

〈논 문〉

회전요동하는 원통내의 유동특성 — 이론적 해석

서용권* · 김현민**

(1996년 5월 8일 접수)

Fluid Flow in a Circular Cylinder Subject to Circulatory Oscillation — Theoretical Analysis

Yong Kweon Suh and Hyeun Mihn Kim

Key Words : Circular Cylinder(원 주), Circulatory Oscillation(회 전 요 동), Boundary-Layer Flow(경계층 유동), Inviscid Flow(비점성 유동), Stokes' Drift Velocity, Standing Wave(정지파), Progressive Wave(진행파)

Abstract

A fluid flow inside a circular cylinder subject to horizontal and circular oscillation is analyzed theoretically. Under the assumption of small-amplitude oscillation, the governing equations take linear forms. The velocity field is obtained in terms of the first kind of Bessel function of order 1. It was found that a particle describes an orbit close to a circle in the central region and an arc near the side wall. We also obtained the Stokes' drift velocity induced by the traveling wave along the circumferential direction. The Eulerian streaming velocities at the edge of the bottom and side boundary layers were also obtained. It was shown that the vertical component of the steady streaming velocity on the side wall is almost proportional to the amplitude of the free surface motion.

1. 서 론

생체의 초기단계에 속하는 미생물을 자연적인 순리에 따라 성장시킬 때 나타나는 많은 자연적인 장애요소들을 극복하기 위해 인간은 지난 몇 십년간 시험관내에서 이것을 성장 발육시키는 기술을 개발해 왔다. 생체기술(biotechnology)이라 불리우고 있는 이 기술은 많은 단계에 걸쳐 복잡하고 까다로운 세부기술을 요하며 장기간이 소요되는 등의 문제로 부가가치가 높은 첨단기술로 인식되고 있다.

생체기술의 대상이 되는 종(種)의 수는 많지만 그 배양의 초기단계에서 비커를 사용하여 증식시킴

은 공통적이다. 즉, 미생물의 조직과 배양액(이하 혼합액이라 함)을 비커 또는 삼각 플라스크에 얇게 채우고(얇게 채우는 것은 상부의 공기와의 접촉을 상대적으로 크게 하여 미생물의 산소섭취를 도와주기 위함임), 외부의 균에 의한 오염을 막기 위해 비커의 상부를 밀봉시킨다. 이것을 그대로 두면 생체끼리 뭉쳐서 영양공급이 잘 되지 않고 따라서 성장 및 분화를 기대할 수 없다. 세포가 분화하고 성장하기 위해서는 주위의 영양과 산소를 계속 섭취할 필요가 있는데, 이는 비커내의 액체가 연속적으로 잘 혼합될 때 가능한 것이다. 한편, 일반적으로, 혼합효과가 탁월한 유체유동(난류 등)은 심한 전단변형을 동반한다. 그런데 불행하게도 미생물의 초기 조직은 전단력에 매우 약하여 쉽게 파괴된다. 따라서 전단변형을 크게 일으키지 않으면서 교반효

*회원, 동아대학교 기계공학과

**회원, 한국중공업 터빈설계실

과가 좋은 유동을 일으키는 것이 생체기술에서는 매우 중요하며, 회전요동하는 테이블에 의한 비커 내의 교반(Fig. 1 참조)은 이러한 조건을 만족시키는 것으로 인식되고 있어 현재 배양의 초기단계에서 가장 널리 애용되고 있는 교반의 방법이다. 미생물의 성질과 이에 따른 생체반응기의 요건에 대한 일반적 설명은 Mantell & Smith⁽¹⁾와 Bu-lock & Kristiansen⁽²⁾의 교과서, Denchev, Kuklin & Scragg⁽³⁾의 해설논문에서 나타나 있다.

그러나, 이러한 범용적 가치성에도 불구하고 회전요동하는 원통 내의 유체유동에 대한 근본적 기초연구(유체유동 또는 교반의 입장에서 수행한 기초연구)는 전부(全無)하다. 다만, 최근에 Gardner & Tatterson⁽⁴⁾이 두 가지 유체(corn syrup 과 물)에 대해 표면에 염료를 띄워 그것이 확산되는 모양으로부터 혼합효과를 (극히 피상적으로) 분석한 것이 유일하다. 본 연구는 이러한 관점에서 주어진 유동모형을 유체역학적 입장에서 심층적으로 분석하고자 하는 것이다.

본 연구의 결과는 2부로 나누어서 제시되며, 제1보에 해당하는 본 논문에서는 내부의 비정상 유동, 하면 및 측면 경계층에서의 비정상 및 정상 유동, 그리고 스톱스 드리프트속도(Stokes' drift velocity)를 해석적으로 구한 것이다. 이 결과는 제2보에서 내부의 정상유동을 수치해석으로 구할 때 사용된다.

2. 문제의 수식화

Fig. 1과 같이, 액체를 깊이 H 만큼 담은 반경 R 의 원통이 수평 테이블 위에 놓여져 있고, 테이블이 각속도 ω 로 수평 회전요동운동하는 경우를 생각해 보자. 테이블은 그 방향을 유지하면서 반경

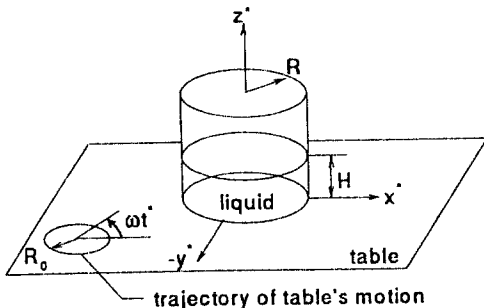


Fig. 1 A circular cylinder on a shaker table subject to horizontal oscillation.

R_0 의 원운동을 한다. 다르게 표현하면, 테이블 상의 모든 점이 동일한 위상으로 같은 크기의 원운동을 한다.

문제의 성격상 수식화를 위한 좌표계는 원통하면의 중심점을 원점으로 하는 원통좌표계 (r^*, θ, z^*) 를 쓰는 것이 바람직하다. 그러면, 원통내의 액체는 모든 지점에서 $\theta = \omega t^*$ 의 방향으로 단위질량 당 $R_0\omega^2$ 의 체적력을 받는다. 여기서, t^* 는 시간을 나타낸다. 원통내의 액체는 자유표면을 가지므로 이 체적력을 받아 액면의 변동을 보이게 되고, 이에 따라 내부의 유체는 요동운동을 할 것이다.

