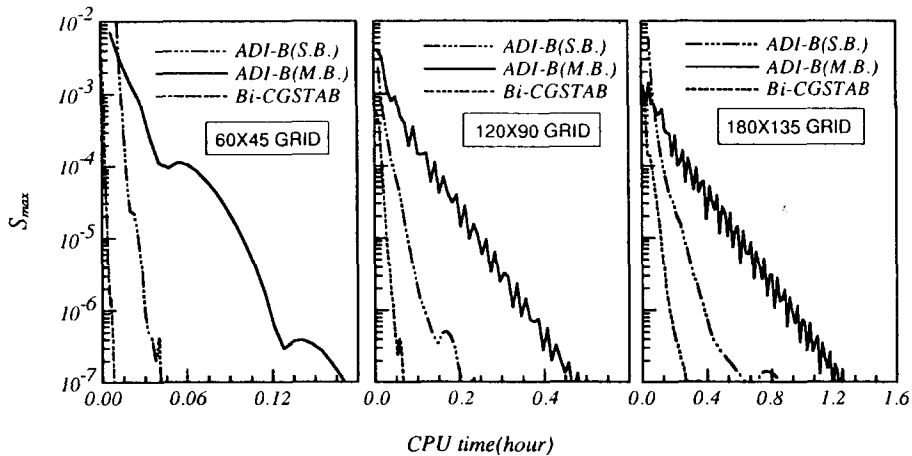
포가 동일하게 나타났으므로, 본 연구에서 제안하는 방법이 타당하게 적용되었음을 알 수 있다.

전술한 세 가지 유동 해석방법에 있어서 해가 수렴하는데 소요된 계산시간을 Table 2에 나타내었다. Bi-CGSTAB 해법에 의한 복합격자망 해석방법이 단일 블럭 해석방법과 기존 복합격자망 해석방법에 비하여 수렴시간을 상당히 감소시키며, 이러한 경향은 격자수가 적을수록, 명확히 나타나는 것을 알 수 있다. 세 가지 방법 중에서 기존 복합격자망 해석방법에 의한 계산시간이 가장 많이 소요되었으며 이는 기존 복합격자망 해석방법이 컴퓨터 사용 메모리를 줄일 수는 있으나 계산시간 면에서는 불리함을 알 수 있다.

계산시간에 따른 해의 수렴경향을 고찰하기 위하여 Fig. 8에는 제어체적내의 최대 질량 유수 (maximum mass residual)인 S_{max} 의 변화를 Reynolds 100의 경우에 계산시간에 따라 도시하였다. 그림에서 단일블럭 해석방법은 S. B.으로 복합

Table 2 The CPU time required by ADI-B and Bi-CGSTAB solvers for various grid systems in T type duct system.

Re=100			
Grid System	Single-Block	Multi-Block	
	ADI-B	ADI-B	Bi-CGSTAB
60×45	146sec	632sec	29sec
120×95	740sec	1757sec	240sec
180×135	2289sec	4558sec	993sec
Re=500			
Grid System	Single-Block	Multi-Block	
	ADI-B	ADI-B	Bi-CGSTAB
60×45	94sec	411sec	33sec
120×95	685sec	1505sec	322sec
180×135	1583sec	3704sec	1095sec

**Fig. 8** The convergence histories of ADI-B(Single-Block), ADI-B(Multi-Block) and Bi-CGSTAB solvers for three different grid systems in the T type duct system when Re=100

격자망 해석방법은 M. B.으로 나타내었다. 그림에서 Bi-CGSTAB에 의한 복합격자망 해석방법이 가장 안정적인 수렴경향을 보이고 있으며, 각각의 블럭에 대하여 ADI-B 해법을 적용하는 경우에는 격자수가 증가할수록 해의 진동이 상당히 크게 나타나고 있는 것을 알 수 있다. 이것은 각각의 블럭에 대하여 ADI-B 해법을 적용하는 복합격자망 해석방법의 경우에는 블럭간의 경계면에서 종속변수들의 값이 불안정하기 때문에 나타나는 현상이다.

Fig. 9에는 Reynolds수 500의 경우에 세 가지 방

법에 의해 얻어진 유동장의 수렴경향을 나타내었으며 낮은 Reynolds수에서 구하여진 결과와 거의 동일한 결과를 얻을 수 있었다.

