

〈논 문〉

원관내 Bingham Plastic의 층류 대류 열전달(2)

수치해석적 연구-속도분포 발달유동과 속도 및 온도분포 동시 발달유동

민태기* · 최형권* · 유정열** · 최해천**

(1996년 5월 15일 접수)

Laminar Convective Heat Transfer of a Bingham Plastic in a Circular Pipe (II)

Numerical approach-hydrodynamically developing flow and simultaneously developing flow

Taegee Min*, Hyung Gwon Choi*, Jung Yul Yoo** and Haecheon Choi**

Key Words: Bingham Plastic (빙햄 플라스틱), Hydrodynamically Developing Flow (속도분포 발달유동), Simultaneously Developing Flow (속도 및 온도분포 동시 발달유동)

Abstract

Hydrodynamically developing and simultaneously (hydrodynamically and thermally) developing laminar flows of a Bingham plastic in a circular pipe have been investigated numerically. Solutions have been obtained by using a four-step fractional method combined with an equal order bilinear finite element method. For the hydrodynamically developing flow, shorter entrance length is required to reach fully developed velocity field for larger yield stress and non-monotonic pressure drop along the pipe centerline is observed when the yield stress exceeds a certain critical value. For the simultaneously developing flow, the heat transfer characteristics show the same trends as those predicted for the thermally developing flow (Graetz problem).

기 호 설 명

A_2	: 유한 요소의 면적	N_i	: 전체 절점의 개수
Br	: 브링크만수(Brinkman number), $\mu_0 U_{av}^2 / k(T_e - T_w)$	Nu	: 누셀트수(Nusselt number), hD/k
C_p	: 정압비열	P	: 압력
c	: 완전발달한 속도분포에서 항복되지 않은 유동 영역의 무차원화된 반경, 또는 벽전단응력에 대한 항복응력의 비, τ_y / τ_w	Pe	: 페클레수(Peclet number), $2U_{av}R/\alpha$ 또는 $2RePr$
D	: 원관의 직경	Pr	: 프란틀수(Prandtl number), $\mu_0 / (\rho\alpha)$
h	: 열전달계수	ρ	: 무차원화된 압력
k	: 열전도계수	R	: 원관의 반경
m	: 멱승성장계수(exponential growth parameter)	Re	: 레이놀즈수(Reynolds number), $\rho U_{av} R / \mu_0$
		r	: 무차원화된 반경, y/R
		S_e	: 유한 요소의 경계 면적
		$T(y, z)$: 온도
		T_e	: 입구 온도
		$T_m(z)$: 평균 온도

*회원, 서울대학교 대학원

**회원, 서울대학교 기계공학과

T_w	: 벽면 온도
$t, \Delta t$: 시간과 시간 증분
U, U_i	: 축방향 속도
U_{av}	: 평균 속도
\hat{U}_i, U_i^*	: 중간 단계 속도
u	: 무차원화된 축방향 속도, U/U_{av}
V	: 반경방향 속도
v	: 무차원화된 반경방향 속도, V/U_{av}
w	: 가중함수
x	: 무차원화된 축방향 좌표, z/R
x^+	: 무차원화된 축방향 좌표, $(z/R)/Pe$
Y	: 무차원화된 항복응력, $\tau_y R/\mu_0 U_{av}$
y	: 반경방향 좌표
z	: 축방향 좌표

그리스문자

α	: 열확산계수
$\dot{\gamma}, \dot{\gamma}_{ij}$: 변형률(rate of strain), $U_{i,j} + U_{j,i}$
$\dot{\gamma}^*, \dot{\gamma}^*_{ij}$: 무차원화된 변형률, $u_{i,j} + u_{j,i}$
η	: 빙행 모델에서의 겔보기점도(apparent viscosity)
η_{eff}	: 무차원화된 겔보기점도, η/μ_0
$\Theta(r, x)$: 무차원화된 온도, $(T_w - T)/(T_w - T_e)$
$\Theta_m(x)$: 무차원화된 평균 온도, $(T_w - T_m)/(T_w - T_e)$
μ_0	: 소성점도(plastic viscosity)
ρ	: 밀도
τ, τ_{ij}	: 전단응력
τ_w	: 벽전단응력
τ_y	: 항복응력
Φ	: 소산함수(dissipation function)
$\phi(r)$: 무차원화된 온도, $(T_w - T)/(T_w - T_m)$
φ	: 정규화된 변수

상첨자

n : 시간 단계

하첨자

e : 원관의 입구

w : 벽

동시 발달유동(combined developing flow 또는 simultaneously developing flow) 등의 네 가지 형태가 있다.^(1~3) 이 중에서 완전발달유동과 온도분포 발달유동은 속도분포의 완전발달을 가정한 것으로, 특히 온도분포 발달유동은 그라츠문제(Graetz problem)라고 불리운다. 이 두 경우는 속도분포가 주어지므로 에너지방정식의 해는 해석적인 방법으로 구할 수 있다. 본 연구의 제 1부⁽⁴⁾에서는 해석적인 방법을 사용하여 원관내 빙행 플라스틱의 완전발달유동과 온도분포 발달유동에 대한 연구를 수행하였다. 고전적인 그라츠문제의 해석은 원관 유동에서의 열전달 특성들에 대한 주요한 정보를 제공하지만, 대개의 실제 공학적인 문제에 있어서는 타원형 미분방정식을 해석하여야 하므로 불가피하게 수치기법을 사용하여 관내의 유동 특성과 열전달 특성을 해석하여야 한다.

