

<논 문>

## 초음속 노즐을 통하는 부족팽창 제트에 관한 수치계산적 연구(2)

김희동\* · 신현승\*\*

(1995년 7월 26일 접수)

### Numerical Study on Under-Expanded Jets through a Supersonic Nozzle (II)

Heuy-Dong Kim and Hyeon-Seung Shin

**Key Words :** Compressible Flow(압축성 흐름), Barrel Shock Wave(바렐 충격파), Mach Disk(마하디스크), Shock Wave(충격파), Supersonic Nozzle(초음속노즐), Supersonic Jet(초음속 제트), Under-Expanded Jet(부족팽창 제트)

#### Abstract

Numerical calculation was applied to supersonic under-expanded jets, and compared with the results of a linear theory and other experiments. TVD difference scheme was employed to solve 2-dimensional and axisymmetric inviscid Euler equation. This paper aims to explore the effects of angle of divergence and design Mach number of nozzle on the structure of under-expanded jets. The angle of divergence was varied from 0 to 20 deg. The results show that the length of the first cell of the under-expanded jets decreases and Mach disk generates at lower nozzle pressure ratio, if the angle of divergence or design Mach number of nozzle increases. The distance from the nozzle exit to Mach disk in 2-dimensional jets becomes much larger than that of axisymmetric jets, and the widths of the jet boundary and the barrel shock wave are also larger than that of axisymmetric jets. Calculation results indicate that the configuration of the under-expanded jets is strongly dependent on the nozzle pressure ratio.

#### 1. 서 론

로켓엔진의 추진노즐과 같이 초음속노즐을 통하여 고압의 기체를 대기로 팽창시키는 경우, 노즐상류의 정체점 압력을 높여감에 따라 흐름은 노즐목(nozzle throat)에서 초크(choke)한 후, 수직충격파(normal shock wave)가 노즐목 하류의 어떤 위치에 형성된다. 노즐상류의 정체점 압력을 더욱 높

이면, 수직충격파는 노즐 출구에 도달한 후, 정체점 압력이 더욱 더 증가됨에 따라 노즐로부터 방출되어 초음속 제트가 발생하게 된다. 이러한 제트 유동의 형태는 노즐출구의 압력이 배압(back pressure)보다 낮은 경우에는 과팽창 흐름(over-expanded flow)으로 되며, 이때 흐름은 노즐출구로부터 발생한 경사충격파(oblique shock wave)에 의해 노즐출구의 압력에서부터 배압까지 압력조절이 이루어진다. 노즐출구의 압력이 배압과 같은 경우에 흐름은 적정팽창(correct expansion)상태로 되며, 노즐출구에서 발생하는 경사충격파는 일반적

\*회원, 안동대학교 기계공학과

\*\*안동전문대학 자동차과

으로 마하파(Mach wave)로 된다. 한편 노즐상류의 정체점 압력을 더욱 상승시키는 경우 노즐출구에서 압력은 배압보다 높게 되며, 흐름은 부족팽창(under-expanded flow)상태로 된다. 이때 노즐출구에는 팽창파가 발생하여 노즐출구의 압력으로부터 배압까지 압력조절이 이루어지게 된다.<sup>(1)</sup>

초음속 노즐로부터 방출되는 부족팽창 흐름에 관해서는 Fig. 1에 도식적으로 나타낸 바와 같이, 일반적으로 부족팽창의 정도가 작은 경우, 즉 노즐압력비  $p_o/p_b$ (nozzle pressure ratio 혹은 overall pressure ratio라고 하지만, 본 연구에서는 편의상 '압력비'로 정의한다. 여기에서  $p_o$ 는 노즐상류의 정체압력이며,  $p_b$ 는 노즐의 배압이다)가 상대적으로 낮은 경우에 제트의 형상은 연속적인 셀구조(cell structure)로 되며, 부족팽창의 정도가 큰 경우, 즉 압력비가 비교적 큰 경우에 셀구조는 마하디스크(Mach disk)로 불리는 원판 형태의 충격파가 발생함으로써 제트 유동장은 상당히 변하게 된다.<sup>(2)</sup> 이와 같은 초음속 부족팽창 흐름에 관하여 셀의 길이, 마하디스크의 위치 및 마하디스크의 직경 등과 관련된 제트의 구조나 제트 소음에 관한 많은 연구가 실험적 및 이론적으로 수행되었다.<sup>(3-5)</sup> 그러나 이들 연구에서 이용된 노즐은 노즐 중심축에 평행한 형상(즉 음속노즐이나 라발노즐의 형태)으로 되어 있으며, 실제 공업적으로 빈번히 사용되는 바와 같은 확대 테이퍼각(이하에서 확대각이라고 정의한다)을 가지는 노즐에 대하여, 노즐의 확대각이 제트 구조에 미치는 영향을 계통적으로 조사한 실례는 아직까지 없다. 추진노즐 이외에도 임의의 확대각을 가지는 노즐은, 예를 들면 금속분말의 제

조,<sup>(6)</sup> 섬유제직,<sup>(7)</sup> 고전류 차단 스위치,<sup>(8)</sup> 공기 블라스트 가공<sup>(9)</sup> 등에서와 같이 공업적으로 매우 다양한 분야에서 응용되고 있으며, 이들 장치의 설계에는 제트의 구조를 예측하는 것이 필요하다. 그러나 확대각과 제트 구조와의 관계가 알려져 있지 않기 때문에 제트 유동을 예측하는 것은 실제적으로 매우 곤란하다.

한편 부족팽창 제트의 형태를 결정하는 인자들은 주로 마하디스크의 위치나 직경, 바렐충격파(barrel shock wave), 제트 경계(jet boundary) 등을 들 수 있다. 종래의 연구결과<sup>(10,11)</sup>에 의하면 제트 중에 발생하는 마하디스크의 위치는 압력비만의 함수로 보고되어 있으나, 이들 연구결과는 대부분 단순한 일차원 흐름 이론에 기초를 두고 있으므로 2차원 및 3차원 흐름(축대칭 흐름)에 대해서도 보다 체계적인 이론적 검증이 필요하다. 더욱이 노즐의 확대각과 마하디스크의 위치와의 관계, 바렐 충격파 및 제트 경계에 미치는 압력비, 마하수, 확대각 등의 영향은 아직까지 규명되지 않았다. 이와 관련하여 문헌 (12)에는 원추형노즐(conical nozzle)을 사용하여 실험과 특성곡선법을 이용하여 노즐의 확대각, 작동기체의 비열비, 노즐의 압력비 등이 제트 구조에 미치는 영향을 조사하였다. 또 이론적 연구에서는 초음속 제트의 구조와 제트 소음이 밀접하게 관련되어 있기 때문에 제트셀(jet cell)의 길이를 이론적으로 예측할 수 있는 방법이 다수 제안<sup>(13,14)</sup>되어 있지만, 노즐출구에서 확대각의 영향을 전혀 고려하지 않았다.

