財務管理研究 第十三卷 第一號(1996), 237-260

GARCH 통화옵션가격결정모형의 유효성 검증

신 민 식* · 박 병 수**

〈요 약〉

본 논문에서는 Duan(1995)이 개발한 GARCH 주식옵션가격결정모형을 통화옵션에 적용시켜 GARCH 통화옵션가격결정모형을 유도한 다음, 이를 Garman-Kohlhagen 모형과 유효성을 비교하여 다음과 같은 연구결과를 얻었다.

만기별 및 옵션의 상태별(OTM, ATM, ITM)로 GARCH 통화옵션가격결정모형의 가격오차가 Garman-Kohlhagen 모형보다 일관되게 낮게 나타났다. 이는 GARCH 통화옵션가격결정모형이 Garman-Kohlhagen 모형보다 통화옵션의 평가에 더 유용한 모형임을 의미한다. 따라서 통화옵션의 가격을 예측할 때는 환율변동의 이분산성을 고려하여 환율의 변동성을 추정함으로써 통화옵션가격의 예측력을 제고시킬 수 있다고 생각한다. 그러나 GARCH 통화옵션가격결정모형의 모형가격이 시장가격과 상당한 편차를 보이는 경우도 있기 때문에 향후 통화옵션가격결정모형을 계속 발전시키는 과정에서 이자율의 확률적 특성을 반영하거나 환율변동의 점프특성을 도입해야 한다고 생각한다.

Ⅰ. 서 론

세계 각국에서는 1970년대 이후 환율의 변동성을 관리하기 위해 선도환, 통화선물, 통화옵션, 통화선물옵션과 같은 파생상품을 적극 도입하였다. 1972년에는 시카고 상업거래소(CME)의 국제 통화시장(IMM)에서 영국 파운드, 캐나다 달러, 독일 마르크, 일본 엔, 스위스 프랑을 기초통화로 하는 통화선물을 도입하였고, 1982년에는 필라델피아 증권거래소(PHLX)에서 영국 파운드를 기초통화로 하는 통화옵션을 도입하였다. 이어서 1983년에는 캐나다 달러, 독일 마르크, 일본 엔, 스위스 프랑을 기초통화로 하는 통화옵션을 도입하였다. 우리 나라에서도 1996년 5월부터 KOSPI 200지수선물을 도입한 것을 계기로 향후 각종 파생상품을 도입할 예정이다. 특히, 우리 나라는 대외의존도가 높기 때문에 환위험을 적절히 관

* 경북대학교 경영학부 부교수
** 대은금융경제연구소 주임연구원· 경영학박사
본 논문은 한국재무관리학회와 한국금융선물협회가 공동으로 주관하는 「파생금융상품에 관한 박사과정 연구지원 사업」의 지원으로 작성된 논문임.

리할 수 있는 파생상품과 금융기법에 대한 연구가 절실히 필요하다.

그 동안 통화옵션의 가격을 평가하기 위한 통화옵션가격결정모형이 여러 가지 개발되었으나, 이러한 모형들은 대부분 주식옵션의 가격결정에 사용되는 Black-Scholes(1973)의 옵션가격결정모형(Option Pricing Model: OPM)을 수정하거나 확장한 것으로 통화옵션의 가격을 정확하게 평가하지 못한다는 비판을 받아왔다. 그 이유는 통화옵션의 가격을 평가할 때 가장 중요한 요인이 되는 환율의 변동성에 대해 일정한 변동성을 가정했기 때문이다. 이 점에 대한 최근의 연구결과에 의하면, 환율변동의 분포가 대수정규분포가 아니라 꼬리부분이 두터운 leptokurtic한 분포이며, 환율의 변동성도 시계열적으로 이분산성(hetroscedasticity)을 갖는 것으로 나타났다.

따라서 본 연구의 목적은 Duan(1990, 1995)이 개발한 GARCH 주식옵션가격결정모형을 통화옵션에 적용시켜 GARCH 통화옵션가격결정모형(GARCH Currency Option Pricing Model)을 유도한 다음, 이에 대한 유효성을 검증하는 데 있다. 모형의 유효성은 GARCH 통화옵션가격결정모형과 Garman-Kohlhagen(1983)의 모형에 의해 산출된 모형가격과 시장가격의 차이를 비교하는 방법으로 검증하며, 통화별, 잔여만기별, 옵션의 상태별로 구분하여 가격차이를 비교한다.

Ⅱ. 국내외 연구동향

Black-Scholes(1973)의 OPM이 발표된 이후 이를 확장시킨 통화옵션가격결정모형이 다양하게 개발되었는데, 그 중에서 중요한 것으로는 Bigger-Hull(1983), Grabbe (1983) 및 Garman-Kohlhagen(1983)의 모형을 들 수 있다.