3.2 N형 덕트관로

Fig. 10에 N형 덕트시스템의 형상 및 유동방향을 간단히 보여주고 있으며, 유체는 덕트내의 좌측 하단부에서 유입되어 덕트시스템을 경유한 후 우측 상단부로 유출되는 형태를 갖는다. 복합격자망 해석방법을 적용하기 위해서 전체 계산영역을 블럭

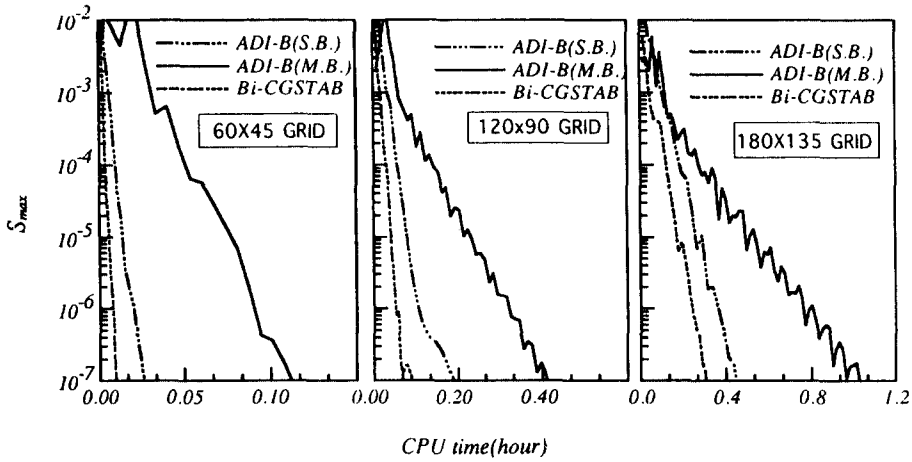


Fig. 9 The convergence histories of ADI-B(Single-Block), ADI-B(Multi-Block) and Bi-CGSTAB solvers for three different grid systems in the T type duct system when $Re=500$.

1~블럭 5의 5개 영역으로 분리하였으며 블럭간의 경계면은 역시 점선으로 표시하였다. 이러한 덕트 내의 유동특성을 지배하는 지배방정식은 식 (21)에 나타낸 바와 같으며, 경계조건으로서는 다음과 같이 유입구에서 균일한 속도분포를 유출구에서는 Neumann 경계조건을 사용하였다.

$$\begin{aligned}
 U=0, \quad V=1 & \quad ; \text{ at inlet} \\
 U=0, \quad \frac{\partial V}{\partial y}=0 & \quad ; \text{ at outlet} \\
 U=V=0 & \quad ; \text{ at every wall} \quad (23)
 \end{aligned}$$

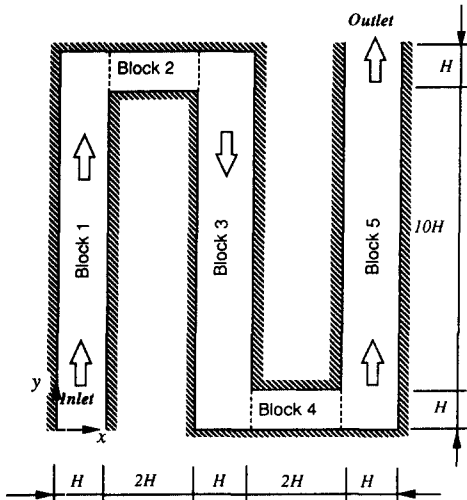


Fig. 10 Physical model of N type duct system

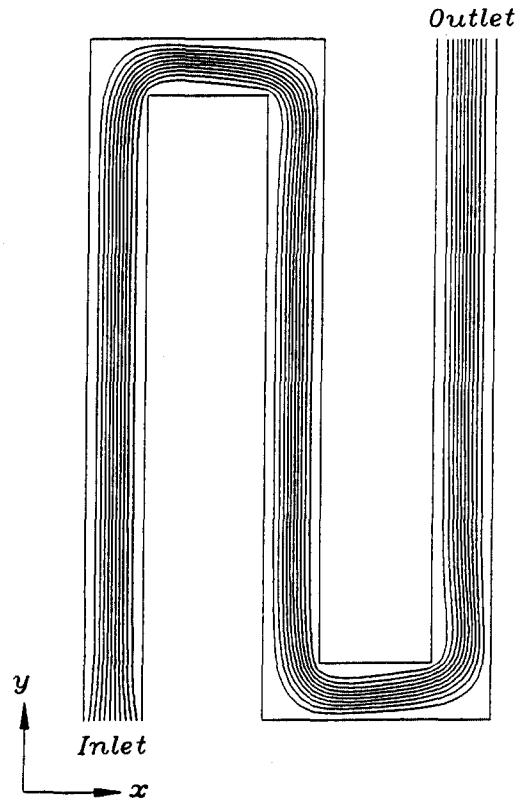
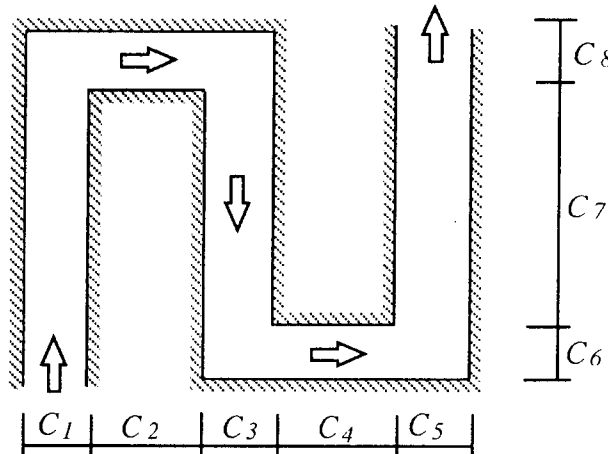