본 연구에서는 초음속 노즐을 통하는 부족팽창 흐름에 대하여 TVD 수치계산법을 적용하였다. 계산에서는 노즐의 확대각이 제트의 구조에 미치는 영향과 2차원 및 3차원(축대칭) 부족팽창 제트에 대한 마하디스크의 예측, 그리고 제트 경계 및 바렐충격파 등을 조사하기 위하여, 정상 2차원 및 3차원 축대칭 비점성 흐름의 지배방정식을 차분화하였다. 계산결과는 주로 직선노즐에 대한 이론해석 값 및 실험값들과 비교하여, 노즐의 확대각의 영향을 조사하는 데 사용되었다.

## 2. 축대칭 초음속 부족팽창 제트의 수치계산

### 2.1 지배방정식

초음속 부족팽창 제트는 노즐출구 부근에서는 초

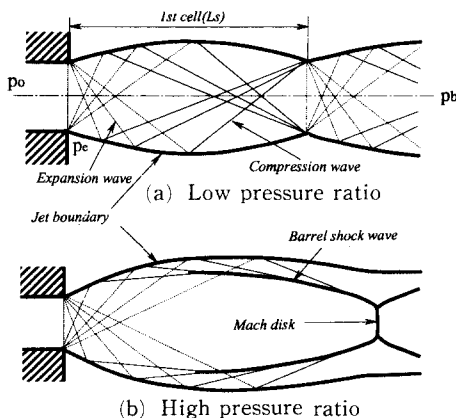


Fig. 1 Typical structure of supersonic free-jet

음속으로 되지만, 노즐의 압력비가 커짐에 따라 부족팽창의 정도는 커지게 되며, 마하디스크가 발생하여 그 하류의 흐름은 아음속으로 된다. 일반적으로 정상 흐름에 있어서 흐름을 지배하는 편미분방정식은 아음속인 경우에는 타원형(elliptic type), 초음속인 경우에 쌍곡선형(hyperbolic type)으로 된다. 따라서 마하디스크가 형성되는 초음속 제트 유동에는 초음속과 아음속이 동시에 존재하게 되며, 이러한 흐름장에 대하여 정상 흐름의 해석을 수행하면 해가 발산(divergence)할 수 있다. 이 경우 시간을 변수로 도입하여 지배방정식을 포물선형(parabolic type)으로 하게 되면, 아음속과 초음속인 경우 모두에 대하여 동일한 방법, 즉 Time marching법으로 해석할 수 있다. 이 방법은 기본적으로 비정상인 방정식을 수치계산하여 시간이 무한히 경과한 후의 극한의 해를 구하여 정상해로 간주한다.

본 계산에서는 이러한 방법을 이용하여, 작동기 체로 비열비 1.4인 공기 혹은 1.67인 아르곤가스(완전기체로 가정)를 대상으로 하였다. 지배방정식은 Fig. 2에 나타난 바와 같은 원추형노즐의 흐름장을 표현하는 축대칭 Euler 방정식으로, 연속방정식, 운동량방정식 및 에너지방정식은 각각 다음으로 쓰여진다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v) + \frac{\rho v}{r} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho uv) \\ + \frac{\rho uv}{r} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v^2 + p) \\ + \frac{\rho v^2}{r} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

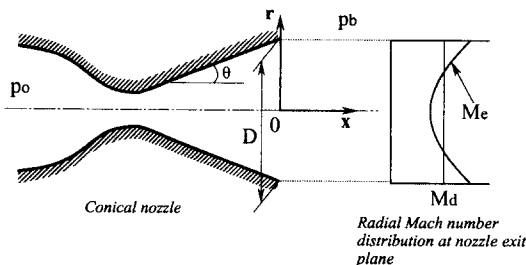


Fig. 2 Supersonic axisymmetric conical nozzle

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e+p)u + \frac{\partial}{\partial r}(e+p)v \\ + \frac{(e+p)}{r}v = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

여기에서  $t$ 는 시간,  $\rho$ 는 기체의 밀도,  $u$ 와  $v$ 는 각각 축방향( $x$ ) 및 반경방향( $r$ )의 속도성분,  $p$ 는 압력,  $e$ 는 단위체적당 전에너지이며, 다음 식으로 주어진다.

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \quad (5)$$

만일 노즐목에서 상태량(첨자 \*)과 노즐의 출구직경  $D$ 를 이용하여 다음과 같이 무차원화하면,

$$\begin{aligned} x' = \frac{x}{D}, \quad r' = \frac{r}{D}, \quad t' = \frac{t}{\sqrt{\gamma D/a^*}}, \quad p' = \frac{p}{p^*} \\ \rho' = \frac{\rho}{\rho^*}, \quad e' = \frac{e}{p^*}, \quad u' = \frac{u}{a^*/\sqrt{\gamma}} \\ v' = \frac{v}{a^*/\sqrt{\gamma}} \end{aligned} \quad (6)$$

여기에서  $a^*$ 는 기체의 음속이다. 이들의 무차원량을 이용하여 지배방정식을 보존형으로 표시하면, 다음의 식으로 쓰여진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial r} + W = 0 \\ U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{bmatrix} \\ G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{bmatrix}, \quad W = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ (e+p)v \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

여기에서 단순화를 위해 상첨자 '는 모두 생략하였다.

위의 식 (7)을 차분화하여 다음 절에서 기술하는 경계조건들을 적용시켜 수치계산하면, 원추형노즐(conical nozzle)로부터 방출되는 초음속 부족팽창 흐름을 해석할 수 있다. 식 (7)에 대하여 TVD 차분법을 적용하기 위하여 본 연구에서는 위의 식 (7)을 다음과 같이 일차원 차분연산자로 분할하였다.

$$L_x : U_t + F_x = 0$$

$$\begin{aligned} L_r : U_t + G_r &= 0 \\ L_w : U_t + W &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

위의 연산자  $L_x, L_r, L_w$  는 다음의 식으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} &= L_x U_{i,j}^n = U_{i,j}^n - \lambda_x (\hat{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \hat{F}_{i-\frac{1}{2},j}^n) \\ U_{i,j}^{n+1} &= L_r U_{i,j}^n = U_{i,j}^n - \lambda_r (\hat{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \hat{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^n) \\ U_{i,j}^{n+1} &= L_w U_{i,j}^n = U_{i,j}^n - \Delta t W_{i,j} \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $\lambda_x$ 와  $\lambda_r$ 은 각각 다음으로 정의된다.

$$\lambda_x = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \lambda_r = \frac{\Delta t}{\Delta r} \quad (10)$$