그리고 각 통화옵션가격결정모형의 유효성에 대한 검증이 많이 이루어졌는데, 그 연구결과를 요약하면 다음과 같다.

Bodurtha-Courtadon(1987)은 환위험이 환율의 점프특성에서 발생하며, 이러한 특성을 고려한 모형이 통화옵션의 가격을 더 적절하게 평가한다고 하였다. 그리고 Chesney-Scott(1989)는 환율의 변동에 대해 일정분산 가정보다 확률적 분산을 가정하여 통화옵션의 가격을 평가하면 가격편의를 감소시킬 수 있기 때문에 Hilliard-Madura-Tucker(1991)의 연구에서와 같이 확률적 분산을 가정해야 한다고 하였다.

Bodurtha-Courtadon(1987), Melino-Turnbull(1987), Shastri-Tandon(1987) 등의 연구에 의하면 전통적 통화옵션가격결정모형의 모형가격과 시장가격은 오차가 큰 것으로 나타났다. Shastri-Tandon(1987)은 이익옵션(in-the-money option)에서 옵션가격이 과대평

가되고, 손실옵션(out-of-the-money option)에서 옵션가격이 과소평가됨을 발견하였다. 또한, 원월 만기 콜(풋)옵션의 가격이 근월 만기 콜(풋)옵션의 가격보다 과대(과소)평가되는 일종의 만기편의(maturity bias)가 존재하는 것으로 나타났다.

1980년대 후반들어, Hull-White(1987), Johnson-Shanno(1987), Scott(1987), Wiggins (1987) 등은 확률적 변동성하의 주식옵션가격결정모형을 연구하였다. 이들이 개발한 모형에서는 Black-Scholes(1973)의 OPM보다 가격편의가 감소하는 것으로 나타났다. 주가와 변동성간의 상관관계가 정(+)일 경우에, Black-Scholes(1973)의 OPM은 손익분기옵션(at-the-money option)을 과소평가하고, 이익옵션을 과대평가하는 경향이 있으며, 상관관계가 부(-)일 경우에는 반대로 나타났다. 그러나 확률적 변동성하의 옵션가격결정모형에서는 폐형해(closed form solution)를 유도할 수 없기 때문에 모형의 가정을 단순화시켜야만 옵션가격을 평가할 수 있다. 따라서 Hull-White(1987)는 주가와 변동성간에 상관관계가 존재하지 않는다고 가정하고 몬테칼로 시뮬레이션 기법으로 옵션가격을 평가하였다.

Melino-Turnbull(1990)은 기존의 통화옵션가격결정모형의 예측력이 낮은 주요 이유는 환율변동의 분포를 대수정규분포로 가정한 때문이라고 주장하였다. 이들은 일별 또는 주별 환율변동의 확률분포가 대수정규분포보다는 꼬리부분이 두터운 leptokurtosis하고, 변동성이 시계열적으로 종속적이며, 이분산성이 존재한다고 주장하였다.

이와 같은 환율분포의 특성을 모형화 할 때에는 Engle(1982)이 제시한 ARCH 모형(Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Model)이 많이 이용된다. 또한 Cao(1992)는 Nelson(1991)의 EGARCH 모형(Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Model)을 이용한 통화옵션가격결정모형을 전개하였다. Cao(1992)는 EGARCH 통화옵션가격결정모형이 Black-Scholes(1973)의 OPM에 비해 독일 마르크옵션에 대해 우월한 예측력을 갖는다고 하였다. 그리고 Duan(1995)은 GARCH 모형(Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Model)을 이용하여 주식옵션가격결정모형을 개발하였다.

따라서 본 연구에서는 전통적인 옵션가격결정모형에서는 설명할 수 없었던 환율분포의 leptokurtosis, 이분산성 등을 설명할 수 있는 대안적 모형으로 GARCH 통화옵션가격결정모형을 제시하고, 일정 변동성을 가정하는 Garman-Kohlhagen 모형과 서로 유효성을 비교한다.