Fig. 11 Distribution of streamlines from multi-block method with Bi-CGSTAB solver and single-blok method for $Re=100$ and the 105×180 grid system in the N type duct system; (No visible difference was shown in the two methods)

Table 3 The computational detail for N type duct system ; The $C_1 \sim C_8$ correspond to number of cell at each region. (see below figure.)

Method	Grid System ($C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$)	Re
Single-Block (ADI solver)	35×60(5, 10, 5, 10, 5, 5, 50, 5) 70×120(10, 20, 10, 20, 10, 10, 100, 10) 105×180(15, 30, 15, 30, 15, 15, 150, 15)	100 500
Single-Block (ADI-B solver)	same	same
Multi-Block (ADI-B solver)	same	same
Multi-Block (Bi-CGSTAB solver)	same	same



실제 수치계산은 ADI 해법을 이용한 단일블럭계산, ADI-B 해법을 이용한 단일블럭계산, 각각의 블럭에 대하여 ADI-B 해법을 적용한 기존 복합격자망 계산 그리고 Bi-CGSTAB 방법을 적용한 복합격자망 방법 등 네 가지 방법에 의하여 수행되었으며, 각 경우에 있어서 계산조건을 Table 3에 나타내었다. Reynolds 수가 유동장의 수렴성에 미치는 영향을 고찰하기 위하여 Reynolds 수는 100, 500의 두 가지 경우가 선택되었으며, 격자계는 x, y 방향으로 각각 $35 \times 60, 70 \times 120$ 그리고 105×180 의 격자수의 세 가지 경우가 고려되었다. Table 3에는 각각의 영역에 부여한 상세한 격자배치를 그림과 함께 나타내었다. 수치계산시 초기값으로는 유동진행방향을 따르는 속도성분에는 1을 나머지 속도 성분에는 0을 부여하였다. 해의 수렴성을 안

정시키기 위하여 선형이완(linear relaxation)을 도입하였으며, 이완계수로서 모든 종속변수에 0.3을 사용하였다.

Fig. 11에는 세 가지 격자계 중 가장 조밀한 격자계에 대하여 Reynolds 수 100의 경우에 얻어진 유선분포를 보여주고 있다. 단일블럭 해석방법에 의하여 얻어진 유선분포와 Bi-CGSTAB 해법을 사용하는 복합격자망 해석방법에 의하여 얻어진 유선분포는 동일하게 나타났다. Reynolds 수가 100으로서 유동강도가 약하기 때문에 덕트내의 유선분포는 덕트 관로를 따라 안정적으로 분포되고 있다.

전술한 네 가지 방법에 있어서 해가 수렴하는데 소요된 계산시간을 Table 4에 나타내었다. ADI-B 해법을 적용한 단일블럭계산에서는 유동진행방향을 따라 급격하게 변하는 속도성분에 타당하지 않은

Table 4 The CPU time required by ADI, ADI-B and Bi-CGSTAB solvers for various grid systems in N type duct system

Re=100				
Grid System	Single-Block		Multi-Block	
	ADI	ADI-B	ADI-B	Bi-CGSTAB
35×60	578sec	∞	819sec	94sec
70×120	5688sec	∞	3528sec	1032sec
105×180	15917sec*	∞	10008sec	5290sec

Re=500				
Grid System	Single-Block		Multi-Block	
	ADI	ADI-B	ADI-B	Bi-CGSTAB
35×60	784sec	∞	1241sec	182sec
70×120	6390sec	∞	4428sec	1677sec
105×180	15948sec*	∞	12780sec	7705sec