Chen et al.⁽⁵⁾은 경계층방정식(boundary layer equation)을 이용하여 원관내 빙행 플라스틱의 속도분포 발달유동에 대한 수치해석을 수행하였다. 그러나 McDonald et al.⁽⁶⁾과 Vradis et al.⁽⁷⁾이 지적하였듯이 경계층방정식은 반경방향의 압력 변화를 무시하므로 역압력 구배(adverse pressure gradient)나 속도 overshoot와 같은 입구 부근의 유동 특성을 잘 예측하지 못한다. 최근 Vradis et al.⁽⁷⁾은 원관내의 빙행 플라스틱에 대하여 처음으로 타원형 지배방정식을 적용함으로써 속도분포 발달유동과 속도 및 온도분포 동시 발달유동에 대한 수치해석을 수행하였다. 하지만 그들의 연구는 몇 가지 오류를 범하고 있는데, 이에 대해서는 본문 중에서 설명될 것이다.

본 연구의 목적은 동차 선형 유한요소를 이용한 4단계 분할 방법⁽⁸⁾을 이용하여 원관내 빙행 플라스틱의 속도분포 발달유동과 속도 및 온도분포 동시 발달유동에 대하여 수치해석을 수행함으로써, 여러 가지 항복응력, 프란틀수, 레이놀즈수와 브링크만수에 따른 결과들을 제시하고 이전 연구 결과들과 비교하는 것이다.

1. 서 론

관 내부의 층류 유동에는 완전발달유동(fully developed flow), 속도분포 발달유동(hydrodynamically developing flow), 온도분포 발달유동(thermally developing flow)과 속도 및 온도분포

2. 지배방정식

비정상 층류 비압축성 유동의 지배방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} U_i U_j = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2)$$

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \frac{\partial}{\partial x_j} T U_j = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + \eta \cdot \Phi \quad (3)$$

여기서 Φ 는 소산함수(dissipation function)로 다음과 같이 표현된다.

$$\Phi = \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (4)$$

뉴턴유체의 구성방정식과 유사한 형태를 비뉴턴 유체의 구성방정식에도 적용하기 위하여 겔보기점도(apparent viscosity, 또는 viscosity function)를 도입하면 빙햄 플라스틱에 대한 구성방정식의 텐서 형태는 다음과 같다.

$$\tau_{ij} = \eta \dot{\gamma}_{ij} \quad (5)$$

여기서 $\dot{\gamma}_{ij} = U_{i,j} + U_{j,i}$ 는 변형률이고 η 는 겔보기 점도로서 빙햄 플라스틱의 경우 다음과 같이 표현된다.⁽⁹⁻¹²⁾

$$\eta = \begin{cases} \mu_0 + \frac{\tau_y}{\sqrt{1/2(\dot{\gamma}^* : \dot{\gamma}^*)}} & (|\tau| \geq \tau_y) \\ \infty & (|\tau| < \tau_y) \end{cases} \quad (6)$$

여기서 τ_y 는 항복응력, μ_0 는 소성점도(plastic viscosity)이다.

식 (6)과 같은 점도함수(viscosity function)모델의 단점은 항복점에서 불연속이고 수치계산을 위하여 무한대에 해당하는 큰값을 지정해주어야 한다는 점이다. 이는 변형률이 낮은 지역에서 수치적으로 불안정한 우려가 있다. 더욱이 항복응력과 소성점도의 두 가지 변수 밖에 없어 변형률이 낮은 지역과 아직 항복되지 않은 지역에서의 거동을 효과적으로 묘사하지 못한다. 최근에 Ellwood et al.⁽¹³⁾은 Papanastasiou⁽¹⁴⁾에 의하여 아래와 같이 제안된 구성방정식을 사용함으로써 고무적인 결과를 보고하였다.

$$\eta = \mu_0 + \frac{\tau_y}{\sqrt{1/2(\dot{\gamma}^* : \dot{\gamma}^*)}} [1 - \exp(-m\sqrt{1/4(\dot{\gamma}^* : \dot{\gamma}^*)})] \quad (7)$$

여기서 m 은 멱승성장계수이다. 식 (7)은 이상화된 빙햄 플라스틱의 거동을 효과적으로 근사한다. 게다가, 수치계산의 관점에서, 식 (7)은 수행하기에 단순할뿐 아니라 변형률이 낮은 지역에서 만족할만한 근사를 나타낸다. 본 연구에서 m 은 1000으로 하였다.

로 하였다.

원통형 좌표계에서 축대칭 유동에 대한 무차원화된 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_{eff} \cdot 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\eta_{eff} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] \quad (9a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_{eff} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) - \frac{1}{r} \left(\eta_{eff} \cdot 2 \frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\eta_{eff} \cdot 2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] \quad (9b)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial r} = \frac{2}{Pe} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) \right) + \frac{2Br}{Pe} \eta_{eff} (1/2(\dot{\gamma}^* : \dot{\gamma}^*)) \quad (10)$$

$$\eta_{eff} = 1 + \frac{Y}{\sqrt{1/2(\dot{\gamma}^* : \dot{\gamma}^*)}} [1 - \exp(-m\sqrt{1/4(\dot{\gamma}^* : \dot{\gamma}^*)})] \quad (11)$$

$$1/2(\dot{\gamma}^* : \dot{\gamma}^*) = 2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{v}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (12)$$

여기서 $\eta_{eff} = \eta/\mu_0$ 는 무차원화된 겔보기점도이고 $Y = \tau_y R / \mu_0 U_{av}$ 는 무차원화된 항복응력이다. Vradis et al.⁽⁷⁾은 식 (9b)의 우변의 $-(1/r) \cdot \eta_{eff} \cdot 2(v/r)$ 을 아무런 언급 없이 생략하였는데, 아마도 실수라고 생각된다. 더욱이 그들의 레이놀즈수에 대한 정의는 다소 불명확하다. 이 $-(1/r) \cdot \eta_{eff} \cdot 2(v/r)$ 항의 생략이 해에 미치는 영향은 4장에서 논의될 것이다.