또  $n$ 는 시간 스텝,  $i$ 와  $j$ 는 각각  $x$ 와  $r$ 방향의 격자점번호, 상첨자  $\hat{\cdot}$ 는 수치유속함수(numerical flux function)를 나타내며, 이 항이 대칭형 TVD 법으로 차분화<sup>(15)</sup>된다. 이와 같이 분할된 차분연산자는 다음과 같이 시간적분함으로써 시간에 대하여 2차정도(second order accuracy)를 가지게 된다.

$$U_{i,j}^{n+2} = L_w L_x L_r L_r L_x L_w U_{i,j}^n \quad (11)$$

### 2.2 경계조건

노즐의 확대각이 제트유동에 미치는 영향을 규명하기 위해서는 노즐 상류에서부터 계산을 적용할 필요가 있지만, 여기에서는 단순화를 위하여 노즐 내의 흐름을 방사상의 source 흐름이라고 생각하여 출구면에서 반경방향으로의 마하수분포를 가정하였다. 따라서 본 계산에서 대상으로 하고 있는 흐름장은 노즐출구로부터 하류이며, 노즐내의 흐름은 포함하지 않았다. 원추형노즐로부터 방출되는 흐름장은 축대칭이므로, 제트 중심축에 대하여 대칭계산을 수행하였다. 계산격자는  $r$ 방향으로 150점,  $x$ 방향으로 500점의 등간격격자를 적용했으며, 또 노즐 출구 반경으로는 150점의 격자점 중 10점의 격자점을 할당하였다.

경계조건으로 먼저 노즐출구면에서는 방사상의 source흐름에 의해서 계산된 값을 사용하였다. 이때, 방사상의 source 흐름의 질량유량과 일차원 압축성 흐름 이론에 의해 구해지는 질량유량이 같도록 하였다. 또 노즐의 확대반각  $\theta$ 가  $0^\circ$ (직선노즐, straight nozzle이라 하며, 직선노즐 중에서도 출구에서 마하수가 1인 경우는 음속노즐, sonic nozzle이라고 한다)인 경우에는 노즐출구에서의 경계조건을 일차원 등 엔트로피 흐름으로 계산한 결과를 이

용하였다. 한편 제트의 중심축에서는 축대칭 조건을 적용하였으며, 노즐출구의 벽면에서는 slip 조건을 적용하였다. 제트의 자유경계면에서는 각 변수들의 구배(gradient)가 0이 되도록하였다.

### 3. 선형이론 해석

여기에서는 직선노즐( $\theta=0^\circ$ )인 경우, 부족팽창의 정도가 약한 축대칭 초음속 제트의 셀구조에 관한 선형이론에 대하여 기술한다. 이론해석에는 흐름이 비점성이고, 제트와 주위 공기의 혼합층은 매우 얇은 와층(vortex layer)으로 가정한다. 초음속 제트가 적정팽창이 아님으로써 해서 발생하는 압력, 밀도, 및 속도의 섭동(perturbation)을 각각  $\bar{p}$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{v}$ 로 한다. 이때 제트 내부의 압력은  $\bar{p} + p_0$ 로 되며, 2차 이상의 미소항을 무시하여 연속의 식, 운동량의 식, 에너지 식을 이용하면, 압력 섭동량에 관한 다음의 식<sup>(13)</sup>을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} - (M_j^2 - 1) \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} = 0 \quad (12)$$

위의 식에서  $r$ 은 노즐출구 중심에서 흐름에 수직방향으로의 거리이다. 여기에서 노즐출구의 직경을  $D$ 라고 하고, 노즐 상류의 정체점압력  $p_0$ 인 기체를 배압  $p_b$ 까지 등엔트로피적으로 팽창시키는 경우에 노즐출구직경과 마하수를 각각  $D_j$ 와  $M_j$ 로 하면, 다음과 같이 쓰여진다.

$$M_j = \sqrt{\left\{ \left( \frac{p_0}{p_b} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right\} \frac{2}{\gamma-1}} \quad (13)$$

$$\frac{D}{D_j} = \left[ \frac{2 + (\gamma-1) M_j^2}{2 + (\gamma-1) M_d^2} \right]^{\frac{\gamma+1}{4(\gamma+1)}} \sqrt{\left( \frac{M_d}{M_j} \right)} \quad (14)$$

여기에서  $M_d$ 는 노즐의 설계마하수이며,  $D$ 와  $D_j$ 를 이용하여 노즐출구에서 경계조건을 정리하면 다음으로 된다.

$$\bar{p} = \begin{cases} \Delta p : 0 \leq r \leq \frac{1}{2} D \\ 0 : \frac{1}{2} D < r \leq \frac{1}{2} D_j \end{cases}$$

$$v(\text{반경방향의 속도성분}) = 0 : 0 \leq r \leq \frac{1}{2} D \quad (15)$$

위의 식 (12)에 식 (15)의 경계조건을 적용하여, Bessel 함수에 의한 고유급수전개<sup>(16)</sup>를 이용하여 해를 구하면,

$$\begin{aligned} \bar{p}(r, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{2\lambda_n r}{D_j}\right) \cos(k_n x) \\ A_n &= 2\Delta p \left(\frac{D}{D_j}\right) \frac{J_1\left(\frac{\lambda_n D}{D_j}\right)}{\lambda_n J_1^2(\lambda_n)}, \quad J_0(\lambda_n) = 0 \\ k_n &= \frac{2\lambda_n}{D_j \sqrt{M_j^2 - 1}} \quad (n=1, 2, 3 \dots) \end{aligned} \quad (16)$$

위의 식에서  $J_0$ 와  $J_1$ 는 각각 0차 및 1차 Bessel 함수이며,  $\lambda_n$ 는 0차 Bessel 함수의  $n$ 번째의 해이다. 또  $\Delta p$ 는  $p_e$ 와  $p_b$ 의 차이이며, 부족팽창의 경우에 대해서는  $\Delta p > 0$ 이다. 위의 식 (16)의 고주파성분을 모두 무시하여 최소의 고유값( $n=1$ )만을 고려한다면, 부족팽창에 의한 제트내의 압력변동은 어떤 여현함수로 나타낼 수 있다. Fig. 1에 나타난 바와 같이 제트 제1셀의 길이  $L_s$ 를 압력변동의 1주기분의 길이라고 생각한다면, 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{L_s}{D} = \frac{\pi D_j}{\lambda_1 D} \sqrt{M_j^2 - 1}, \quad \lambda_1 \cong 2.405 \quad (17)$$

여기에서  $M_j$ 는 식 (13)와 식 (14)로부터 압력비  $p_0/p_b$ 와 비열비  $\gamma$ 의 함수이며,  $D_j/D$ 는  $M_a$ ,  $M_j$  및  $\gamma$ 의 함수이다. 즉 노즐출구의 직경으로 무차원화한 제1셀의 길이  $L_s/D$ 는  $M_a$ ,  $p_0/p_b$  및  $\gamma$ 에 의해 결정된다는 것을 알 수 있다. 이상의 이론에서는 기체의 점성을 무시하고 있으므로, 노즐출구로부터 무한히 먼 거리까지 제트셀은 같은 간격으로 반복된다. 또 해석에서는 경계조건으로, 노즐출구면에서 유속은  $x$ 축에 평행한 것으로 가정하고 있으므로  $L_s$ 에 미치지 못하는 노즐의 확대각의 영향을 계산할 수 없다.