시간 t^* 를 $1/\omega$ 로, 좌표 r^* 과 z^* 를 R 로, 유속을 $R_0\omega$ 로, 액면의 높이를 $\eta^* = H + R_0\eta$ 로, 그리고 압력을 $p^* = \rho g(H - z^*) + (\rho R R_0 \omega^2) p$ 와 같이 무차원화한다면, 지배방정식은 다음과 같이 된다(ρ 는 액체의 밀도, g 는 중력가속도이다).

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon f_u = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left[\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] + \cos(\theta - t) \quad (2a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \epsilon f_v = -\frac{\partial p}{r \partial \theta} + \frac{1}{Re} \left[\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] - \sin(\theta - t) \quad (2b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \epsilon f_w = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} [\nabla^2 w] \quad (2c)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \epsilon f_\eta = w \quad \text{at } z = h + \epsilon \eta \quad (3)$$

여기서, f_u, f_v, f_w 및 f_η 는 비선형항을 모은 것으로서,

$$f_u = u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \quad (4a)$$

$$f_v = u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} \quad (4b)$$

$$f_w = u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4c)$$

$$f_\eta = u \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \quad (4d)$$

이다. u, v 및 w 는 각각 r, θ 및 z 방향의 무차원 유속을 나타내고, ∇^2 은 3차원 라플라스(Laplace) 연산자이며, 요동운동의 무차원 진폭 ϵ , 무차원 평균수심 h , 및 레이놀즈수 Re 는 각각 다음과 같이 정의되었다.

$$\epsilon = \frac{R_0}{R}, \quad h = \frac{H}{R}, \quad Re = \frac{R^2 \omega}{\nu} \quad (5)$$

여기서, ν 는 액체의 동점성계수이다.

무차원화된 경계조건은 다음과 같다.

$$u=v=w=0 \text{ at } z=0 \text{ and } r=1 \quad (6a)$$

$$p=\beta\eta \text{ at } z=h+\varepsilon\eta \quad (6b)$$

$$\tau=0 \text{ at } z=h+\varepsilon\eta \quad (6c)$$

여기서, τ 는 전단응력이며 β 는 아래와 같이 정의된 것이다.

$$\beta = \frac{g}{R\omega^2} \quad (7)$$

본 문제는 기하학적으로 축대칭이다. 그리고, 유동을 유발하는 외력항의 작용방향이 반시계 방향으로 각속도 1의 빠르기로 회전한다. 따라서, 유동장은 외력항과 같이 회전하는 좌표계상에서 관찰한다면 정상유동이 될 수 있음을 알 수 있다. 즉, 시간 t 는 $\theta-t$ 의 형태로 해를 구성할 것임을 알 수 있다. 앞으로 편의상 $\Theta = \theta-t$ 으로 정의된 변수 Θ 를 사용하도록 한다.

3. 이론해석

풀어야 할 식은 연속방정식 (1), 운동량 방정식 (2a)~(2c), 및 액면의 방정식 (3)이며, 경계조건은 (6a)~(6c)이다. 만약 데이블의 무차원 진폭 ε 이 충분히 작다면, 이들 식은 근사적으로 선형화된다. 나아가, 레이놀즈 수 Re 가 충분히 크다면, 점성효과는 벽면과 자유표면 가까이의 매우 얇은 층에 국한되므로 대부분의 유동영역은 거의 비점성인 것으로 간주할 수 있을 것이다. 즉,

$$\varepsilon \ll 1, Re \gg 1 \quad (8)$$

의 조건하에서, 문제는 원통내에 미소변위의 자유표면 운동을 가지는 중력과 무게로 되어 해석해가 가능하다.

원래의 좌표계 (r, θ, z, t) 상에서 생각한다면, 자유표면의 존재와 외력의 작용은 유동장내의 모든 지점에서 유체입자가 시간에 대하여 요동운동하도록 할 것이다. 이 요동운동은 소위 스톡스의 표류운동(Stokes's drift motion; 즉, 라그랑지적 관점에서 나타나는 운동)을 초래할 수 있다.⁽⁵⁾ 한편, 벽면 근처에서는 이 요동운동과 점성효과로 인하여 오일러의 스트리밍 운동(Eulerian streaming motion)이 발생하고, 이것이 앞의 스톡스의 표류운동과 합쳐서 공간내에 정상적인 유동장을 형성할

수 있다.

이러한 문제의 해석적 해를 구하는 과정은 간단하지가 않다. 그것은, 이 문제와 관련된 파라미터가 2개(ε, Re)이며, 따라서 변수들은 2중으로 전개되어야 할 뿐더러, 파라미터 Re 에 대해서는 특이섭동(singular perturbation)의 성격을 가지므로 유동장이 비점성 영역과 점성 영역으로 분리되기 때문이다. 더구나, 앞의 표류 및 스트리밍 운동으로 인하여 종속변수는 시간종속적인 성분(비정상 성분)과 시간독립적인 성분(정상 성분)으로 나누어지기 때문이다. 몇차례에 걸친 시행착오의 결과, 가장 우선적으로 종속변수 $\phi(r, \Theta, z)$ 를 아래와 같이 정상 성분 $\bar{\phi}(r, z)$ 와 비정상 성분 $\tilde{\phi}(r, \Theta, z)$ 으로 나누는 일이 중요함을 알 수 있었다:

$$\phi(r, \Theta, z) = \bar{\phi}(r, z) + \tilde{\phi}(r, \Theta, z) \quad (9)$$

여기서, ϕ 는 5개의 종속 변수 u, v, w, p 및 η 를 나타내고, $\bar{\phi}$ 는 다음의 식으로 구한다.

$$\bar{\phi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi d\Theta \quad (10)$$

다음, 섭동 파라미터 ε 에 대하여 모든 변수들을 아래와 같이 전개한다.

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= \bar{\phi}_0 + \varepsilon \bar{\phi}_1 + \varepsilon^2 \bar{\phi}_2 + \dots \\ \tilde{\phi} &= \tilde{\phi}_0 + \varepsilon \tilde{\phi}_1 + \varepsilon^2 \tilde{\phi}_2 + \dots \end{aligned}$$

이것들을 지배방정식 및 경계조건들에 대입하고 ε 의 차수별로 식을 얻은 뒤 각각의 해를 구하면 되는 것이다. 단, 이 과정에서 두 변수 ϕ_1 와 ϕ_2 의 곱 $\phi_1\phi_2$ 의 정상 및 비정상 성분은

$$\overline{\phi_1\phi_2} = \bar{\phi}_1\bar{\phi}_2 + \overline{\{\tilde{\phi}_1\tilde{\phi}_2\}} \quad (11a)$$

$$\widetilde{\phi_1\phi_2} = \tilde{\phi}_1\tilde{\phi}_2 + \tilde{\phi}_1\bar{\phi}_2 + \{\tilde{\phi}_1\tilde{\phi}_2\} \quad (11b)$$

으로 구해야 함에 주의해야 한다.