Ⅲ. GARCH 통화옵션가격결정모형의 유도

Engle-Mustafa(1992), Day-Lewis(1992), Noh-Engle-Kane(1994) 등은 옵션의 가격결정을 위해 ARCH 모형을 이용하였다. Duan(1995)은 ARCH 모형의 구조하에서 주식옵션가격결정모형을 처음으로 개발하였으며, Kallsen-Taqqu(1994)는 연속적인 무재정거래 상황에서 ARCH 옵션가격결정모형을 개발하였다. Duan(1995)이 개발한 GARCH 주식옵션가격결정모형은 Black-Scholes(1973)의 OPM보다 가격편의가 감소하는 것으로 나타났다. Chaudhury-Wei(1995)는 Duan(1995)의 GARCH 주식옵션가격결정모형과 Black-Scholes(1973)의 OPM과 비교하여 GARCH 주식옵션가격결정모형이 단기옵션과 손실옵션의 가격결정에서 매우 유용함을 발견하였다. Amin-Ng(1993), Heyen-Kemna-Vorst(1994) 등은 GARCH 주식옵션가격결정모형이 Black-Scholes (1973)의 OPM보다 유효성이 높다고 하였다.

그러나 GARCH 주식옵션가격결정모형을 통화옵션의 가격결정에 적용한 연구는 거의 없다. 그래서 본 연구에서는 Duan(1995)의 GARCH.주식옵션가격결정모형을 GARCH 통화옵션가격결정모형으로 확장시키고자 한다. Nelson(1990)은 이산적 GARCH(1,1) 모형이 연속시간 확산모형에 수렴하므로, 진정한 모형이 점프가 없는 확산모형이라면 GARCH(1,1) 모형으로 과거 잔차의 가중평균값을 구하여 분산을 추정할 수 있다고 하였다. 또 Nelson(1990)은 GARCH(1,1) 모형이 Wiggins(1987)와 Chesney-Scott(1989)가 제시한 옵션가격결정모형에서는 확산과정의 근사치로서 쓰여질 수 있다고 주장하였다.

Taylor(1986), McCurdy-Morgan(1988), Hsieh(1989) 등은 환율이 GARCH(1,1) 모형에 따라 변동함을 실증적으로 증명하였다. Baillie-Bollerslev(1989), Hsieh(1989) 등은 t-분포와 같은 대안적 분포를 이용하여 환율분포가 leptokurtic하거나 꼬리부분이 두텁다는 것을 실증적으로 증명하였다.

Duan(1995)은 GARCH 주식옵션가격결정모형을 유도하기 위해 주식수익률과 조건부 분산을 다음과 같이 정의하였다.

$$\mathrm{In}\frac{S_t}{S_{t-1}} = \gamma_t + \lambda_t\sqrt{h_t} - \frac{1}{2}h_t + \varepsilon_t \tag{1}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i h_{t-i} \tag{2}$$

단, S_t = t기의 주가

r_t= t-1기부터 t기까지의 연속복리 무위험금리

λ_t = t기의 위험프리미엄

α_0, α_i, β_i = 시간종속적 추정모수

ϵ_t = t기의 오차항

h_t= GARCH 모형으로 추정한 t기 주식수익률의 조건부 분산

$p \geq 0$, $q \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$

그리고 GARCH(p,q) 과정에 따라 공분산의 정상성이 보장되기 위해서는 $\sum_{i=1}^{q}\alpha_i+\sum_{i=1}^{p}\beta_i<1$ 이 전제되어야 한다. GARCH(p,q) 과정에서 p=0, q=0이면 Black-Scholes 모형과 같은 등분산대수정규과정의 모형이 유도된다. 식(1)에서 ϵ_t는 식(3)과 같이 평균이 0이고 조건분 분산이 h_t인 값을 갖는다.

$$\epsilon_t \mid I_{t-1} \sim N(0,\ ht) \tag{3}$$

단, I_{t-1} = t-1기까지의 모든 정보집합

Duan(1995)은 GARCH 과정에 따라 균형가격 A는 균형가격 B로 연속적으로 변동한다고 하였다. 그래서 Duan(1995)에 의하면 새로운 균형가격 B는 LRNVR(locally risk-neutral valuation relationship)을 만족시키며, 이 때 주식수익률과 조건부 분산은 식(4) 및 (5)와 같이 결정된다.

$$\text{In}\frac{S_t}{S_{t-1}}=\gamma-\frac{1}{2}h_t+\xi_t \tag{4}$$

$$h_t=\alpha_0+\sum_{i=1}^{q}\alpha_i(\xi_{t-1}-\lambda\sqrt{h_{t-i}})^2+\sum_{i=1}^{p}\beta_i h_{t-i} \tag{5}$$

이상의 식(4)를 이용하여 현재의 주가와 종가간의 관계식을 구하면 다음과 같다.[1)]

$$\text{In}\frac{S_T}{S_t}=(T-t)\gamma-\frac{1}{2}\sum_{l=t+1}^{T}h_l+\sum_{l=t+1}^{T}\xi_l \tag{6}$$

1) 식(6)은 식(4)로부터 귀납적으로 증명할 수 있다.