### 4. 결과 및 고찰

#### 4.1 제트의 구조

확대반각(half angle of divergence)이  $\theta = 10^\circ$ 와  $20^\circ$ 인 원추형노즐의 출구면에서 반경방향의 마하수 분포를 Fig. 3에 나타내었다. 계산에서는 노즐출구에서 방사상의 source 흐름을 가정하였으며, 노즐출구에서 설계마하수(design Mach number)  $M_d$ 는 2.0이다. 그림의 종축은 노즐출구면에서 반경방향의 거리  $r$ 을 노즐반경  $D/2$ 로 무차원화한 값을 나타낸다. 그림으로부터  $\theta$ 가 클수록 반경방향에 대한 마하수분포의 의존성은 크게 된다는 것을 알 수 있다. 그림의 계산값은 작동기체가 공기(비열비  $\gamma$

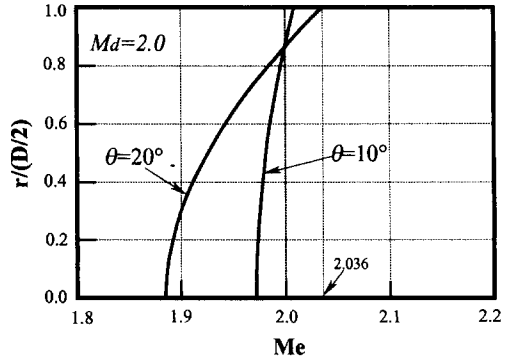
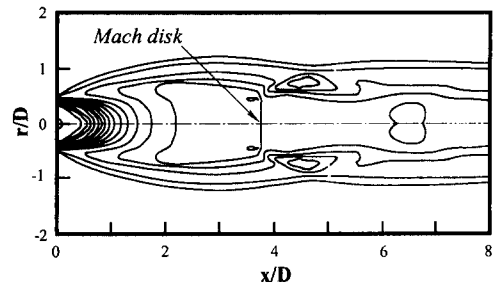
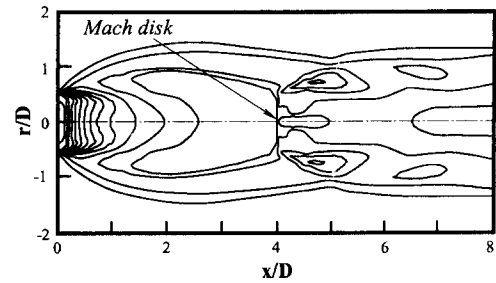


Fig. 3 Radial distribution of Mach number at nozzle exit plane

$= 1.4$ )에 대한 경우이며, 문헌 (12)의 실험에서는 그림의 종축의 값이 1.0에 상당하는 마하수값( $M_e$ )을 원추형노즐의 대표마하수로 정하고 있다. 따라서 그림으로부터 실험에서 주어지는 마하수  $M_e$ 와 계산값의 차이는 노즐의 확대각이 클수록 크게 되며, 또 노즐출구의 설계마하수가 클수록 크게 된다. 구체적으로, 본 계산에서 설계마하수  $M_d$ 와 문헌 (12)의 대표마하수  $M_e$ 와의 차이가 최대로 되는 것은  $M_d = 2.0$ 이고,  $\theta = 20^\circ$ 인 경우  $M_e = 2.036$ 으로



(a)  $p_0/p_b = 50, \theta = 0^\circ$



(b)  $p_0/p_b = 50, \theta = 20^\circ$

Fig. 4 Density contours of under-expanded jet at  $M_a = 2.0$

되며, 이 차이는 1.8% 정도로 매우 작다. 따라서 본 계산결과를 문헌 (12)의 실험결과와 직접 비교할 수 있다.

한편 Fig. 4에는  $M_a$ 가 2.0이고,  $\theta=0^\circ$ 와  $20^\circ$ 인 경우에 대하여 수치계산한 등밀도선도의 일례를 나타내었다. 계산에 적용된 노즐압력비 ( $p_0/p_b$ )는 50이며, 계산결과는 노즐의 출구직경으로 무차원화하였다. 두 그림으로부터 제트의 경계, 마하디스크의 위치 그리고 마하디스크의 직경 등에 관한 제트 구조를 직접 비교할 수 있다. 예를 들어 노즐 출구로부터 방출되는 제트경계는  $\theta=20^\circ$ 인 경우가  $0^\circ$ 에 비해 더 넓게 확대되며, 마하디스크의 직경은 작다는 것을 관찰할 수 있다. 그림으로부터 마하디스크가 발생하기 때문에 제트셀의 길이를 명확하게 정의하기가 어렵지만, 압력비가 비교적 낮은 경우에 대한 수치계산 결과에 의하면, 제트 제1셀의 길이는 확대각이  $20^\circ$ 인 경우가 짧았다. 그러나 마하디스크가 나타나면, 제1셀, 제2셀 등은 명확하게 정의하기 어렵게 된다.

4.2 노즐의 확대각이 제트셀에 미치는 영향

저자 등에 의해서 수행된 실험<sup>(17)</sup>에 의하면, 제트 중에 발생하는 셀의 위치는 노즐의 압력비가 증가할수록 멀어지며, 제1셀의 길이로 무차원한 제2셀 및 제3셀의 길이는 거의 일정하다고 보고하였다. 또 확대반각이  $9^\circ$  이하인 노즐에 대하여, 셀의 위치는 노즐 압력비만의 함수라고 주장하였다. 그러나 그들의 연구에서 사용된 노즐은 확대각이 작을뿐만 아니라 노즐자체도 매우 작으므로, 제트유동의 광학관찰로부터 확대각의 정량적인 효과를 규명하기에 이르지는 못하였다. 본 연구에서는 제트셀에 미치는 노즐의 확대각의 영향을 조사하기 위하여, 노즐의 확대반각  $\theta$ 를  $0^\circ$ 에서  $20^\circ$ 까지 크게 변화시켰다. 노즐의 설계마하수  $M_a$ 가 2.0과 3.0인 두 경우에 대하여,  $\theta$ 가 제트 제1셀의 길이  $L_s$ 에 미치는 영향을 Fig. 5의 (a)와 (b)에 각각 나타내었다. 그림에서 횡축은 압력비이며, 종축은 제트 제1셀의 길이  $L_s$ 를 노즐 출구직경  $D$ 로 무차원화하였다. 그림 (a)는  $M_a=2.0$ 인 노즐에 대한 것이며, 실선은 앞의 식 (17)로 나타낸 이론값,  $\circ$ ,  $\triangle$  값들은 본 수치계산 결과를, 그리고  $\bullet$ ,  $\blacktriangle$ 의 값들은 문헌 (12)와 (17)의 실험값을 나타낸다. 또 그림의 하향 화살표시( $\downarrow$ ) 및 상향화살표시( $\uparrow$ : 그림 b 참조)는 각각 본 수치계산 및 실험결과로부터