본 연구의 목적상, 정상 성분과 비정상 성분의 선두 오더항(leading order term)만이 중요하므로, 이것들만 구하기로 한다. 이하에서, 해는 정상 성분과 비정상 성분으로 나누어서 차례대로 구하도록 한다.

3.1 비정상 유동

ε 에 대한 선두 오더의 지배식(즉, $\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{w}_0, \bar{p}_0$ 및 $\bar{\eta}_0$ 의 식)은 식 (1), (2a)~(2c) 및 (3)에서 ε 이 곱해진 항들을 모두 없앤 것과 같고, 따라서 선형화된 형태를 취한다. 한편, 식 (3)에서 자유표

면에서의 조건은 $z=h$ 에서 산정하는 것으로 대체된다.

3.1.1 내부 유동

충분히 큰 Re 에 대해 유동장의 점성효과는 벽면 및 자유표면 근처의 얇은 경계층에 국한된다고 볼 수 있고, 따라서 대부분의 영역에서 지배방정식은 $1/Re$ 이 곱해진 점성항들을 무시할 수 있다.

체적력이 보존적(conservative)이고, 또한 비점성 유동을 대상으로 하므로 속도장은 속도 포텐셜로 나타낼 수 있다. 즉, 속도 포텐셜을 ϕ 라 할 때 \tilde{u}_0 , \tilde{v}_0 , 및 \tilde{w}_0 는 $\tilde{u}_0 = \partial\phi/\partial r$, $\tilde{v}_0 = \partial\phi/r\partial\theta$, $\tilde{w}_0 = \partial\phi/\partial z$ 의 식으로 구하며, ϕ 는 라플라스방정식 $\nabla^2\phi=0$ 을 만족시켜야 한다. 운동량 방정식의 외력항으로 인하여 ϕ 는 무한수열의 형태를 취해야 한다.

식 (34)의 해로서 속도 경계조건을 만족하는 ϕ 는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cosh k_n z J_1(k_n r)] \sin\theta \quad (12)$$

여기서, J_1 은 제1종 제1계 베셀(Bessel)함수이고, k_n 은 $J_1'(k_n)=0$ 을 만족하는 값들이다. 여기서, '은 괄호내의 변수 전체에 대한 미분을 의미한다. 그리고, 계수 a_n 은 다음과 같다.

$$a_n = \frac{2}{(k_n^2 - 1) J_1(k_n) (\beta k_n \sinh k_n h - \cosh k_n h)} \quad (13)$$

이것은 함수 r 의 베셀-푸리에 급수 전개식⁽⁶⁾인

$$\begin{aligned} r &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n J_2(k_n) J_1(k_n r)}{(r_n^2 - 1) J_1^2(k_n) + k_n^2 J_1'^2(k_n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(k_n r)}{(k_n^2 - 1) J_1(k_n)} \end{aligned} \quad (14)$$

으로부터 유도된 것이다.

해 (12)를 사용하여 구한 속도성분, 액면의 높이, 및 압력은 다음과 같다.

$$\tilde{u}_0 = B_{ou}(r, z) \sin\theta ; B_{ou} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n k_n \cosh k_n z J_1'(k_n r) \quad (15a)$$

$$\tilde{v}_0 = B_{ov}(r, z) \cos\theta ; B_{ov} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cosh k_n z \frac{J_1(k_n r)}{r} \quad (15b)$$

$$\tilde{w}_0 = B_{ow}(r, z) \sin\theta ; B_{ow} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n k_n \sinh k_n z J_1(k_n r) \quad (15c)$$

$$\tilde{p}_0 = B_{op}(r, z) \cos\theta ; B_{op} = r + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cosh k_n z J_1(k_n r) \quad (15d)$$

$$\tilde{\eta}_0 = B_{o\eta}(r) \cos\theta ; B_{o\eta} = \frac{1}{\beta} B_{op}(r, h) \quad (15e)$$

계수 a_n 의 분모가 0이 되는 조건은 공진조건에 해당한다. 그것은, $\beta c = 1/[k_n \tanh k_n h]$ 이 되는 경우인데, 각속도와 주기로 나타내면 다음과 같다.

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{R} k_n \tanh k_n h}, \quad T_c = 2\pi \sqrt{\frac{R/g}{k_n \tanh k_n h}}$$

여기서 T 는 주기로서 $T=2\pi/\omega$ 의 관계를 가진다. 예를 들면, $R=0.0435$ [m], $H=0.02$ [m]의 경우에, $T_c=0.3716$ [s] (fundamental), 0.1826 [s] (second harmonic)이고, 같은 R 에서 $H=0.04$ [m]의 경우에는 0.3192 [s] (fundamental), 0.1813 [s] (second harmonic) 정도이다.

속도장 (15a)~(15c)를 보면, \tilde{u}_0 와 \tilde{w}_0 는 같은 위상을, 그리고 이들과 \tilde{v}_0 는 90° 의 위상차를 가짐을 알 수 있다. 즉, 유체입자의 운동은 축단면상에서는 정지파(standing wave)의 성질을, 원주단면(즉, 'r=일정'의 단면)상에서는 진행파(progressive wave)의 성질을 지닌다.

3.1.2 경계층 유동

본 유동장에 형성되는 경계층은 하면 근처, 측면 근처 및 자유표면 근처이다. 그러나, 여기서는, 하면 근처 및 측면 근처의 경계층 해만을 구하기로 한다. 이것은 Re_s (스트리밍 레이놀즈수)가 충분히 크면, 자유표면 근처의 경계층 효과는 무시할 수 있기 때문이다.⁽⁷⁾

(i) 하면경계층

하면 근처 경계층내에서 점성효과를 고려하기 위해 변수 z 와 \tilde{w}_0 를 다음과 같이 변환한다: $z = \sqrt{2/Re} Z$, $\tilde{w}_0 = \sqrt{2/Re} \tilde{W}_0$. 그러면, 지배식은 아래와 같이 정리된다.

$$\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial r} + \frac{\tilde{u}_0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{W}_0}{\partial Z} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial Z^2} = \frac{\partial \tilde{u}_{0b}}{\partial \theta} \quad (17a)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial Z^2} = \frac{\partial \tilde{v}_{0b}}{\partial \theta} \quad (17b)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial Z} = 0 \quad (17c)$$

식 (17a) 및 (17b)의 우변에 나타난 \tilde{u}_{0b} 및 \tilde{v}_{0b} 는 각각 식 (15a)와 (15b)에서 제시한 비점성해 \tilde{u}_0 및 \tilde{v}_0 를 $z=0$ 에서 산정한 함수이다; 이렇게 할 수 있는 것은, 경계층내에서는 압력 \tilde{p}_0 가 Z -방향으로 불변이라는 식 (17c)의 결과이다.