식(6)에서 T기의 주식종가를 구하면 다음과 같다.

$$S_T = S_t e^{(T-t)\gamma - \frac{1}{2}\sum_{l=t+1}^{T} h_l + \sum_{l=t+1}^{T} \xi_l} \tag{7}$$

이제 Duan(1995)이 식(7)을 이용하여 유도한 GARCH 주식옵션가격결정모형을 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C^T &= e^{-(T-t)\gamma} E^B[\max(S_T - X, 0) | I_t] \\ &= e^{-(T-t)\gamma} E^B[\max(S_t e^{(T-t)\gamma - \frac{1}{2}\sum_{l=t+1}^{T} h_l + \sum_{l=t+1}^{T} \xi_l} - X, 0) | I_t] \end{aligned} \tag{8}$$

단, c_t = GARCH 모형으로 추정한 t기의 유럽형 주식콜옵션가격
S_T = T기의 주가
T = 주식콜옵션의 만기일
X = 행사가격
γ = 무위험금리
h_t = GARCH 모형으로 추정한 t기 주식수익률의 조건부 분산

이상 Duan(1995)의 GARCH 주식옵션가격결정모형을 통화옵션에 적용시켜 GARCH 통화콜옵션가격결정모형을 유도하면 다음과 같다.[2)]

$$\begin{aligned} C_t^{GRACH} &= e^{-(T-t)\gamma_D} E^B[\max(S_T - X, 0) | I_t] \\ &= e^{-(T-t)\gamma_D} E^B[\max(S_t e^{(T-t)(\gamma_D - \gamma_F) - \frac{1}{2}\sum_{l=t+1}^{T} h_l + \sum_{l=t+1}^{T} \xi_l} - X, 0) | I_t] \end{aligned} \tag{9}$$

단, c_t^{GARCH} = GARCH 모형으로 추정한 t기의 유럽형 통화콜옵션가격
S_T = T기의 환율
T = 통화콜옵션의 만기일
X = 행사가격
r_D = 국내금리
r_F = 해외금리

---

2) J. Hull, Options, Futures, and Other Derivatives Securities, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993, pp. 257-258.

h_t = GARCH 모형으로 추정한 t기 환율의 조건부 분산

한편 환율의 일정 변동성을 가정하는 Garman-Kohlhagen 모형은 다음과 같다.

$$C_t^{GK} = S_t^{-(T-t)\gamma_D} N(d_t) - e^{-(T-t)\gamma_F} XN(d_t - \sigma\sqrt{(T-t)} \quad (10)$$

단, $d_t = \dfrac{In(S_t / X) + (\gamma_D - \gamma_F + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T} - t}$

c_t^{GK} = Garman-Kohlhagen 모형으로 추정한 유럽형 통화옵션가격
$\sigma^2 = \alpha_0(1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1}$
σ^2 = GARCH(1,1) 모형으로 추정한 환율의 정상적 분산
α_0, α_1, β_1 = GARCH(1, 1) 모형으로 추정한 모수

GARCH 통화옵션가격결정모형과 Garman-Kohlhagen 모형의 유효성을 비교하기 위해 몬테칼로 시뮬레이션 기법(Monte Carlo simulation)으로 GARCH 통화옵션가격결정모형의 모형가격을 구하고, 이 모형가격과 시장가격의 가격차이를 분석한다. 그리고 Garman-Kohlhagen 모형에 투입할 환율의 변동성은 GARCH 모형으로 추정한 정상적 분산 $\sigma^2 = \alpha_0(1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1}$을 적용한다. 이와 같이 Garman-Kohlhagen 모형에 GARCH 모형을 통하여 추정한 정상적 분산을 이용한 이유는 Cao(1992)와 Duan(1995), Kang- Brorsen(1995) 등과 같이 환율의 분포에 leptokurtosis와 비정규성(non-normalilty)이 존재할 경우의 GARCH 모형과 그렇지 않은 경우의 Garman-Kohlhagen 모형을 비교함으로써 옵션가격결정모형에서 가정하고 있는 기초자산의 분포차이로 인한 효과를 분석하기 위함이다.

Ⅳ. GARCH 통화옵션가격결정모형의 유효성 검증

여기서는 GARCH 통화옵션가격결정모형과 Garman-Kohlhagen 모형을 각각 이용하여 모형가격을 구한 다음, 이 모형가격과 시장가격간의 차이검증을 통해 GARCH 통화옵션가격결정모형이 Garman-Kohlhagen 모형보다 유효한가를 분석한다.