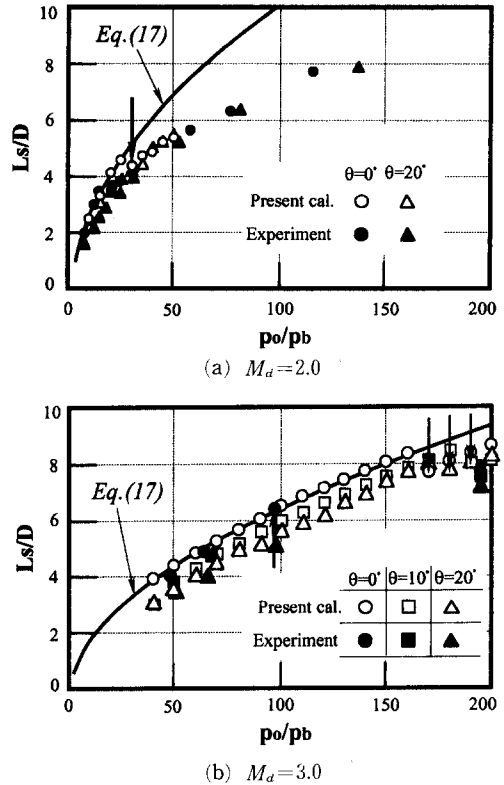


Fig. 5 Effects of design Mach number on length of the first shock cell

터 제트 중에 마하디스크가 발생하는 최소의 압력비를 나타낸다. 그림 (b)는  $M_a=3.0$ 에 대한 것이며, 실선의 값은  $\theta=0^\circ$ 에 대한 이론값을 나타낸다. 이들 그림으로부터 압력비가 크게 될수록 제트 제1셀의 길이  $L_s$ 는 길어지며, 같은 압력비와 마하수에 대해서 확대각이 클수록  $L_s$ 는 짧게 된다는 것을 알 수 있다. 이러한 경향은  $M_a=2.0$ 인 경우에는 뚜렷하게 나타나지 않고 있지만, 설계마하수가 상대적으로 증가하면 분명하게 나타나게 된다. 한편 그림 (a)에서 하향 화살표시 ( $\downarrow$ )로 나타낸 위치, 즉 수치계산으로부터 마하디스크가 발생하는 최소의 압력비보다 작은 압력비 범위에 대해서는 식 (17)로 예측한 이론선과 본 계산값이 비교적 잘 일치하지만, 압력비가 증가하여 제트 중에 마하디스크가 발생하게 되면 본 계산값은 이론값보다 더 작게 된다. 이것은 마하디스크가 제트 중에 발생하게 되면, 충격파의 분지(bifurcation)로 인한 후지 충격파(downstream leg of bifurcated shock waves)와 제트 경계가 교차하게 되는 점인  $L_s$ 보

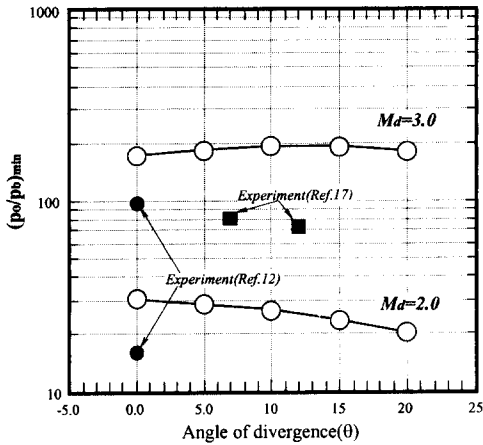


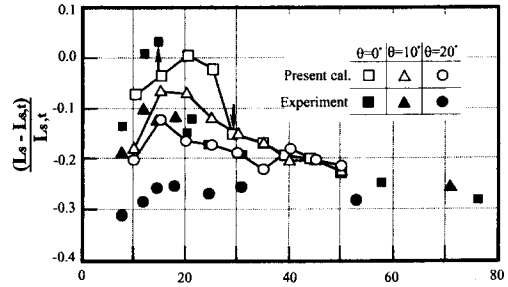
Fig. 6 Minimum pressure ratio to Mach disk in under-expanded flow

다 상류에 위치하기 때문이라고 생각된다.

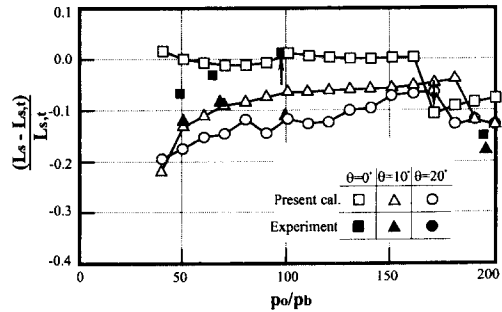
Fig. 6에는 축대칭 부축팽창 흐름에서 마하디스크가 발생할 수 있는 최소압력비를 확대각의 함수로 나타내었다. 그림으로부터  $Ma=3.0$ 인 경우는 확대각의 변화에 대하여 최소압력비는 거의 일정하게 나타나지만,  $Ma=2.0$ 인 경우 확대각이 커질수록 최소압력비는 점차적으로 낮아진다. 이것은  $\theta$ 가 클수록 제트경계에서 팽창파의 반사로 인하여 발생하는 압축파가 합체하기 쉬워지며, 바렐 충격파가 형성되기 쉬워진다. 그러나 노즐출구에서 마하수가 상대적으로 큰 경우에는 이와 같은 경향은 분명하지 않다. 그림에서  $Ma$ 가 증가하는 경우 최소압력비는 상당히 커지며, 제트 중에 마하디스크가 발생하는 최소압력비에 대한 실험값은 본 계산값보다 상당히 낮다. 이것은 본 계산에서 기체점성을 무시한 때문인지, 계산에 적용된 격자점의 수 등의 영향 때문인지 현재로서는 분명하지 않다. 본 연구에서는 이들 파라미터를 변화시켜 실험결과와 비교하지 않았다.