Fig. 1은 본 연구의 계산 영역과 경계 조건을 나타낸 것이다. 입구에서 속도분포와 온도분포는 균일한 것으로, 출구에서는 완전발달로 가정하였다. 벽에서는 점착 조건과 일정 벽면 온도 조건이 적용되었다. Vradis et al.⁽⁷⁾은 온도분포의 완전발달 조

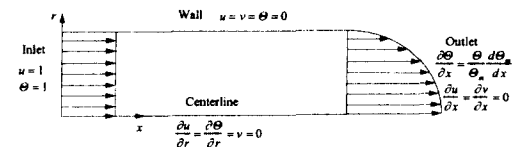


Fig. 1 Computational domain and boundary conditions

건으로 출구에서 $\partial\theta/\partial x=0$ 이라고 가정하였다. 하지만 출구에서 이 조건을 만족하기 위하여는 계산 영역이 불필요하게 축방향으로 길게 확장되어야 할 것이다. 따라서 본 논문에서는 출구에서 온도분포의 완전발달 경계조건으로 $\partial\theta/\partial x=0$ 대신에 $\partial(\theta/\theta_m)/\partial x=0$ 을 적용하였다.

본 논문에서 속도분포 발달유동에서는 식 (8), (9)와 해당 경계조건만 적용하고, 속도 및 온도분포 동시 발달유동에서는 전체 지배방정식 (8)~(10)과 경계조건을 적용하였다.

3. 수치기법

완전내재적(fully implicit) 4단계 분할 방법⁽¹⁵⁾을 사용함으로써 지배방정식 (8)~(10)의 시간에 따른 적분이 수행된다.

$$\frac{\hat{U}_i - U_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{U}_i \hat{U}_j + U_i^n U_j^n) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^n}{\partial x_i} + \frac{1}{2\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{\tau}_{ij} + \tau_{ij}^n) \quad (13)$$

$$\frac{U_i^* - \hat{U}_i}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^n}{\partial x_i} \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x_j^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial U_i^*}{\partial x_i} \quad (15)$$

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_i} \quad (16)$$

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (T^{n+1} U_j^{n+1} + T^n U_j^n) + \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (T^{n+1} + T^n) + \frac{(\eta \cdot \Phi)^n}{\rho C_p} \quad (17)$$

여기서 Δt 는 시간 증분이고 \hat{U}_i 와 U_i^* 는 중간 단계 속도들, 상점자 n 은 시간 단계를 나타낸다. 대류항과 확산항은 2차 정확도를 가진 Crank-Nicolson 방법에 의하여 적분된다.

분할방법에서 압력항이 속도와 분리된다는 사실은 이전에 여러 연구자들⁽¹⁶⁻²⁰⁾에 의하여 유한요소법을 이용한 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 해석에 사용되어 왔고, 그들은 분할방법이 유한요소 해석에 잘 적용될 수 있음을 보였다. 분할방법의 압력방정식의 계수는 고정되므로 SIMPLE 알고리즘과 같이 매 시간 단계마다 압력방정식의 역행렬을 구할 필요가 없다.⁽⁸⁾ \hat{U}_i 의 경계 조건은 시간에 대한 2차정확도를 유지하며 U_i^{n+1} 에 의하여 주어지는데,⁽¹⁵⁾ 이는 식 (14)와 (16)으로부터 유도된 결과이다.

$$\begin{aligned} \hat{U}_i &= U_i^{n+1} + \Delta t \frac{\partial (P^{n+1} - P^n)}{\partial x_i} \\ &= U_i^{n+1} + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (18)$$

운동량방정식과 압력방정식은 Galerkin 방법에 의하여, 에너지방정식은 유선 상류 Petrov-Galerkin 방법⁽²¹⁾을 이용하여 차분화된다. 비선형인 운동량방정식으로부터 선형적인 대수식을 얻기 위해 순차 근사법(successive approximation method)⁽²²⁾이 사용되었다. 차분화된 운동량방정식과 에너지방정식은 TDMA를, 압력방정식은 SOR(successive over-relaxation)을 구조 격자계(structured grid)에 대해 사용하여 풀었다.