1. 자료 및 분석방법

분석에 사용할 자료는 1993년 7월 1일부터 1995년 12월 31일까지의 기간 동안 PHLX에서 거래된 4가지 통화옵션(영국 파운드, 독일 마르크, 프랑스 프랑, 일본 엔)에 대한 일별자료를 사용한다. 또한, 1990년 1월 4일에서 1995년 12월 31일까지의 기간 동안 거래된 4개 통화에 대한 현물환율을 사용한다.

금리자료는 달러의 경우 1년 만기 유로달러예금금리를 사용하고, 외국통화의 경우, 각 통화의 1년 만기 유로예금금리를 사용한다. 여기에서 금리의 만기와 옵션의 만기가 불일치하는 문제가 발생될 수 있지만, 금리는 만기에 관계 없이 모두 연율로 표시된 데다 만기에 따라 연율의 차이가 미세하여 본 논문에서는 이를 무시하기로 하였다.

그리고 현물환율의 변동성을 GARCH(1,1) 모형으로 추정하고, 몬테칼로 시뮬레이션 기법으로 GARCH 통화옵션가격결정모형의 모형가격을 산출하고 시장가격과의 차이를 계산하여 모형의 유효성을 검증한다. 그리고 GARCH 모형과 Garman- Kohlhagen 모형의 모형가격과 비교하여 어느 모형이 더 우월한가를 분석한다. 또한 통화별, 잔여만기별, 옵션의 유형별로 구분하여 가격차이를 검증한다.

GARCH 모형으로 추정한 모수 $\alpha 0$, $\alpha 1$,$\beta 1$을 사용하여 환율의 정상적 분산값인 $\sigma^2 = \alpha_0(1-\sigma_1 - \beta_1)^{-1}$을 구한 다음, 이 정상적 분산값을 GARCH 통화옵션가격결정모형의 조건분 분산을 구하기 위한 초기 변동성 값으로 투입하고, 또한 이 값을 Garman-Kohlhagen 모형의 일정분산 값으로 사용하였다. 일반적으로 Garman-Kohlhagen 모형으로 통화옵션가격을 예측하는 데는 역사적 변동성보다 내재변동성을 이용하는 것이 바람직한데, 그 이유는 내재변동성이 자료의 비정규 분포 특성을 비롯한 모든 시장정보를 내재적으로 함축하고 있기 때문이다. 그러나 본 논문의 목적은 Garman-Kohlhagen 모형과 GARCH 모형간에 기초자산의 확률분포 가정의 차이에서 나타나는 유효성을 검증하는 데 있으므로, 역사적 변동성이나 내재변동성을 사용하지 않고 GARCH 모형으로 수정한 정상적 분산 값을 이용하였다.

본 논문에서는 몬테칼로 시뮬레이션 기법을 다음과 같은 절차로 GAUSS 프로그램화 하였다. 첫째, 환율변동의 표본경로를 모의설정하고, 둘째, 각 표본경로에 대응한 통화옵션의 손익을 계산하고, 셋째, 각 통화옵션의 손익을 평균하여 평균값을 구하고, 넷째, 각 통화옵션의 모형가격을 구하기 위해 평균값을 할인하였다. 그러나 이 경우에 가장 어려운 문제는 모의추정된 통화옵션가격이 합리적 통화옵션가격의 경계를 이탈할 수도 있다는 점이며, 이 때는 통화옵션가격의 추정치가 무의미한 값이 된다. 이러한 현상이 발생하는 이유는 모의실험을 위한 환율변동의 표본경로가 대부분 마팅게일 모형을 따르지 않기 때문이다. 이에 따라 본 논문에서는 모의설정된 환율변동의 표본경로가 마팅게일 모형을 따르도록 모의실험 절차를 수정하는

〈표 1〉 환율변동에 대한 기초통계량

	BP	*DM*	*FF*	*JY*
평균	0.000025	0.000077	0.000069	0.000030
t-값[a]	0.12900	0.38363	0.35581	1.7389
분산	4.9116e-5	5.1805e-5	4.7341e-5	4.266082e-5
왜도	0.31796	-0.10668	-0.10037	0.46264
첨도[b]	2.04585	1.47525	1.44389	2.81967
K-S D 통계량[c]	2.1961*	1.6589*	1.6603*	2.2791*

주) a : 5% 유의수준에서의 t-값
b : 첨도는 3을 뺀 수치임
c : Kolmogorov & Smirnov D 통계량
* 5% 유의수준

방법으로 통화옵션가격을 평가하였다.[3]

2. 환율변동에 대한 기본적 분석

환율변동의 시계열에 대한 ARCH 모형의 적용가능성을 검토하기 위해 Akgiray(1989)의 방법을 적용하여 환율변동의 원자료, 절대값, 자승값, 그리고 AR(1) 시계열에 대한 잔차, 절대잔차, 자승잔차에 대한 자기상관분석을 행하였다. 〈표 1〉은 환율변동에 대한 평균, 분산, 왜도, 첨도, Kolmogorov-Smirnov D 통계량을 보여주는데, 종합적으로 5% 유의수준에서 네 통화에 대한 환율분포의 정규성이 기각되고 있으며, 첨도는 정규분포보다 높은 leptokurtic 한 분포를 이루고 있다.