식 (17a)와 (17b)를 보면, \tilde{u}_0 와 \tilde{v}_0 는 서로 독립적으로 구해짐을 알 수 있다. \tilde{u}_{0b} 를 $\tilde{u}_{0b} = \text{Im}[B_{0u}(r, 0)\exp(i\theta)]$ 으로 두고, \tilde{u}_0 를 $\tilde{u}_0 = \text{Im}[A(Z)B_{0u}(r, 0)\exp(i\theta)]$ 의 형태로 두어 해를 구하는 것이 편리하다. 여기서, Im 은 허수부분을 취한다는 의미이다. 이것을 (17a)에 대입하고 바닥에서 노슬립(no-slip) 조건, $Z \rightarrow \infty$ 에서 비점성해에 접근한다는 조건을 만족하는 해를 구하면 된다. 같은 요령으로 \tilde{v}_0 도 구할 수 있으며, 그 결과는 다음과 같다.

$$\tilde{u}_0 = A_{0u}(r) [\sin\theta - \exp(-Z)\sin(Z+\theta)];$$

$$A_{0u} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n k_n J_1'(k_n r) \quad (18a)$$

$$\tilde{v}_0 = A_{0v}(r) [\cos\theta - \exp(-Z)\cos(Z+\theta)];$$

$$A_{0v} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{J_1(k_n r)}{r} \quad (18b)$$

$$\tilde{w}_0 = A_{0w}(r) \left\{ Z \sin\theta - \frac{1}{2} [\cos\theta + \sin\theta] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \exp(-Z) [\cos(Z+\theta) + \sin(Z+\theta)] \right\}; A_{0w} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n k_n^2 J_1(k_n r) \quad (18c)$$

식 (18c)의 \tilde{w}_0 는 (18a)와 (18b)의 \tilde{u}_0 및 \tilde{v}_0 를 (16)에 대입하여 구한 결과이다.

(ii) 측면 경계층

측면 근처의 경계층에서는 r 과 \tilde{u}_0 를 다음과 같이 변환한다: $r = 1 - \sqrt{2/Re} X$, $\tilde{u}_0 = \sqrt{2/Re} \tilde{U}_0$. 앞과 같은 요령으로 해를 구한 결과는 다음과 같다.

$$\tilde{U}_0 = C_{0u}(z) \left\{ X \sin\theta - \frac{1}{2} (\sin\theta + \cos\theta) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \exp(-X) [\sin(X+\theta) + \cos(X+\theta)] \right\};$$

$$C_{0u} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (k_n^2 - 1) J_1(k_n) \cosh k_n z \quad (19a)$$

$$\tilde{V}_0 = C_{0v}(z) [\cos\theta - \exp(-X)\cos(X+\theta)];$$

$$C_{0v} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_1(k_n) \cosh k_n z \quad (19b)$$

$$\tilde{W}_0 = C_{0w}(z) [\sin\theta - \exp(-X)\sin(X+\theta)];$$

$$C_{0w} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n k_n J_1(k_n) \sinh k_n z \quad (19c)$$

3.2 정상 유동

정상유동은 ε 에 대한 1차항에서부터 시작된다. 즉, 정상유동의 선두 오더 지배식은 \bar{u}_1 , \bar{v}_1 , \bar{w}_1 및 \bar{p}_1 을 종속변수로 하며, 비선형항의 정상성분 \bar{f}_{0u} , \bar{f}_{0v} 및 \bar{f}_{0w} 에 의해 구동된다.

3.2.1 내부 유동

내부 유동의 해는 정상유동의 지배식에서 점성항을 제거한 식으로부터 구한다. 비점성 영역의 선두 오더의 해가 포텐셜로 나타내어진다는 것을 이용하면, f_{0u} , f_{0v} 및 f_{0w} 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_{0u} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{u}_0^2 + \tilde{v}_0^2 + \tilde{w}_0^2) \quad (20a)$$

$$f_{0v} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{r \partial \theta} (\tilde{u}_0^2 + \tilde{v}_0^2 + \tilde{w}_0^2) \quad (20b)$$

$$f_{0w} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{u}_0^2 + \tilde{v}_0^2 + \tilde{w}_0^2) \quad (20c)$$

식 (15a)~(15c)로 나타낸 \tilde{u}_0 , \tilde{v}_0 , 및 \tilde{w}_0 의 해를 이 식들에 대입하고 그 정상성분을 구한 뒤에 결과를 지배식에 대입하여 압력과 액면의 높이를 구하면 다음과 같다.

$$\bar{p}_1 = -\frac{1}{4} (B_{0u}^2 + B_{0v}^2 + B_{0w}^2)$$

$$\bar{\eta}_1 = -\frac{1}{4\beta\varepsilon} (B_{0u}^2 + B_{0v}^2 + B_{0w}^2)_h \quad (21)$$

여기서, 하첨자 h 는 $z=h$ 에서 산정한다는 의미를 갖고 있다.

이 결과에 따르면, 내부유동 영역의 정상 지배방정식은 압력과 액면의 높이만 결정해 준다. 속도장은 경계층 영역의 해와 스톡스의 표류속도로부터 구할 수 있으며, 이는 제2보에서 다룬다.

3.2.2 경계층 유동

(i) 하면경계층

하면 근처의 경계층에서는 z 와 \tilde{w}_1 를 다음과 같이 변환한다: $z = \sqrt{2/Re} Z$, $\tilde{w}_1 = \sqrt{2/Re} \bar{W}_1$. 그러면, 정상유동의 지배식은 아래와 같이 근사화된다.