Poisson 형태의 압력방정식은 연속방정식에서 얻는다. 본 연구에서는 동차 속도-압력 요소(equal order velocity-pressure element)를 채택하였으므로 연속방정식의 가중함수도 운동량방정식의 것과 같은 차수이어야 한다. 이제 연속방정식에 가중간 류법을 적용하면 연속방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\int_{A_e} \omega \nabla \cdot \mathbf{U}^{n+1} dA_e = 0 \quad (19)$$

벡터 항등식 $\nabla \cdot (\omega \mathbf{U}) = \nabla \omega \cdot \mathbf{U}^{n+1} + \omega \nabla \cdot \mathbf{U}^{n+1}$ 과 확산 정리(divergence theorem)에 의해 식 (19)는 아래와 같이 된다.

$$\int_{A_e} \nabla \omega \cdot \mathbf{U}^{n+1} dA_e = \int_{S_e} (\omega \mathbf{U}^{n+1} \cdot \mathbf{n}) dS_e \quad (20)$$

이제, 식 (16)을 식 (20)에 대입하면 아래와 같은 Poisson 형태의 압력방정식이 구하여진다.

$$\begin{aligned} \frac{\nabla t}{e} \int_{A_e} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_j} \right) dA_e &= \int_{A_e} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_j} \cdot \mathbf{U}_j^* \right) dA_e \\ &- \int_{S_e} (\omega \mathbf{U}^{n+1} \cdot \mathbf{n}) dS_e \end{aligned} \quad (21)$$

식 (15)를 이용하여 다른 연구자들^(17,20)이 사용한 전형적인 압력방정식의 약형식(weak form)은 아래와 같이 쓰여진다.

$$\begin{aligned} \int_{A_e} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_j} \right) dA_e &= -\frac{\rho}{\nabla t} \int_{A_e} \left(\frac{\partial U_j^*}{\partial x_j} \omega \right) dA_e \\ &+ \int_{S_e} \omega \frac{\partial P^{n+1}}{\partial n} dS_e \end{aligned} \quad (22)$$

수치적인 관점에서 식 (22)보다 식 (21)이 출구 경계 조건을 처리하는데 편리하므로 본 논문에서의 출구 경계조건은 식 (21)과 같이 처리하였다.

4. 결과

4.1 경계 조건 및 수렴 조건

속도분포 발달유동에 대해서는 $Re=25$ 에 대해 81×21 비균일 격자계가 사용되었으며 축방향의 길이는 반지름의 8배이다. 속도 및 온도분포 동시 발달유동에 대하여는 121×21 비균일 격자계가 사용되었으며 축방향의 길이는 반지름의 50배이다. 정상상태의 해는 아래의 조건이 만족될 때 얻어진다.

$$e_{\max} = \max_{i=1, N_t} |\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1}| < 10^{-9} \quad (23)$$

여기서 φ 는 정규화된 변수이고, 하첨자 i 는 특정 절점을, 상첨자 n 은 시간 단계를, 그리고 N_t 는 전체 절점의 수를 나타낸다.

4.2 속도분포 발달유동

Fig. 2는 $Re=25$ 일 때 $Y=0, 0.46, 1.09, 1.99, 3.37, 5.65$ 에 대하여 시간에 따른 식 (23)의 e_{\max} 를 나타낸다. Y 가 클수록 정상상태에 도달하기 위하여 많은 시간이 요구됨을 알 수 있다.

Fig. 3은 속도분포가 완전발달한 것으로 가정된 출구에서의 속도분포를 나타낸다. 본 연구의 수치해가 해석해(9)와 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. Y 가 0이 아닐 때, 중심축 근처에 속도가 일정한 영역, 즉 'plug flow' 혹은 'core' 영역이 있음을 볼 수가 있다. 이 plug flow 영역은 Y 가 증가할수록 커진다. 무차원화된 항복응력 Y 는 plug flow 영역을 나타내는 무차원화된 반지름 c 로 표시될 수 있다.(5)

$$Y = \frac{12c}{3-4c+c^4} \quad (24)$$

Fig. 4는 축방향의 네 개의 지점에서 축방향 속

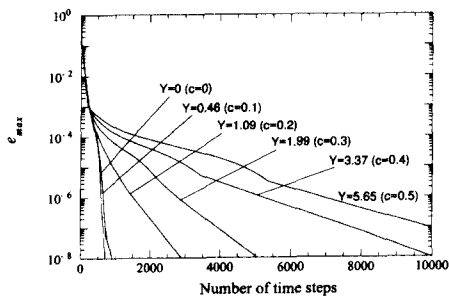


Fig. 2 Convergence history for various yield numbers

도성분의 반경방향 변화를 나타낸 것이다. 입구 근처의 속도분포가 원관 중심부에서 극소값을, 벽 근처에서 극대값을 가지는 것을 볼 수가 있다. 이러한 속도 overshoot는 Wang and Longwell(23)에 의하여 처음 보고되었는데, 보다 자세한 설명에 대하여는 Shah and London(1)을 참조할 수 있다. 속도 overshoot는 Y 가 커질수록 감쇠됨을 볼 수 있다.