〈표 2〉에서는 환율변동의 시계열 자기상관이 존재하는가를 분석한 것이다. 환율변동의 절대값과 자승값에 대한 분석에서 1차에서 15차까지 전 차수에 걸쳐 5% 유의수준에서 네 통화 모두 자기상관이 존재하는 것으로 나타났다. 영국 파운드(BP)의 경우에 5%의 유의수준에서 자기상관이 존재하고, 독일 마르크(DM)의 경우 1차와 2차 시계열에서 각각 5%, 10%의 유의수준에서 자기상관이 존재하며, 프랑스 프랑(FF)의 경우 1, 2, 4, 6, 7, 8차에서 자기상관이 존재하는 것으로 나타났으나, 일본 엔(JY)의 경우에는 자기상관이 존재하지 않는 것으로 나타났다. 이러한 연구결과는 Mandelbrot(1963)의 연구결과와 일치한다.

3) 자세한 수정절차는 Duan and Simonato(1995) 논문 참조.

〈표 2〉 환율변동에 대한 자기상관계수

통화 / 시차	환 율 변 동				환율변동의 절대값				환율변동의 자승값			
	BP	DM	FF	JY	BP	DM	FF	JY	BP	DM	FF	JY
1	0.101*	0.051**	0.061*	0.039	0.178*	0.160*	0.159*	0.077*	0.159*	0.160*	0.132*	0.062*
2	-0.015*	-0.046*	-0.033*	-0.023	0.134*	0.089*	0.101*	0.067*	0.149*	0.126*	0.128*	0.060*
3	0.028*	-0.004	0.005	-0.024	0.130*	0.128*	0.118*	0.089*	0.145*	0.135*	0.121*	0.063*
4	0.047*	0.028	0.037**	-0.009	0.139*	0.098*	0.091*	0.086*	0.080*	0.088*	0.067*	0.052*
5	0.044*	0.028	0.030	-0.033	0.167*	0.134*	0.141*	0.069*	0.132*	0.109*	0.115*	0.048*
6	-0.029*	-0.043	-0.048**	-0.039	0.108*	0.091*	0.093*	0.057*	0.060*	0.062*	0.067*	0.048*
7	-0.010**	-0.005	-0.047*	0.060	0.097*	0.061*	0.054*	0.051*	0.100*	0.111*	0.101*	0.023*
8	0.012*	-0.014	-0.031**	0.004	0.093*	0.112*	0.126*	0.033*	0.059*	0.086*	0.123*	0.026*
9	0.062*	0.032	0.027	-0.015	0.123*	0.096*	0.094*	0.049*	0.116*	0.068*	0.066*	0.144*
10	0.055*	0.040	0.030	0.056	0.156*	0.124*	0.122*	0.034*	0.136*	0.097*	0.106*	0.033*
11	-0.014*	-0.028	-0.015	0.030	0.171*	0.114*	0.118*	0.081*	0.167*	0.107*	0.115*	0.081*
12	0.016*	-0.003	0.001	0.008	0.098*	0.083*	0.077*	0.041*	0.090*	0.076*	0.069*	0.042*
13	-0.002*	-0.023	-0.015	0.013	0.096*	0.089*	0.099*	0.085*	0.092*	0.127*	0.134*	0.071*
14	-0.021*	-0.027	-0.012	0.037	0.133*	0.103*	0.098*	0.031*	0.106*	0.107*	0.093*	0.029*
15	0.022*	-0.003	0.003	0.017	0.085*	0.080*	0.083*	0.036*	0.060*	0.076*	0.088*	0.010*
$Q^a(5)$	19.7	8.2	9.1	4.9	143.9	98.2	96.5	43.1	117.7	100.6	84.0	23.1
Q(10)	32.7	14.1	15.5	15.7	232.3	160.6	161.8	57.8	180.0	148.4	142.2	29.9
Q(15)	34.6	16.8	16.3	19.3	325.6	218.1	221.0	83.0	256.0	213.1	209.3	50.1