* : The value when S_{max} reached to 10^{-6}

값들을 일률적으로 더해 주었기 때문에 해가 발산하는 경향을 보인다. 격자가 조밀해질수록 단일블럭 해석방법에 의한 수렴시간이 가장 길게 나타났으며 이는 블럭수정을 고려할 수 없었기 때문에 나타나는 현상이다. 또한, Bi-CGSTAB 해법에 의한 복합격자망 해석방법이 단일 블럭 해석방법과 기존 복합격자망 해석방법에 비하여 수렴시간을 상당히 감소시키며, 이러한 경향은 격자수가 적을수록, 명확히 나타나는 것을 알 수 있다. 세 가지 방법 중

에서 기존 복합격자망 해석방법에 의한 계산시간이 가장 많이 소요되었으며 이는 기존 복합격자망 해석방법이 컴퓨터 사용 메모리를 줄일 수는 있으나 계산시간 면에서는 불리함을 알 수 있다. 그러나 격자수가 증가할수록 본 연구에서 제안하는 복합격자망 해석방법에서도 해의 수렴시간이 증가하고 있으며, 이는 격자수가 증가할수록 매트릭스의 비정규성(sparsity)이 커지기 때문으로 사료된다. 계산시간에 따른 해의 수렴경향을 Reynolds수

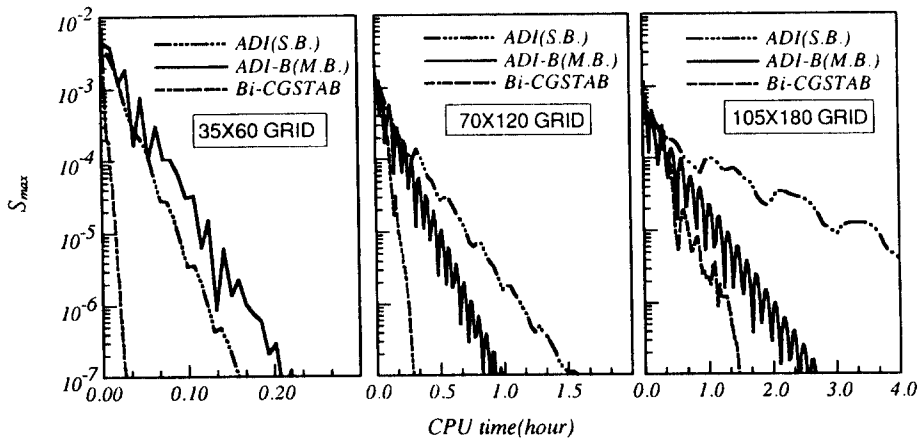


Fig. 12 The convergence histories of ADI(Single-Block), ADI-B(Multi-Block) and Bi-CGSTAB solvers for three different grid systems in the N type duct system when $Re=100$.

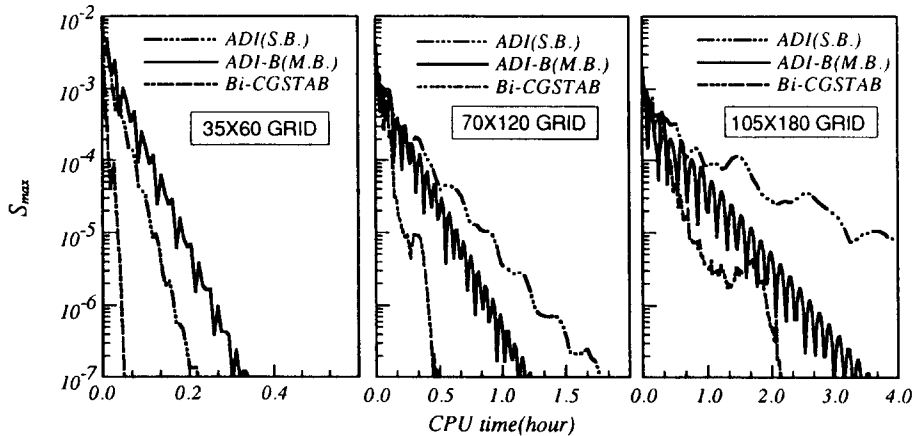


Fig. 13 The convergence histories of ADI(Single-Block), ADI-B(Multi-Block) and Bi-CGSTAB solvers for three different grid systems in the N type duct system when $Re=500$.

100인 경우에 Fig. 12에 나타내었다. Bi-CGSTAB에 의한 복합격자망 해석방법이 가장 안정적인 수렴경향을 보이고 있으며, 각각의 블록에 대하여 ADI-B 해법을 적용하는 경우에는 T형 덕트시스템의 경우 보다 해의 진동이 상당히 크게 나타나는 것을 알 수 있다.