Fig. 5는 중심축에서 축방향 속도성분의 축방향

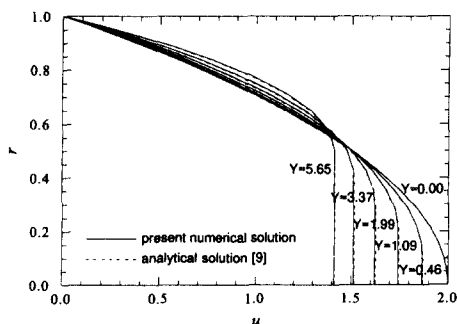


Fig. 3 Fully developed velocity profiles

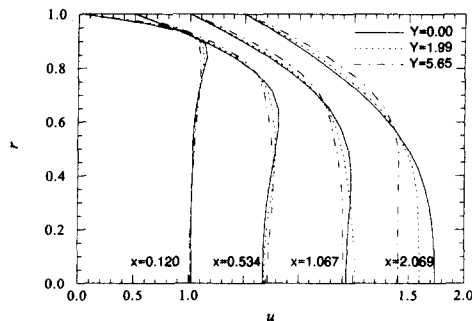


Fig. 4 Radial variations of the axial velocity at four axial locations

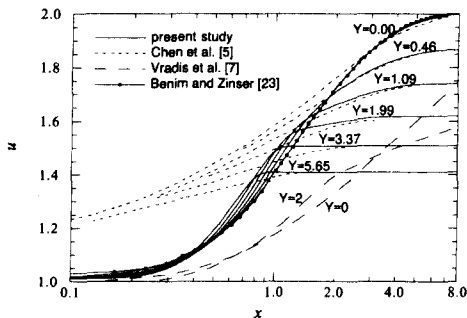
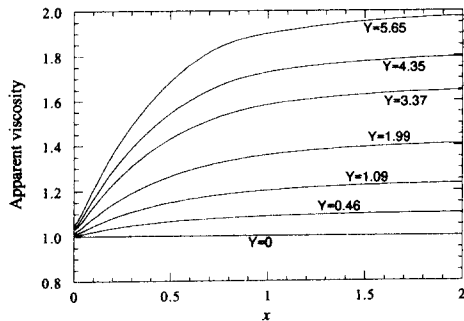


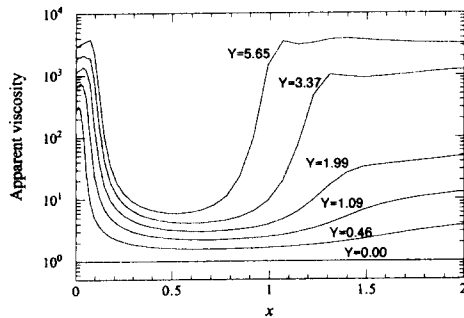
Fig. 5 Variation of centerline velocity with respect to axial distance

변화를 다른 연구 결과들과 함께 나타낸 것이다. 수치해석에서는 점착조건을 적용하기 위하여, 벽면의 유한요소에서의 속도분포는 어떤 일정한 값으로부터 0으로 선형적으로 떨어진다. 이런 이유로, 유량을 맞추기 위해서는 입구에서의 속도가 평균 속도인 1보다 약간 크게 된다. 그림에서 Y 가 커질수록 속도장은 빨리 발달하여 완전발달에 필요한 입구거리는 짧아짐을 볼 수 있다. $Y=0$, 즉 뉴턴 유체의 층류 유동일 때, 본 연구의 결과가 Benim and Zinser⁽²⁴⁾의 것과 잘 일치함을 볼 수 있다. 또한, 본 연구의 결과는 경계층방정식을 사용한 Chen et al.⁽⁵⁾의 결과가 입구 근방의 유동을 제대로 예측하지 못함을 보여준다. Vradis et al.⁽⁷⁾의 결과는 Benim and Zinser⁽²⁴⁾와 본 연구의 결과들과 매우 다름을 볼 수 있는데, 이는 그들의 지배방정식에서 생략된 항 때문으로 생각된다(1장과 2장 참조).

Fig. 6(a)와 (b)는 각각 벽과 중심축에서 걸보기점도의 축방향으로의 변화를 나타낸다. Y 가 제법 큰 값일 때, Fig. 6(a)에서 보듯이 벽에서의 걸보



(a) On the wall



(b) At the centerline

Fig. 6 Variations of apparent viscosity with respect to axial distance

기점도의 변화는 비교적 서서히 단조 증가하는데 반해, Fig. 6(b)에서 보듯이 중심축에서의 걸보기점도는 $x=1$ 근방에서 갑자기 증가한다. 식 (11)과 (12)로부터, 중심축의 경계 조건은 $\partial u/\partial r=v=0$ 이므로 걸보기점도는 $\partial u/\partial x$ 의 영향만을 받는다. Y 가 비교적 큰 값일 때 유동은 $x=1$ 근방에서 완전발달, 즉 $\partial u/\partial x \approx 0$ 이 되므로 식 (11)에 의하여 걸보기점도는 갑자기 증가하게 된다. 또한 입구 근처에서도 속도 구배가 매우 낮으므로 ($u \approx 1$) 걸보기점도가 매우 큰 것을 볼 수 있다. 이것으로부터 Y 가 증가할수록 속도 overshoot가 감소하는 것을 설명할 수 있다. Shah and London⁽¹¹⁾에 의하면 속도 overshoot는 입구의 균일 속도분포에 의해 입구부근에 존재하는 높은 역압력구배에 의해 발생한다. Bingham Plastic의 경우 입구 근처에서 걸보기점도가 매우 커지므로 점성력이 매우 커지게 된다. (Fig. 6(b)) 따라서 입구에서의 이러한 큰 점성력이 높은 역압력 구배를 감쇠시킨다. Y 가 커질수록 걸보기점도는 더욱 커지므로 속도 overshoot는 Y 에 따라 감쇠된다.