주) a : Ljung & Box Q 통계량
* : 5% 유의수준, ** : 10% 유의수준

〈표 3〉에서는 환율변동을 AR(1)으로 변형한 시계열 잔차, 절대잔차, 자승잔차에서 자기상관이 존재하는가를 분석한 것이다. 네 통화의 시계열 잔차에 대한 AR(1)에서는 자기상관이 존재하지 않는 것으로 나타났으나, AR(1)의 자승잔차 시계열 및 절대잔차 시계열에서는 네 통화에 대해 5% 유의수준에서 유의한 자기상관이 존재하는 것으로 나타났다. 이러한 분석결과는 환율변동의 시계열에 ARCH 모형을 적용할 수 있음을 의미한다.

〈표 3〉 환율변동의 AR(1) 변형잔차에 대한 대한 자기상관계수

통화	환 율 변 동				환율변동의 절대값				환율변동의 자승값			
시차	*BP*	*DM*	*FF*	*JY*	*BP*	*DM*	*FF*	*JY*	*BP*	*DM*	*FF*	*JY*
1	0.002	0.005	0.005	-0.004	0.160*	0.167*	0.146*	0.078*	0.116*	0.151*	0.115*	0.058*
2	-0.029	-0.049	-0.038	-0.001	0.132*	0.094*	0.107*	0.071*	0.134*	0.132*	0.133*	0.059*
3	0.026	-0.003	0.006	-0.060	0.129*	0.131*	0.123*	0.090*	0.136*	0.135*	0.123*	0.065*
4	0.041	0.026	0.034	0.019	0.137*	0.089*	0.095*	0.088*	0.073*	0.094*	0.073*	0.053*
5	0.043	0.029	0.031	-0.030	0.164*	0.135*	0.150*	0.069*	0.135*	0.119*	0.126*	0.048*
6	-0.029	-0.044	-0.050	-0.013	0.100*	0.096*	0.089*	0.053*	0.049*	0.065*	0.063*	0.047*
7	-0.046	-0.002	-0.005	0.048	0.095*	0.087*	0.060*	0.053*	0.097*	0.061*	0.105*	0.024*
8	0.011	-0.016	-0.033	0.008	0.094*	0.115*	0.094*	0.034*	0.059*	0.116*	0.123*	0.025*
9	0.057	0.032	0.028	-0.016	0.125*	0.102*	0.121*	0.050*	0.111*	0.085*	0.069*	0.015*
10	0.051	0.039	0.027	0.050	0.145*	0.126*	0.116*	0.034*	0.121*	0.072*	0.102*	0.032*
11	-0.022	-0.031	-0.017	0.026	0.164*	0.125*	0.077*	0.081*	0.160*	0.094*	0.117*	0.083*
12	0.018	-0.002	0.002	0.020	0.096*	0.091*	0.102*	0.038*	0.087*	0.107*	0.067*	0.039*
13	-0.002	-0.002	-0.012	0.007	0.088*	0.078*	0.099*	0.084*	0.081*	0.073*	0.136*	0.069*
14	-0.023	-0.025	-0.011	0.036	0.136*	0.110*	0.087*	0.035*	0.118*	0.131*	0.088*	0.032*
15	0.024	-0.001	0.005	0.011	0.087*	0.088*	0.045*	0.038*	0.057*	0.103*	0.095*	0.012*
$Q^a(5)$	6.4	5.1	4.6	6.8	133.0	111.3	101.1	44.6	93.0	102.6	85.3	22.9
Q(10)	17.9	11.1	11.3	14.3	215.5	189.8	167.4	59.4	146.9	151.4	142.9	29.6
Q(15)	20.4	13.6	12.1	18.0	304.7	259.9	227.7	84.4	219.5	216.7	211.5	49.8

3. GARCH 모형을 이용한 환율변동성 추정

GARCH 통화옵션가격결정모형에 의해 통화옵션의 모형가격을 산출하기 앞서 GARCH 모형을 이용하여 환율의 변동성을 다음과 같이 추정하였다. 환율변동성의 추정방법은 대수우도함수를 고려한 최우추정기법(maximun likelihood estimation: MLE)으로 추정하였다. MLE는 비선형 추정 기법이므로 반복추정 알고리즘으로 Berndt-Hall-Hall-Hauseman (1974)이 제안한 BHHH 알고리즘을 이용하였다. 그리고 모형의 검증방법으로는 라그랑지 승수(Lagrange Multiplier : LM)를 이용하였고, 분석모형의 정규잔차($\varepsilon/\sqrt{h_t}$)에 대한 시계열 상관은 Ljung-Box(1978)의 포트멘토우 Q 통계량(portmanteau Q statistic)을 이용