4.3 선형이론과의 비교

이론식 (17)에 의한 값을  $L_{s,t}$ 로 정의하여, 이것을 기준으로 본 수치계산 및 실험결과로부터  $(L_s - L_{s,t})/L_{s,t}$ 의 값을 압력비에 대하여 Fig. 7(a, b)에 나타내었다. 그림 (a)로부터  $\theta=0^\circ$ 의 경우 이론값과 본 계산의 결과는 마하디스크가 발생하기 전까지의 압력비 범위에 대해서는 7%의 오차 범위 내에서 일치하고 있으며, 실험값은 14%의 오차 범



(a)  $Ma=2.0$



(b)  $Ma=3.0$

Fig. 7 Effects of Mach number and divergence angle on length of the first shock cell

위내에 있다. 마하수가 상대적으로 더 큰 그림 (b)에서는  $\theta=0^\circ$ 의 경우, 마하디스크가 발생하기 전의 압력비에 대해서는 1.6%의 오차 범위 내에서 일치하고 있으며, 실험결과는 6.6%의 오차 범위에 있다. 그림에서  $\theta$ 가 증가할수록 이론값과 본 계산값의 차이는 커진다. 즉 이것은  $\theta$ 가 증가할수록 제1셀의 길이는 짧아지게 된다는 것을 의미하며, 이러한 경향은 실험결과와 일치한다. 한편 제트 중에 마하디스크가 발생하는 최소압력비보다 더 큰 압력비의 범위에서는 제트 제1셀의 길이에 미치는 확대각의 영향은 상대적으로 작아지게 되며, 이 경향은 실험결과와 정성적으로 일치하고 있음을 알 수 있다. 확대각이 크게 될수록 제트 제1셀의 길이가 짧게 되는 것은 다음과 같이 생각된다. 즉 같은 압력비에 대하여, 노즐의 확대각이 클수록 노즐출구 직후에서 제트경계의 곡률반경이 직선노즐에 비해 적어진다. 이 때문에 팽창파가 반사하여 형성되는 압축파가 서로 합체하기 쉬워지며, 노즐출구면에서 마하수  $Me$ 는 실제마하수보다 커지게 된다. 따라서 확대각이 큰 노즐일수록 출구면에서 발생하는 팽창파의 반사와 이에 수반하는 압축파의 강도

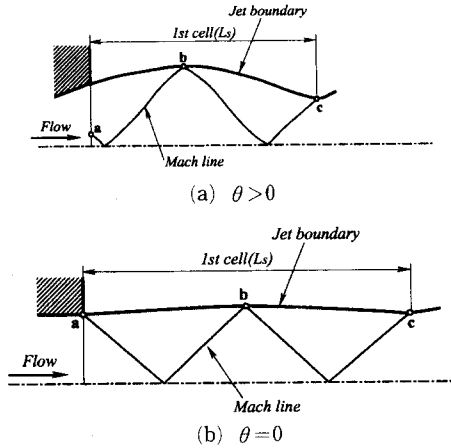


Fig. 8 Schematic diagram of 2-dimensional under-expanded jet

는 강하게 되며, 노즐출구 근방에서 강한 팽창 흐름 때문에 마하라인(Mach line)은 제트 중심축 방향으로 굽게 된다. 이로 인하여 바렐 충격파는 직선노즐에서보다 상류측에 형성되며, 바렐 충격파의 중점이 직선노즐의 경우보다 상류측에서 제트 경계와 교차하여 제1셀이 형성된다. 따라서  $\theta$ 가 클수록 제트 제1셀의 길이는 짧아지게 된다.

Fig. 8에는 위의 사실을 보다 구체적으로 나타내기 위하여,  $\theta > 0^\circ$ 인 경우와  $\theta = 0^\circ$ 의 노즐로부터 방출되는 제트 유동을 도식적으로 나타내었다. 그림 (a)에 나타난 바와 같이 노즐출구로부터 점 c까지가 제트 제1셀의 길이  $L_s$ 이다. 제트중의 굽은 실선은 점 b와 c를 통하는 마하라인이며, 노즐출구면상의 점 a에서 발생한 마하라인이 점 c에 입사하여 제1셀을 형성하고 있다. 만일 앞에서와 같이 노즐내의 흐름을 2차원 source 흐름이라고 가정한다면, 노즐출구면에서 흐름의 편각과 마하수는 반경방향의 분포를 가지게 된다. 점 a는 노즐의 확대각이 클수록 중심축에 가까워지기 때문에 제트셀의 길이는 짧아진다. 이러한 사실들은 2차원 제트에 대한 것이지만, 축대칭 제트에 대해서도 정성적으로 유사하다고 생각된다.

4.4  $L_s$ 에 미치는  $M_d$ 의 영향

앞의 Fig. 5에서 기술한 바와 같이 노즐의 압력비가 같은 경우에 대하여, 출구에서 설계마하수가 클수록 제트셀의 길이는 짧아진다. 이것은 설계마하수가 크게 되는 경우, 노즐의 적정팽창의 압력비

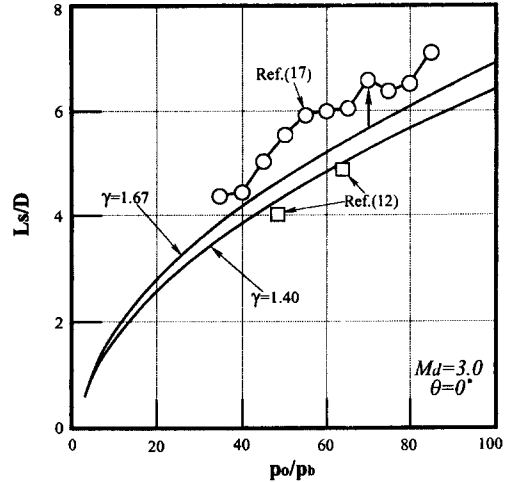


Fig. 9 Effects of specific heat ratio of gas on length of the first shock cell

가 커지므로, 부속팽창의 정도가 작아지기 때문이다. 또 Fig. 7의 (a)와 (b)로부터 수치계산과 실험결과 모두 마하디스크가 발생하는 최소압력비보다 더 큰 압력비에서는 제1셀의 길이는 설계마하수가 작을수록 이론값과의 차이는 커지게 되며, 따라서 제1셀의 길이는 짧아진다.