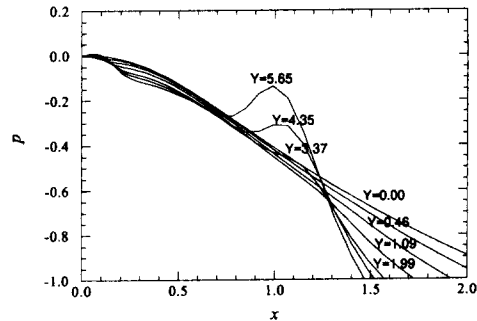


Fig. 7 Variations of centerline pressure with respect to axial distance

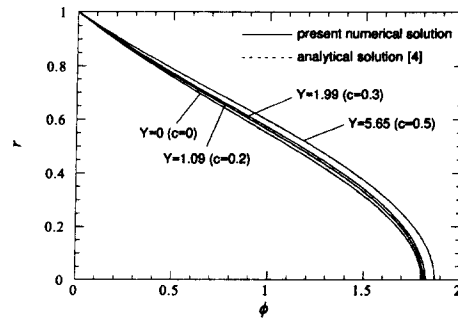


Fig. 8 Fully developed temperature profiles

Fig. 7은 Y 에 따라 중심축에서의 압력의 축방향으로의 변화를 나타낸 것이다. Y 가 0일 때 전형적인 뉴턴유체의 관내 유동에 대한 압력강하를 볼 수 있다. 압력이 대체로 선형적으로 감소하는 구간에서 Y 가 증가할수록 압력 강하가 커짐을 볼 수 있다. 흥미로운 것은 Y 가 4 이상이 되었을 때 $x=1$ 근방에서 역압력 구배가 나타나는 것인데, 이는 다음과 같이 설명될 수 있다. 중심축을 따라서 $\partial(\cdot)/\partial r = v=0$ 이므로 x 방향 운동량방정식 (9a)는 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial \eta_{eff}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \eta_{eff} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (25)$$

Fig. 6(b)에서 보듯이 Y 가 어느정도 큰 값이 되면 $\partial \eta_{eff} / \partial x$ 는 $x=1$ 부근에서 매우 커지므로 $\partial p / \partial x$ 는 양수가 된다.

4.3 속도 및 온도분포 동시 발달유동

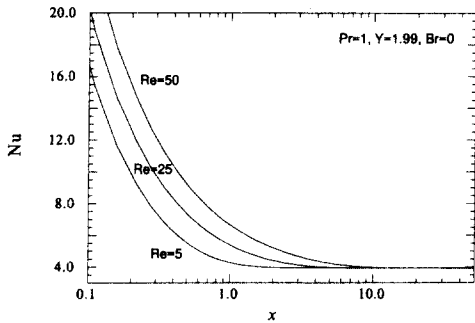
Fig. 8은 속도분포와 온도분포가 모두 완전발달

로 가정된 출구에서의 온도분포이다. 본 연구의 수치해가 민태기 등⁽⁴⁾이 구한 해석해와 잘 일치하는 것을 볼 수 있으며, 이는 본 연구에서 적용된 수치기법과 에너지방정식에 적용된 출구 경계 조건이 타당함을 보여준다.

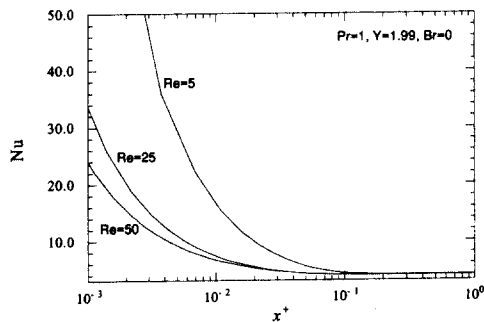
Fig. 9는 $Y=1.99, Re=5, 25, 50$ 일 때 누셀트수의 변화이다. 본 연구에서 누셀트수는 다음과 같이 정의된다.

$$Nu = -\frac{2}{\theta_m} \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=1} \quad (26)$$

이론적으로, 입구의 벽에서 온도구배는 무한대이므로 입구에서의 누셀트수가 무한대가 된다. 같은 프란틀수에 대하여 속도분포와 온도분포는 Re 가 작을수록 빨리 발달하므로, 입구영역에서 낮은 누셀트수를 나타낸다. 따라서 Fig. 9(a)에서 보듯이 입구 영역에서 Re 가 클수록 높은 누셀트수를 나타낸다. 하지만 이러한 결과는 민태기 등⁽⁴⁾의 그래프해와 배치되는 것처럼 보이는데, 그들은 페클레수



(a) With respect to dimensionless axial distance x



(b) With respect to dimensionless axial distance x^+

Fig. 9 Local Nusselt number

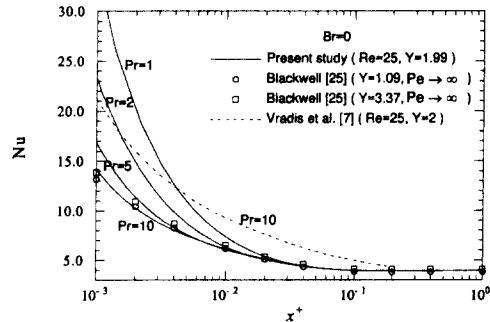


Fig. 10 Local Nusselt number with respect to axial distance for various values of Pr

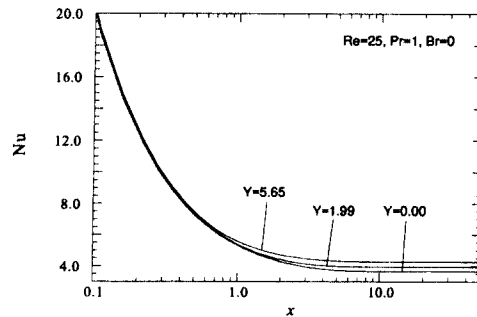


Fig. 11 Local Nusselt number with respect to axial distance for various values of Y

($Pe=2RePr$)가 작을수록 입구 영역에서 높은 누셀트수를 나타낸다고 보고 하였다. Fig. 9(a)에서 축방향 좌표는 x^+ 가 아니라 x 임에 주의하라. Fig. 9(b)에서 보듯이, 축방향 좌표를 x^+ 로 하여 나타내면 누셀트수의 곡선은 민태기 등⁽⁴⁾의 결과와 같은 경향을 나타낸다.