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r} + \frac{\bar{u}_1}{r} + \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial Z} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial Z^2} = \left[\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial r} \right]_b + \bar{f}_{0v} \quad (23a)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial Z^2} = \bar{f}_{0v} \quad (23b)$$

식 (23a)에서 $[\partial \bar{p}_1 / \partial r]_b$ 는 식 (21)의 미분을 $z=0$ 에서 산정한 것이고, 식 (23a)와 (23b)의 \bar{f}_{0u} 와 \bar{f}_{0v} 는 식 (18a)~(18c)의 속도장을 식 (4a)와 (4b)에 대입하여 구한 것이다. 여기서, 경계층내에서는 유동장이 비점성이 아니므로 내부유동의 경우와 달리 \bar{f}_{0v} 는 0이 되지 않는다. 식 (23a)와 (23b)로부터 \bar{u}_1 과 \bar{v}_1 을 구할 수 있으며, 그 결과를 식 (22)에 대입하면 \bar{w}_1 을 구할 수 있다 (결과식의 제시는 생략). 이들로부터 $Z=0$ 에서의 속도 구배 및 $Z \rightarrow \infty$ 에서의 속도를 구한 결과는 다음과 같다.

$$\left[\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial Z} \right]_0 = -\frac{1}{2r} (A_{0u} - A_{0v})^2 - \frac{1}{2} A_{0u} A_{0w}$$

$$\left[\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial Z} \right]_0 = \frac{1}{2} A_{0v} A_{0w} \quad (24)$$

$$\bar{u}_{1\infty} = \frac{1}{4r} (A_{0u} - A_{0v})^2 + \frac{3}{4} A_{0u} A_{0w}$$

$$\bar{v}_{1\infty} = \frac{3}{4} A_{0v} A_{0w} \quad (25)$$

(ii) 측면경계층

측면 근처의 경계층에서는 r 과 \bar{u}_1 을 다음과 같이 변환한다: $r=1-\sqrt{2/Re}X$, $\bar{u}_1=\sqrt{2/Re}\bar{U}_1$. 하면경계층의 경우와 유사한 과정을 거쳐 해를 구할 수 있으며, 이로부터 $X \rightarrow \infty$ 에서의 \bar{w}_1 을 구한 결과는 다음과 같다.

$$\bar{w}_{1\infty} = -\frac{1}{4} (C_{0w} C_{0w}' + C_{0v} C_{0w})$$

$$-\frac{1}{2} C_{0u} C_{0w} \quad (26)$$

3.2.3 스톡스 표류속도

이것은 선두 오더의 속도장 \bar{u}_0 , \bar{v}_0 , 및 \bar{w}_0 이 시간주기적임에 따라 유체입자가 조금씩 이동하는 효과를 속도로 나타낸 것으로서, 유체 동역학적인 (fluid dynamical) 성질에서 생기는 것이 아니고 순전히 운동론적인 (kinematical) 결과이다. Stokes가 자유표면을 가진 중력파의 속도장에서 이 효과를 분석한 바 있고, Longuet-Higgins⁽⁶⁾가 이에 덧붙여 오일러의 스트리밍 속도장이 같은 오더 (order)의 효과를 가짐을 보여 준 바 있다.

좌표계 (r, θ, z) 상에서 유체입자의 궤적은 dr/dt

$=\epsilon u$, $r d\theta/dt = \epsilon v$ 및 $dz/dt = \epsilon w$ 에 의해 결정된다. 그러나, 오일러 속도장 u , v , 및 w 에는 시간 t 가 내재해 있을뿐만 아니라, t 의 함수로 인식되는 r , θ , 및 z 도 포함하고 있다. 따라서, 이들 궤적 방정식을 직접 해석적으로 적분한다는 것은 불가능하다. 그러나, 작은 파라미터 ϵ 에 대해 섭동의 방법을 사용한다면 가능할 수도 있다. 본 연구에서는 가장 큰 오더의 스톡스 표류속도를 얻는 것이 목적이므로 섭동의 방법으로 해를 구하였다. 자세한 과정은 서⁽⁶⁾의 보고서에 수록되어 있고, 여기서는 그 결과만 제시하기로 한다:

$$\bar{u}_1 = \bar{w}_1 = 0 \quad (27a)$$

$$\bar{v}_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial B_{0v}}{\partial r} - \frac{B_{0v}}{r} \right) B_{0u} + \frac{B_{0v}^2}{2r} \quad (27b)$$

스톡스 표류속도에 관한 연구는 지금까지 파동문제에 대해 많이 수행되어 왔는데, 그 연구결과에 따르면, 정지파에서는 이 속도가 발생되지 않고 진행파에서만 발생된다는 것이 일반적으로 알려져 있는 사항이다.^(5,7,9-16) 본 유동모델이 축단면 상에서는 정지파의 양상을 띠고 원주단면 상에서는 진행파의 양상을 보이므로, 위에서 구한 스톡스 표류속도는 종래의 연구결과와 일치한다고 볼 수 있다.

4. 결과 및 분석

4.1 주기적 유동장과 입자의 주기적 운동궤적

가장 지배적인 유체운동은 식 (15a)~(15c)의 \bar{u}_0 , \bar{v}_0 , 및 \bar{w}_0 속도장에 의한 운동이다. Fig. 2는 아래 조건에서 $t=0$ 때 $z=1$ 에서의 Φ 및 \bar{y}_0 의 레벨라인 (level line)을 그린 것이다.

$$R=0.0435[\text{m}], H=0.02[\text{m}]$$

$$\rho=1000[\text{kg/m}^3], \nu=10^{-6}[\text{m}^2/\text{s}] \quad (28)$$

성분 \bar{u}_0 , \bar{v}_0 으로 이루어지는 속도벡터는 Φ -레벨라인에 수직이고, 이 분포는 t 의 증가에 따라 반시계 방향으로 회전하는 양상을 보인다. Fig. 2(a)는 $T=1[\text{s}]$ 의 결과이며, Fig. 2(b)는 $T=0.4[\text{s}]$ 의 결과이다. 후자의 경우는 조건 (28) 때의 기초 (fundamental) 공진주기인 $T_c=0.3716[\text{s}]$ 에 가까운 조건이다. 주기 T 가 커지면, 식 (7)에서 알 수 있는 바와 같이 β 의 값이 커지고, 이에 따라 계수 a_n 이 작아지며 (식 (13)), 나아가 식 (15d) 및 (15e)로부터 $B_{0n} \cong r/\beta$ 임을 즉

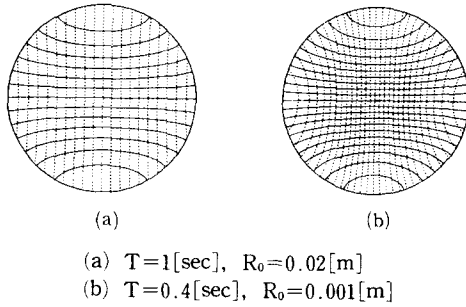


Fig. 2 Levels of the dimensionless velocity potential ϕ (—) at $z=1$ and the dimensionless free surface height η (---) at $t=0$ for $H=0.02$ [m].

$$\bar{\eta} \cong r \cos(\theta - t) \quad (29)$$

으로 됨을 알 수 있다. $t=0$ 때, 이것은 x 에 해당하며, 이로부터 Fig. 2(a)에서 $\bar{\eta}_0$ 의 레벨이 y 축에 평행한 직선이 되는 이유를 이해할 수 있다.