4.5  $L_s$ 에 미치는 기체 비열비의 영향

기체의 비열비가 1.4인 공기와 1.67인 아르곤가스에 대하여 제트셀의 길이를 조사하였다. Fig. 9에는 노즐의 설계마하수  $M_d$ 가 3.0이고, 직선노즐에 대하여 기체의 비열비가 제트셀의 길이에 미치는 영향을 나타내었다. 그림중의 실선은 식 (17)에 의한 이론값이며, 아르곤가스에 대한 실험값은 문헌 (12, 17)에서 취한 것이다. 문헌 (17)에서 사용된 노즐은 구체적으로 노즐목의 직경이 1.5mm, 출구직경이 2.58mm이며, 길이 5.5mm의 테이퍼부하류에는 길이 4.5mm의 출구평행부를 가지는 출구평행노즐(nozzle with parallel exit)이다. 그림으로부터 같은 압력비에 대하여, 이론값과 실험값은 모두 기체의 비열비가 클수록 셀의 길이가 길어진다. 이것은 어떤 확대각을 가지는 노즐에 대하여, 비열비가 클수록 기체는 가벼운 것으로 되며, 같은 압력비에 대하여 적정팽창의 압력비가 작아지게 되기 때문에 부속팽창의 정도가 크게 된다. 아르곤가스에 대한 실험값이 이론값과 잘 일치하지 않고 있으나, 실험에서 이용된 노즐이 매우 작으므로 벽면



경계층의 영향으로 인하여 실제 노즐출구에서 마하수가 3.0보다 작은데 기인(노즐출구 마하수가 작게 되면 셀의 길이는 길어진다)할 수 있다.

4.6 마하디스크의 위치

Fig. 9에 나타난 실험값으로부터 마하디스크가 발생하는 압력비 직후에서 셀의 길이가 작아지는 경향을 관찰할 수 있다. 이것은 제트 중에 마하디스크가 발생하면 마하디스크의 하류는 아음속으로 되기 때문에 제트의 구조 등이 급변하게 된다. 현재까지 마하디스크의 위치 및 마하디스크의 직경 등에 관한 수많은 연구결과가 보고(9,10,11)되어 있으며, 마하디스크는 노즐 압력비만의 함수로 알려져 있다. 일반적으로 초음속 부족팽창 제트의 형상을 나타내는 대표적인 파라미터로 노즐 출구로부터 마하디스크까지의 거리, 제트경계 및 바렐 충격파의 반경(축대칭 제트인 경우이며, 2차원 제트인 경우에는 반폭으로 된다) 등을 들 수 있다. 본 연구에서는 이와같은 파라미터를 조사하기 위하여, 출구에서 마하수가 1.0인 음속노즐을 시험하였다.

Fig. 10에는 수치계산에 의해서 얻어진 마하디스크의 거리  $x_m$ 을 압력비에 대하여 나타내었다. 그림에는 비교를 위하여 축대칭 제트와 2차원 제트인 경우 및 실험값도 함께 나타내었다. 그림 중의 두 실선은 축대칭 제트와 2차원 제트인 경우이며, 각각 다음 식으로 주어진다.

$$\text{축대칭 제트} : x_m = 0.67 (p_o/p_b)^{0.5} \quad (18)$$

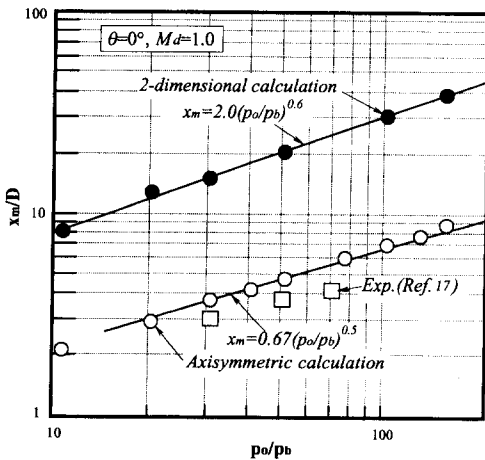


Fig. 10 Position of Mach disk versus nozzle pressure ratio

$$\text{2차원 제트} : x_m = 2.0 (p_o/p_b)^{0.6} \quad (19)$$

위의 식 (18)은 음속노즐을 통하는 부족팽창 제트에 관한 준 1차원 근사이론의 결과(18)이며, 식 (19)는 2차원 수치계산에 의해 얻어진 값들을 다항식 근사화한 것이다. 그림으로부터 축대칭 제트에 비해 2차원 제트에서 발생하는 마하디스크의 거리가 더 길며, 축대칭 제트에 대한 본 계산값은 준 1차원 근사이론선, 즉 식 (18)과 상당히 잘 일치하고 있다. 따라서 축대칭 제트인 경우에 대하여, 본 계산에서 노즐출구에서 방사상의 source 흐름으로 근사화한 것은 타당한 것으로 생각된다. 그러나 2차원 부족팽창 제트인 경우에는 source 흐름으로 근사할 수 없다. 이것은 계산결과와 속도 벡터로부터 유선이 곡선으로 되어 있다는 것으로부터 확인할 수 있었다. 2차원 제트에서 기체는 축대칭 제트에 비해 상대적으로 완만하게 팽창하기 때문에 반경방향의 속도성분의 영향이 상대적으로 크게 되며, 이 때문에 같은 압력비에 대하여 마하디스크는 보다 하류에 위치하게 된다.

4.7 제트경계 및 바렐 충격파의 형상

Fig. 11에는 각각 축대칭 제트와 2차원 제트에 대하여 제트경계의 반경 혹은 반폭  $r_b$ 를 압력비에 대하여 나타내었다. 그림 중의  $\zeta$ 는 마하디스크까지의 거리  $x_m$ 로 무차원화한 거리  $\zeta (=x/x_m)$ 를 의미한다. 여기에서 제트 경계  $r_b$ 는 수치계산의 등밀도선도를 사용하여 구하였다. 그림에서 두 경우 모