Fig. 10은 $Y=1.99$, $Re=25$, $Pr=1, 2, 5, 10$ 일 때 누셀트수의 변화를 $Pe \rightarrow \infty$ 일 때의 그래프 해⁽²⁵⁾와 같이 나타낸 결과이다. 뉴턴유체의 경우 프란틀수가 5보다 큰 경우 속도분포가 온도분포보다 훨씬 빨리 발달하므로 속도분포를 완전발달로 가정하는 그래프문제의 가정이 유효하다.⁽³⁾ 본 연구의 결과 빙햄 플라스틱의 경우에는 대개 프란틀수가 10 정도 되었을 때 속도분포를 완전발달로 가정할 수 있음을 볼 수 있다. Vradis et al.⁽⁷⁾의 결과와는 역시 매우 차이가 있음을 알 수 있다.

Fig. 11은 $Re=25$, $Pr=1$, $Y=0, 1.99, 5, 65$ 일 때 누셀트수의 변화이다. 민태기 등⁽⁴⁾에서의 결과와

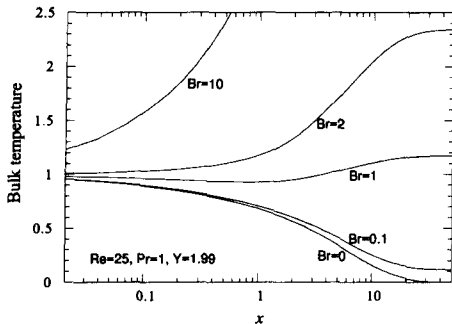


Fig. 12(a) Bulk temperature with respect to axial distance

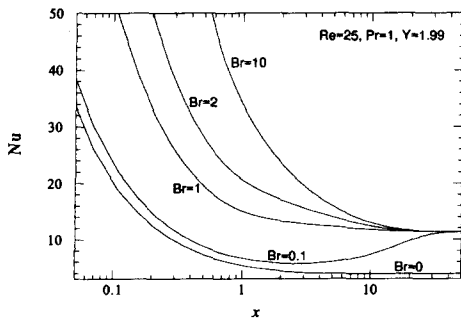


Fig. 12(b) Local Nusselt number with respect to axial distance

마찬가지로 점성소산이 무시되었을 때, 빙햄 플라스틱의 누셀트수의 변화는 항복응력에 크게 의존하지 않음을 볼 수 있다.

Fig. 12(a)와 (b)는 각각 점성소산을 고려하였을 때의 평균온도와 누셀트수의 변화이다. 수치 해석의 결과가 속도분포를 완전발달로 가정한 민태기 등⁽⁴⁾이 구한 해석해와 정성적으로 비슷함을 볼 수 있다. 특히 점성소산을 고려하지 않았을 때와는 달리, 누셀트수는 점성소산을 고려하였을 때 항복응력에 의하여 많은 변화를 보인다.

대개의 Bingham Plastic의 경우 프란틀수는 10 이상의 값을 가지므로 이상의 계산에 사용된 프란틀수에 실용성에 대해 의문이 있을 수 있다. 그러나 우주선의 연료로 개발중인 극저온 전기변성유체⁽²⁶⁾의 경우 그 조성이 액화 기체(산소나 헬륨)에 알루미늄 분말을 혼합한 것으로 이때 프란틀수는 약 1이다. 이렇듯 Bingham Plastic의 하나인 전기변성유체는 그 응용 분야에 따라 계속 조성이 개발되고 있으므로 본 연구에서는 다양한 프란틀수에 대한 계산을 수행하였다. 그리고 Figs. 11~12에서 $Pr=1$ 의 결과만 제시한 것은 $Pr=2, 5, 10$ 의 경우에도 비슷한 경향을 나타내었기 때문이다.

5. 결론

본 논문에서는 동차 선형요소를 이용한 4단계 분할법으로 원관내 빙햄 플라스틱의 층류유동에서 속도분포 발달유동과 속도 및 온도분포 동시 발달유동에 대한 수치해석적인 연구를 수행하였다. 고전적인 빙햄 플라스틱 모델에서 점도함수는 전단율이 낮은 영역에서 불연속이므로 수치적 안정성을 위해서 새로이 제안된 모델을 사용하였다.

다양한 항복응력, 프란틀수, 레이놀즈수, 브링크만수에 따른 결과들이 제시되었다. 본 수치 해석의 결과들이 몇가지 경우에 대하여 이전의 연구결과와 비교됨으로써 본 연구에 사용된 코드의 적합성이 검증되었다. 속도분포 발달유동에서, 항복응력이 클수록 완전발달에 필요한 입구 영역은 짧아짐을, 속도 overshoot는 감쇠됨을 볼 수 있었고, 항복응력이 임계값 이상이 되면 중심축에서의 축방향 압력구배가 역압력구배가 됨을 볼 수 있었다. 속도 및 온도분포 동시 발달유동에서, 수치해의 결과는 민태기 등⁽⁴⁾ 예측한 해석해의 결과와 정성적으로 비슷한 경향을 보였다.