Fig. 13에는 Reynolds수 500의 경우에 계산시간의 변화에 따른 세 가지 방법에서의 수렴경향을 나타내었다. Reynolds수 100의 경우와 수렴경향은 비슷하지만, 전체적으로 수렴시간은 더 소모되고 있음을 알 수 있다. 또한 모든 경우에 있어서 격자수가 증가할수록 수렴경향이 불안정해지지만 Bi-CGSTAB 방법에 의한 복합 격자망 해석방법이 가장 수렴성이 좋음을 알 수 있다.

4. 결 론

본연구에서는 Bi-CGSTAB 해법에 의하여 복합 격자망문제를 해석하고자 하였으며, 본 연구의 타당성 및 해의 수렴성을 고찰하기 위하여 T형 덕트 시스템과 N형 덕트시스템을 검토문제로 도입하였다. 계산결과를 검토를 위하여 단일 블록 해석방법, 기존 복합격자망 해석방법 그리고 Bi-CGSTAB 해법에 의한 복합격자망의 해석방법에 의하여 T형 덕트시스템과 N형 덕트시스템을 해석하였으며 각 방법에 의한 해의 수렴시간과 수렴경향이 서로 비교 되었다. 본 연구의 결과로부터 얻은 결론은 다음과 같다.

(1) 비정렬 매트릭스해법인 Bi-CGSTAB 방법과 비엇갈린 격자계를 이용한 복합격자망 해석방법에서는 블록간의 접합부분에 공통영역이 필요하지 않으므로 수치적인 조작을 상당히 줄일 수 있다.

(2) 단일 블록 해석방법, 기존 복합격자망 해석방법 그리고 Bi-CGSTAB 해법에 의한 복합격자망 해석방법에 의하여 T형 덕트시스템과 N형 덕트시스템을 해석한 결과, 본 연구에서 제안하는 Bi-CGSTAB 해법에 의한 복합격자망 해석방법이 다른 방법에 비하여 유동장의 수렴시간을 가장 작게 소요하였으며, 수렴경향도 가장 안정적으로 보였 다.

후 기

이 연구의 일부는 한국과학재단 지정 터보·동력 기계 연구센터의 지원으로 수행되었으며, 관계자 여러분께 감사를 드립니다.

참고문헌

- (1) Wright, J. A. and Shyy, W., 1993, "A Pressure-Based Composite Grid Method for the Navier-Stokes Equations," *J. Comp. Phys.*, Vol. 107, pp. 225~238.
- (2) Leschziner, M. A. and Dimitriadis K. P., 1989, "Computation of Three Dimensional Turbulent Flow in Non-orthogonal Junctions by a Branch

- Coupling Method," *Computers & Fluids*, Vol. 17, No. 2, pp. 371~396.
- (3) Agrawal, A. K., Krishnan S. and Yang T. T., 1993, "Use of Subdomains for Inverse Problems in Branching Flow Passages," *Journal of Fluids Engineering*, Vol., pp. 115~227.
- (4) Van Der Vorst, H. A., 1992, "Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems," *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, Vol. 13, pp. 706~708.
- (5) Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow," McGraw-Hill, New York
- (6) Rhie, C. M. and Chow, W. L., 1983, "Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation", *AIAA J.*, Vol. 21, pp. 1525~1532.
- (7) Choi, S. K., Nam, H. Y., Lee, Y. B. and Cho, M., 1993, "An Efficient Three Dimensional Calculation Procedure for Incompressible Flows in Complex Geometries," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 23, pp. 387~400.
- (8) Majumdar, S., 1988, "Role of Underrelaxation in Momentum Interpolation for Calculation of Flow with Nonstaggered Grids," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 13, pp. 125~132.
- (9) Rao, S. S., 1982, "The Finite Element Method in Engineering," Pergamon Press, pp. 47~51.
- (10) Stone, H. L., 1968, "Iterative Solution of Implicit Approximations of Multidimensional Partial Differential Equations," *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 5, pp. 530~558.
- (11) Kershaw, D. S., 1978, "The Incomplete Cholesky Conjugate Gradient Method for Iterative Solution of Systems of Linear Equations," *J. Comp. Phy.*, Vol. 26, pp. 43~65.
- (12) Kim, C. J. and Ro, S. T., "An Efficient and Robust Matrix Solver for the Pressure Correction Equations in Two and Three Dimensional Fluid Flow Problems," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 27, No. 4, pp. 355~369.
- (13) Shah, R. K. and London, A. L., 1978, "Laminar Flow Forced Convection in Ducts," Academic press, New York.