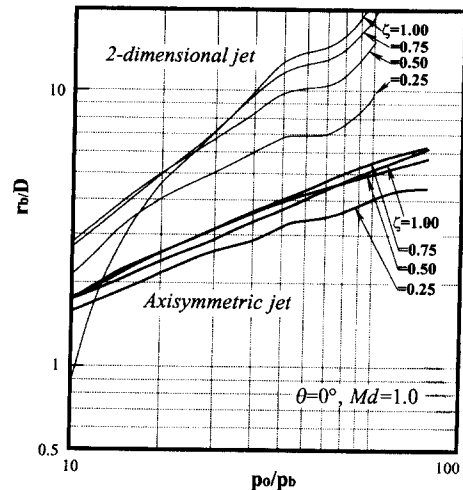


Fig. 11 Jet boundary size versus nozzle pressure ratio

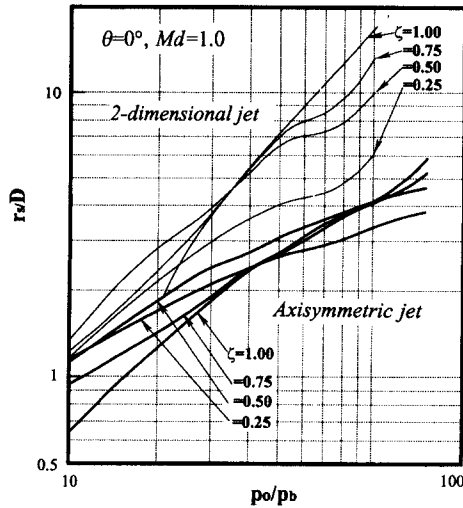


Fig. 12 Barrel shock wave size versus nozzle pressure ratio

두 어느 단면에 대해서도 제트 경계는 압력비의 증가에 따라 넓어지게 되며, 2차원 제트 경계의 반폭이 축대칭 제트 경계의 반경보다 크다는 것을 알 수 있다. 또 압력비가 증가하는 경우에 대하여 축대칭 제트 경계보다 2차원 제트경계의 증가비율이 더욱 크다. 한편 Fig. 12에는 각각 축대칭 제트와 2차원 제트에 대하여 바렐 충격파의 형상을 비교하였다. 그림으로부터 압력비가 커질수록 부족팽창의 정도가 커지게 되므로 바렐 충격파의 반경  $r_s$ 는 더욱 커진다. 이러한 경향은 축대칭 제트에 비하여 2차원 제트에서 더욱 뚜렷하게 나타난다. 위의 두 그림으로부터 노즐의 압력비가 주어지는 경우 부족팽창 제트의 형상, 즉 제트 경계와 바렐 충격파 등을 추정할 수 있다.

## 5. 결론

본 연구에서는 원추형노즐을 통하는 초음속 부족팽창 흐름에 대하여 TVD 수치계산법을 적용하여, 제트셀의 길이에 미치는 노즐의 확대각의 영향, 노즐 설계마하수와 노즐압력비의 영향 등을 조사하였다. 또 부족팽창의 정도가 큰 경우에 발생하는 마하디스크, 제트 경계 및 바렐 충격파의 형상 등에 대하여 2차원 및 축대칭 흐름으로 계산하여 비교하였다. 또 수치계산 결과를 이론해석과 실험결과와 비교하여, 다음과 같은 결과를 얻었다.

- ① 부족팽창 제트의 제1셀의 길이는 노즐의 압력비가 증가할수록 길어지지만, 노즐의 확대각 및 설계 마하수가 증가하는 경우에는 짧아진다.
- ② 제트 중에 마하디스크가 발생하는 최소노즐압력비보다 작은 압력비에 대해서는 확대각이 증가할수록 제트 제1셀의 길이는 짧아지지만, 마하디스크가 발생하는 최소노즐 압력비보다 큰 압력비에 대해서는 제트셀의 길이에 미치는 노즐확대각의 영향은 작다.
- ③ 축대칭 제트에서 발생하는 마하디스크의 위치는 준일차원 이론과 잘 일치하며, 2차원 제트에 비해 짧다.
- ④ 제트셀의 길이는 기체의 비열비가 클수록 길어지며, 이러한 경향은 실험결과와 일치한다.
- ⑤ 마하디스크가 발생하는 최소압력비는 노즐의 설계마하수가 증가할수록 커지며, 설계마하수가 2.0인 경우 노즐의 확대각이 커질수록 최소압력비는 작아진다.

## 참고문헌

- (1) Owczarek, J. A., 1964, "Fundamentals of Gas Dynamics," International Textbook Co.
- (2) Krothapalli, A., Hsia, Y., Baganoff, D. and Karamcheti, K., 1986, "The Role of Screech Tones in Mixing of an Underexpanded Rectangular Jet," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 106, No. 1, pp. 119~143.
- (3) Eastman, D. W. and Radtke, L. P., 1963, "Location of the Normal Shock Wave in the Exhaust Plume of a Jet," *AIAA Journal*, Vol. 1, No. 4, pp. 918~919.
- (4) Tam, C. K. W., 1975, "Supersonic Jet Noise Generated by Large Scale Disturbances," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 38, No. 1, pp. 51~79.
- (5) Meier, G. E. A., Selerowicz, W. C. and Szumowski, A. P., 1990, "A Nozzle Generating Low Jet Noise," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, No. 1, pp. 65~73.
- (6) Lindskog, P., 1992, "Powder Metallurgy in Europe 1992," *Powder Metallurgy*, Vol. 35, No. 3.
- (7) Demir, A., 1990, "A Study of Air-Jet Textur-

- ing Nozzles: The Effects of Nozzle Configuration on the Air Flow," *Trans. ASME, Journal Engineering for Industry*, Vol. 112.
- (8) 岩本勝治, 1994, "가스遮斷器ノズルによる超音速流に関する研究," 日本機械學會論文集, B編, 60卷, 578號.
- (9) Masuda, W. and Nakamura, K., 1993, "Effects of Nozzle Contour on the Aerodynamic Characteristics of Underexpanded Annular Impinging Jets," *JSME International Journal, Series B*, Vol. 36, No. 2, pp. 238~244.
- (10) Adamson, T. C. Jr. and Nicholls, J. A., 1959, "On the Structure of Jets from Highly Underexpanded Nozzles into Still Air," *Journal Aerospace Sciences*, Vol. 26, pp. 16~24.
- (11) Yasuhara, M., 1966, "Hypersonic Self-Similarity of Barrel Shock in Source-Type Free Jets," *AIAA Journal*, Technical Notes, Vol. 4, No. 6, pp. 1102~1104.
- (12) Love, E. S., Grigsby, C. E., Lee, L. P. and Woodling, M. S., 1959, "Experimental and Theoretical Studies of Axisymmetric Free Jets," *NASA TR R-6*.
- (13) Tam, C. K. W., 1987, "Stochastic Model Theory of Broadband Shock Associated Noise from Supersonic Jets," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 116, pp. 265~302.
- (14) Tam, C. K. W., Jackson, J. A. and Seiner, J. M., 1985, "A Multiple-Scales Model of the Shock Cell Structure of Imperfectly Expanded Supersonic Jets," *Journal of Fluid Mech.*, Vol. 153, pp. 123~149.
- (15) Yee, H. C., 1987, "Upwind and Symmetric Shock Capturing Schemes," *NASA TM-9464*
- (16) 高橋健人, 1958, "物理數學", 培風館.
- (17) 金義東, 李鍾洙, 1996 "가스 미립화용 초음속 노즐로부터 방출되는 분류에 관한 실험적 연구," 大韓機械學會 論文集, 제20권, 제2호, pp. 679~709.
- (18) Sherman, F. S., 1966, "The Structure and Utilization of Supersonic Free Jets in Low Density Wind Tunnels," *Rarefied Gas Dynamics*, Vol. 2, pp. 84~105.