한편, 기초 공진주기에 가까워지면, 계수 a_1 이 지배적이고 그 외의 a_n 은 무시할 수 있다. 그리고, 이 값이 증가함에 따라 식 (15d) 및 (15e)로부터 알 수 있는 바와 같이 $\bar{\eta}_0$ 를 구성하는 식 중에서 항 r 은 무시할 수 있게 된다. 그러면, 식 (12)와 (15e)의 비교에 의해

$$\Phi \cos(\theta - t) \cong \beta \bar{\eta}_0 \sin(\theta - t) \quad (30)$$

을 유도할 수 있다. 이는 Φ 와 $\bar{\eta}_0$ 는 90° 의 위상차를 가짐을 뜻한다(Fig. 2(b) 참조).

유체입자의 주기적 운동궤적을 섭동법에 의해 구한 선두 오더만 구한 결과는 다음과 같다(자세한 유동과정은 서⁽⁸⁾의 보고서에 수록되어 있음). 우선, 중심부에서는

$$x_1 = \frac{1}{2}(B_{0u} - B_{0v})_c \cos(2\theta_c - t) + \frac{1}{2}(B_{0u} + B_{0v})_c \cos t \quad (31a)$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(B_{0u} - B_{0v})_c \sin(2\theta_c - t) + \frac{1}{2}(B_{0u} + B_{0v})_c \sin t \quad (31b)$$

$$z_1 = B_{0w}(r_c, z_c) \cos(\theta_c - t) \quad (31c)$$

의 식이, 그리고 중심부를 제외한 지역에서는 식 (31c)와 더불어

$$r_1 = B_{0u}(r_c, z_c) \cos(\theta_c - t) \quad (32a)$$

$$r_c \theta_1 = -B_{0v}(r_c, z_c) \sin(\theta_c - t) \quad (32b)$$

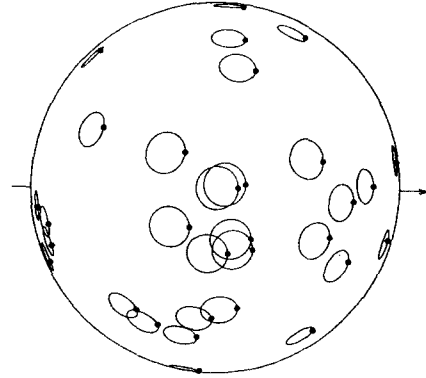


Fig. 3 Particle trajectories for $T=0.9$ [sec] and $H=R_0=0.02$ [m].

의 식이 유효하다. 여기서, 하첨자 c 는 상수를 나타낸다. 이 결과에 의하면, 입자의 궤적은 $(r, r\theta)$ 평면 상에서 장축의 길이가 $2B_{0v}(r_c, z_c)$ 이고 단축의 길이가 $2B_{0u}(r_c, z_c)$ 인 타원을 형성한다. 중심에서는 식 (31a) 및 (31b)에서 제시한 바와 같이 (x, y) 평면 상에서 직경 $2B_{0u}(0, z_c)$ 의 원호를 그린다. Fig. 3은 원통 내 액체표면에서의 입자의 운동 궤적으로서 식 (32a)~(32b) ($r_c \geq 1/2$ 의 경우)와 식 (31a)~(31b) ($r_c < 1/2$ 의 경우)로 구한 결과를 평면도에서 보인 것이다. 화살표는 $t=0$ 때의 외력의 방향을 나타내며, 각 궤적상의 점은 $t=0$ 때의 입자의 위치를 나타낸다.

한편, (r, z) 평면상에서는 r 방향으로 $2B_{0u}(r_c, z_c)$ 그리고 z 방향으로 $2B_{0w}(r_c, z_c)$ 만큼 이동하는 직선을 그린다. 식 (15a) 및 (15c)에서 알 수 있는 바와 같이, $r=0$ 에서 $B_{0u} > 0$, $B_{0w} = 0$ 이고, $r=1$ 에서 $B_{0u} = 0$, $B_{0w} > 0$ 이므로, 중심에서는 이 직선이 수평을, 측면상에서는 수직을 이루는 것을 알 수 있다. 즉, 측면상에서는 유체입자의 운동은 갓힌 용기내의 정지파(standing wave)의 그것과 유사하다.

마지막으로, $(r\theta, z)$ 평면상에서는 식 (31c)와 (32b)로부터 알 수 있는 바와 같이 타원 궤적을 그린다. 이는 2차원 중력 진행파와 동일한 성격을 지닌다고 말할 수 있다.

4.2 표류속도와 $\bar{u}_{1\infty}$, $\bar{v}_{1\infty}$, 및 $\bar{w}_{1\infty}$

스톡스 표류속도 \bar{v}_1 은 식 (27b)와 같이 구한 바 있다. $h=0.92$ 에 대해 $z=h$ (자유표면), $h/2$ (중간지점), 및 0 (바닥)에서 구한 \bar{v}_1 을 그린 것이 Fig.

4이다. 중간지점에서의 값이 바닥의 약 2배이다. 표면에서의 값은 $r=0.7$ 정도까지는 중간지점 값의 약 2배이나, r 의 값이 커짐에 따라 그 비율은 더욱 증가하여, $r=1$ 에서는 약 5배 정도에 이른다. 이러한 경향은 h 의 증가에 따라 더욱 심해지며, 그 이유는 수학적으로는 쌍곡 삼각함수의 특성에 기인하며, 물리적으로는 수심의 증가에 따라 파동에 의한 유체입자의 운동진폭이 수직거리에 따라 지수적으로 증가한다는 표면파동의 기초이론에 의해 설명할 수 있다.

하면 경계층에서의 점성효과로 인한 경계층 끝에서의 정상유동속도 $\bar{u}_{1\infty}$ 및 $\bar{v}_{1\infty}$ 의 반경방향 위치에 따른 분포를 보면 (Fig. 5), 모두 극대값을 가지는 것을 알 수 있다. 특히 주목할 것은 반경방향 유속 $\bar{u}_{1\infty}$ 이 $r=1$ 에서 0이 아니라는 점이다. 이것은, $r=1$ 에서 $A_{0u}=0$, $A_{0v}\neq 0$ 이므로 식 (25)에 의해 $\bar{u}_{1\infty}=3A_{0v}^2/4$ 이 되며 따라서 $\bar{u}_{1\infty}>0$ 이기 때문이다. 전체적으로 보면, $\bar{u}_{1\infty}$ 및 $\bar{v}_{1\infty}$ 의 값은 h 의 증가에 따라 급격히 감소한다. 이는, 다른 조건이 동일한 상태에서, 수심이 증가함에 따라 하면에서의 입자의 요동운동이 급격히 약해지기 때문이다.