후 기

이 연구는 국방과학연구소와 교육부의 후원으로 수행되었으며 관계자 여러분께 감사사를 드립니다.

참고문헌

- (1) Shah, R. K. and London, A. L., 1978, Laminar Flow Forced Convection in Ducts, *Advances in Heat Transfer* suppl. 1, Academic Press, New York.
- (2) Kakac, S., Shah, R. K. and Aung, W., 1987, *Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer*, John Wiley, New York.
- (3) Kays, W. M. and Crawford, M. E., 1993, *Convective Heat and Mass Transfer*, (3rd Edn), McGraw-Hill, New York.
- (4) 민태기, 유정열, 최해천, 1996, "원관내 빙헴 플라스틱의 층류대류 열전달 (I) - 해석적인 연구 - 완전발달유동과 온도분포 발달유동 (확장된 그라츠 문제)," 대한기계학회 논문집, submitted.
- (5) Chen, S. S., Fan L. T. and Hwang, C. L., 1970, "Entrance Region Flow of the Bingham Fluid in a Circular Pipe," *AIChE J.*, Vol. 16, pp. 293~299.
- (6) McDonald, J. W., Denny, V. E. and Mills, A. F., 1972, "Numerical Solutions of the Navier-Stokes Equations," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 94, pp. 873~878.
- (7) Vradis, G. C., Dougher J. and Kumar, S., 1993, "Entrance Pipe Flow and Heat Transfer for a Bingham Plastic," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 543~552.
- (8) Choi, H. G., Choi, H. and Yoo, J. Y., "A Fractional Four-step Finite Element Formulation of the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations Using SUPG and Linear Equal Order Element Methods," to appear in *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*
- (9) Bird, R. B., Stewart, W. E. and Lightfoot, E. N., 1960, *Transport Phenomena*, John Wiley, New York.
- (10) Bird, R. B., Curtiss, C. F., Armstrong, R. C. and Hassager, O., 1987, *Dynamics of Polymeric Liquids*, John Wiley, New York.
- (11) Darby, R., 1976, *Viscoelastic Fluid*, Dekker, New York.
- (12) Beverly, C. R. and Tanner, R. I., 1992, "Numerical Analysis of Three-Dimensional Bingham Plastic Flow," *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 42, pp. 85~115.
- (13) Ellwood, K. R. J., Georgiou, G. C., Papanastasiou, T. C. and Wilkes, J. O., 1990, "Laminar Jets of Bingham-Plastic Liquids," *J. Rheology*, Vol. 34, pp. 787~812.
- (14) Papanastasiou, T. C., 1987, "Flow Materials with Yield," *J. Rheology*, Vol. 31, pp. 385~404.
- (15) Choi, H. and Moin, P., 1994, "Effects of the Computational Time Step on Numerical Solutions of Turbulent Flow," *J. Comp. Phys.*, Vol. 113, pp. 1~4.
- (16) Donea, J., Giuliani, S., Laval, H. and Quarta-pelle, L., 1982, "Finite Element Solution of the Unsteady Navier-Stokes Equation by a Fractional Step Method," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 30, pp. 53~73.
- (17) Ramaswamy, B., 1988, "Finite Element Solution for Advection and Natural Convection Flow," *Comput. Fluids.*, Vol. 16, pp. 349~388.
- (18) Ramaswamy, B. and Jue, T. C., 1992, "Some Recent Trends and Developments in Finite Element Analysis for Incompressible Thermal Flow," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 35, pp. 671~707.
- (19) Kawahara, M. and Ohmiya, K., 1985, "Finite Element Analysis of Density Flow Using the Velocity Correction Method," *Int. J. Numer. Methods Fluids.*, Vol. 5, pp. 981~993.
- (20) Zienkiewicz, O. C. and Wu, J., 1991, "Incompressibility Without Tears - How to Avoid Restrictions of Mixed Formulation," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 32, pp. 1189~1203.
- (21) Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R., 1982, "Streamline Upwind Petrov-Galerkin Formulation for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations," *Comput. Methods Appl.*

- Mech. Engrg.*, Vol. 32, pp. 199~259.
- (22) Carey, G. F. and Oden, J. T., 1986, *Finite Elements: Fluid Mechanics*, Vol. 6, pp 168~170, Prentice-Hall, New Jersey.
- (23) Wang, Y. L. and Longwell, P. A., 1964, "Laminar Flow in the Inlet Section of Parallel Plates," *AIChE J.*, Vol. 10, pp. 323~329.
- (24) Benim, A. C. and Zinser, W., 1986, "A Segregated Formulation of Navier-Stokes Equations with Finite Elements," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 57, pp. 223~237.
- (25) Blackwell, B. F., 1985, "Numerical Solution of the Graetz Problem for a Bingham Plastic in Laminar Tube Flow with Constant Wall Temperature," *J. Heat Transfer*, Vol. 107, pp. 466~468.
- (26) Zitter, R. N., Zhang, X, Chen, T. J. and Tao, R., 1993, "Cryogenic Electrorheological Fluids," *Proceedings of the Fourth International Conference on Electrorheological Fluids*, pp 37~42.