측면 경계층으로부터 여기되는 수직방향의 정상속도 $\bar{w}_{1\infty}$ 는 의외로 큰 값을 유지한다. Fig. 6은 수직거리에 따른 $\bar{w}_{1\infty}$ 의 분포를 세 가지 h 에 대해 구한 결과를 그린 것이다. 전체적으로 보면 이것의 절대값은 $\bar{u}_{1\infty}$ 및 $\bar{v}_{1\infty}$ 의 값보다 높다. 특히 h 가 증가함에 따라 $\bar{u}_{1\infty}$ 및 $\bar{v}_{1\infty}$ 의 값이 급격히 감소하는데 비해 $\bar{w}_{1\infty}$ 의 값은 특히 자유표면 근처에서 크게 변하지 않음은 대조적이다. 제2보에서 볼 것이지만, 결국 이것이 내부의 정상유동을 지배하게 된다.

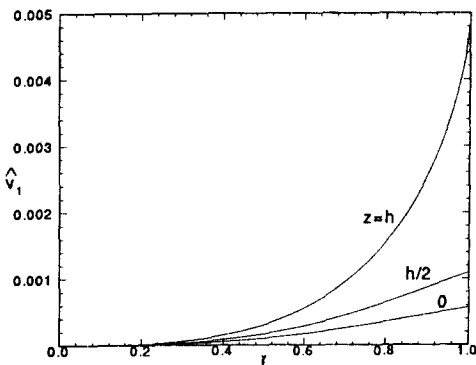


Fig. 4 Distributions of the Stokes' drift velocity \bar{v}_1 at $z=h$, $h/2$ and 0 for $h=0.92$.

$\bar{u}_{1\infty}$ 와 $\bar{v}_{1\infty}$ 는 항상 양의 값을, 그리고 $\bar{w}_{1\infty}$ 는 항상 음의 값을 보이므로, 이들의 분포를 대표하는 하나의 값을 설정하는 것이 가능하다면, 그것은 각종 파라미터의 변화에 따른 유동장의 변화를 분석하는데 큰 도움이 된다. 여기서서,

$$u_{int} = \int_0^1 \bar{u}_{1\infty} 2\pi r dr, \quad v_{int} = \int_0^1 \bar{v}_{1\infty} 2\pi r dr$$

$$w_{int} = -2\pi \int_0^1 \bar{w}_{1\infty} dz \quad (33)$$

를 각각 대표값으로 설정하였다. Fig. 7은 h 의 변화에 따른 이 값들의 변화를 그린 것이다. 여기서, $\bar{\eta}_{0m}$ 은 $r=1$ 에서의 $\bar{\eta}_0$ 값을 나타낸다. h 가 증가함에 따라 u_{int} 및 v_{int} 는 급격히 감소하나, w_{int} 는 큰 변화를 보이지 않으며, 또한 $\bar{\eta}_{0m}$ 와 같은 변화의 양상을 보인다. 이것은 결국, 내부유동을 결정짓는

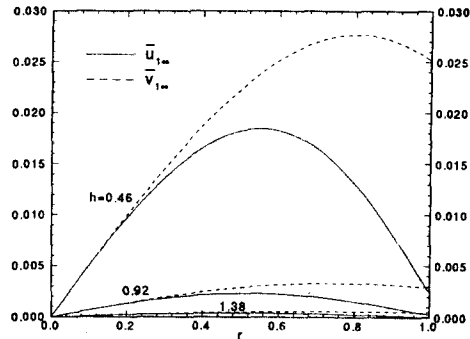


Fig. 5 Radial distributions of the Eulerian streaming velocities $\bar{u}_{1\infty}$ and $\bar{v}_{1\infty}$ at the bottom surface of the cylinder ($z=0$) for three values of h shown; $T=1$ [sec], $R_0=0.02$ [m].

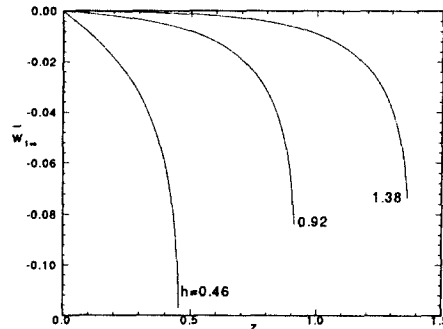


Fig. 6 Vertical distributions of the Eulerian streaming velocity $\bar{w}_{1\infty}$ at the side surface of the cylinder ($r=1$) for three values of h shown; $T=1$ [sec], $R_0=0.02$ [m].

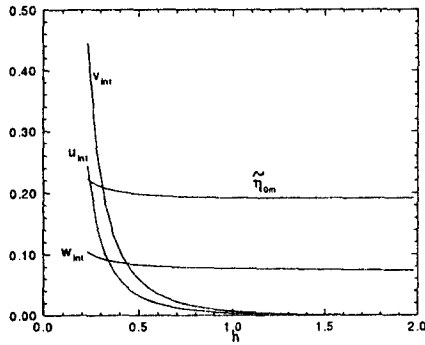


Fig. 7 Variations of the integrated Eulerian streaming velocities u_{int} , v_{int} and w_{int} on the change of h ; $T=1$ [sec]. The curve $\tilde{\eta}_{0m}$ corresponds to the value of $\tilde{\eta}_0$ at $r=1$.

가장 중요한 경계값인 w_{int} 는 액면의 변동에 의해 결정됨을 시사한다.

주기 T 의 영향을 고려해 보자. 앞의 3.1 “비정상 유동”에서도 언급한 바와 같이 주기 T 가 공진주기 T_c 에 가까워지면 계수 a_1 이 무한대로 가기 때문에 모든 양들이 증가한다. 이 양들의 단순한 증가는 때로는 필요하겠지만 때로는 격렬한 유체유동에 따른 전단력의 증가로 세포배양시 오히려 불리할 경우가 많다. 셰이커 테이블(shaker table) 사용자의 입장에서는 유체유동의 활발한 정도를 직접 육안으로 관찰하는 것은 거의 불가능하다. 이때, 액면의 변동을 비교적으로 관찰 및 측정함으로써 유동의 활발한 정도를 어느 정도 파악할 수 있다면, 이것은 큰 도움이 된다. Fig. 8은 이러한 관점에서, $H=0.02$ [m]에 대해 주기 T 를 1[s]에서부터 공진주기 T_c 에 가까운 값인 0.38[s]까지 변

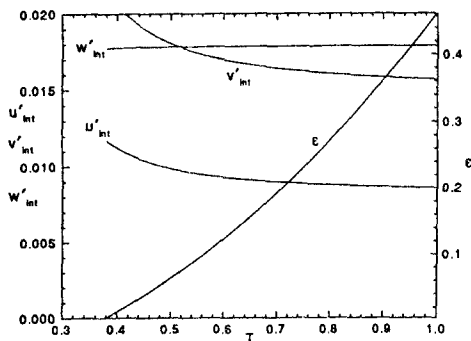


Fig. 8 Variations of the integrated Eulerian streaming velocities u'_{int} , v'_{int} and w'_{int} on the change of T ; $H=0.02$ [m], $\alpha=0.2$.

화시키면서, u'_{int} , v'_{int} 및 w'_{int} 를 구하여 그린 것이다. 이 값들은, 각각 u_{int} , v_{int} , 및 w_{int} 을 $\epsilon^2\omega$ 로 곱한 양으로서 실제의 정상속도를 R [m] \times 2π [rad/s]으로 무차원화시킨 것이다. 또한, ϵ 은

$$\alpha = \frac{\epsilon}{h} \tilde{\eta}_{0m} \tag{34}$$

으로 정의된 α 가 0.2가 되도록 하는 값이다. 이 α 는 수면의 실제 변동진폭을 수심 H 로 무차원화시킨 양이다. 즉, 이 그림은 같은 액면 변동을 일으키도록 T 와 R_0 를 조종할 때, T 의 변화에 따라 내부유동을 결정하는 경계값들이 어떻게 변하는지를 보여주고 있다. 이렇게 하는 이유는 변하는 파라미터 자체(여기서는 T 또는 ω)가 무차원화에 사용되는 것을 피하기 위해서이다. 그림을 보면, 공진주기에 접근할수록 ϵ 은 0으로 가고, u'_{int} 및 v'_{int} 은 약간의 증가를 보이는 반면, w'_{int} 은 거의 일정하게 유지되고 있다. 이 결과로부터 결국, 내부유동의 활발한 정도는 액면의 변동에 달려 있으며, 이 사실은 주기 T 의 공진값에 가까운 정도에 거의 무관하게 성립한다고 말할 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는, 회전요동운동하는 원통형 용기내의 자유표면을 가지는 액체유동의 해를 해석적으로 구하였다. 해를 분석한 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 본 유동모델에서 1차적인 유체운동은 주기적 요동운동이며, 이에 따른 입자의 궤적은 축직각 단면상에서는 단원 곡선이고, 축단면상에서는 직선이다.

(2) 입자의 운동으로부터, 본 유동은 축단면상에서는 정지파의 성질을, 그리고 원주단면상에서는 진행파의 성질을 보임을 알 수 있었다.

(3) 바닥과 측면 근처의 경계층 해석에 의하면, 바닥 경계층 끝에서는 반경방향 및 원주방향의 정상유속 성분이, 그리고 측면에서는 수직방향의 정상유속 성분이 발생한다.

(4) 바닥 경계층 끝에서의 정상유속 성분은 수심이 증가할수록 급격히 감소하나, 측면 경계층 끝에서의 그것은 수심에 따라 크게 변하지 않는다.

(5) 측면 경계층 끝에서의 정상유속 성분은 자유표면의 변동량에 거의 비례한다.

후 기

본 연구는 한국과학재단의 '94해설전문연구과제 연구지원(과제번호: 941-1000-045-2)에 의하여 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Mantell, S. H. and Smith, H., 1983, *Plant Biotechnology*, Camb. Univ. Press.
- (2) Bu'lock, J. and Kristiansen, B., 1987, *Basic Biotechnology*, Academic Press.
- (3) Denchev, P. D., Kuklin, A. I. and Scragg, A. H., 1992, "Somatic Embryo Production in Bioreactors," *J. Biotech.*, Vol. 26, pp. 99~109.
- (4) Gardner, J. and Tatterson, G., 1992, "Characterization of Mixing in Shaker Table Containers," *Biotechnol. Bioengg.*, Vol. 39, pp. 794~797.
- (5) Longuet-Higgins, M. S., 1953, "Mass Transport in Water Waves," *Phil. Trans. Roy. Soc.* A245, pp. 535~581.
- (6) Watson, G. N., 1966, "A Treatise on the Theory of Bessel Functions," 2nd ed., Camb. Univ. Press.
- (7) Riley, N., 1984, "Progressive Surface Waves on a Liquid of Non-Uniform Depth," *Wave Motion*, Vol. 6, pp. 15~22.
- (8) 차승권, 1996, 회전요동하는 원통내의 유동 및 교반 특성, 한국과학재단 해설전문연구과제 연구보고서.
- (9) Longuet Higgins, M. S., 1960, "Mass Transport in the Boundary Layers at a Free Oscillating Surface," *J. Fluid Mech.*, Vol. 8, pp. 293~306.
- (10) Hunt, J. N. and Johns, B., 1963, "Current Induced by Tides and Gravity Waves," *Tellus*, Vol. 15, pp. 343~351.
- (11) Johns, B., 1970, "On the Mass Transport Induced by Oscillatory Flow in a Turbulent Boundary Layer," *J. Fluid Mech.*, Vol. 43, pp. 177~185.
- (12) Carter, T. G., Liu, P. L.-F. and Mei, C. C., 1973, "Mass Transport by Waves and Offshore Sand Bedforms," *J. Waterways Harbors and Coastal Engng Division*, Vol. 99, pp. 165~184.
- (13) Dore, B. D., 1976, "Double Boundary Layers in Standing Surface Waves," *Geophys.*, Vol. 114, pp. 629~637.
- (14) Hadden, E. W. and Riley, N., 1983, "A Note on the Mean Circulation in Standing Waves," *Wave Motion*, Vol. 5, pp. 43~48.
- (15) Iskandarani, M. and Liu, P. L.-F., 1991, "Mass Transport in Two-Dimensional Water Waves," *J. Fluid Mech.*, Vol. 231, pp. 395~415.
- (16) Iskandarani, M. and Liu, P. L.-F., 1991, "Mass Transport in Three-Dimensional Water Waves," *J. Fluid Mech.*, Vol. 231, pp. 417~437.