〈표 4〉 GARCH(1,1) 모형의 추정결과

모형 및 통화 / 추정모수	GARCH(1, 1) 모형 $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 h_{t-1}$			
	BP	*DM*	*FF*	*JY*
α_0	6.507e-7(3.48)*	1.108e-6(2.51)*	7.944e-7(2.47)*	1.839e-6(2.95)*
α_1	0.0659(6.81)*	0.0590 (4.90)*	0.0566(5.18)*	0.0383(4.11)*
β_1	0.9220(82.2)*	0.9191(52.1)*	0.9264(60.6)*	0.9143(39.0)*
$Q(10)^b$	16.9	14.73	15.87	15.47
$LM(10)^c$	16.92	13.16	14.19	13.97
$\log L^d$	5693.88	5625.49	5685.4	5767.14

주) * : 5% 유의수준에서의 t-값
a, d : 대수우도함수 값
b : 정규화된 잔차 $\varepsilon_t/\sqrt{h_t}$ 에 대한 10차수 Ljung & Box 통계량
c : 5% 유의수준에서의 라그랑지 승수 검증통계량

하여 분석하였다.

〈표 4〉는 GARCH(1,1) 모형의 최우추정치(maximun likelihood estimator)를 나타낸다. GARCH 모형의 모수인 α_0, α_1, β_1이 모두 5% 유의수준에서 유의적으로 나타났는데, 이 중에서 분산의 시간변동성을 나타내는 α_1, β_1이 유의적이라는 것은 환율변동이 시간의 경과에 따라 변동함을 의미한다. 또한 네 통화에서 $\alpha_1+\beta_1$의 값이 0.95~0.98로 1에 근접하고 있는데, 이는 환율변동이 IGARCH 모형(Integrated GARCH Model)에 따라 변동함을 의미한다. 한편, Engle-Bollerslev(1986)에 따르면, GARCH(p,q) 모형의 조건부 분산방정식에 대한 모수의 합이 1에 근접할수록 환율의 변동성이 지속적임을 나타낸다. 본 논문에서도 $\alpha_1+\beta_1$의 값이 거의 1에 근접하고 있으므로, 이는 Engle-Bollerslev(1986), Bollerslev (1987), McCurdy-Morgan(1988), Hsieh(1989), Baillie-Bollerslev(1989) 등의 연구와 같이 환율의 변동성이 지속적임을 의미한다. GARCH(1,1) 모형의 잔차에 대한 Ljung & Box Q 통계량을 보면 모든 통화에서 자기상관이 존재하지 않으며, LM 검증에서는 모든 통화에서 잔차에 대한 이분산성이 존재하지 않는 것으로 나타났다. 이러한 분석결과는 환율의 변동성을 GARCH(1,1)모형으로 추정할 수 있음을 의미한다.

이제 〈표 5〉에서와 같이 GARCH(1,1) 모형으로 환율변동의 모수 α_0, α_1, β_1이 추정되면 이를 사용하여 환율의 정상적 분산값인 $\sigma^2 = \alpha_0(1-\alpha_1-\beta_1)^{-1}$을 구할 수 있다. 그리고 이 정상적 분산값을 GARCH 통화옵션가격결정모형의 조건분 분산을 구하기 위한 초기 변동성 값으로

투입하고, 또한 이 값을 Garman-Kohlhagen 모형의 일정 분산값으로 사용하여 두 모형의 모형가격을 각각 구할 수 있다.

4. GARCH 통화옵션가격결정모형의 유효성 검증

GARCH 통화옵션가격결정모형과 Garman-Kohlhagen 모형을 사용하여 옵션의 상태별, 통화별 및 잔여만기별로 모형가격을 각각 구한 다음, 이들 모형가격과 시장가격의 차이를 비교하는 방법으로 모형의 유효성을 검증하였다. 먼저, 모형가격과 시장가격의 차이는 평균오차, 평균오차율, RMSE(root mean squared error), MAE(mean absolute error)를 사용하여 비교하고, 나아가 식(15)와 같은 회귀모형으로 모형가격이 시장가격을 설명하는 정도를 분석하였다.

$$\text{평균오차} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(c_t^s - c_t^a) \tag{11}$$

$$\text{평균오차율} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{(c_t^s - c_t^a)}{c_t^a} \tag{12}$$

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(c_t^s - c_t^a)^2} \tag{13}$$

$$\text{MAE} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|(c_t^s - c_t^a)\right| \tag{14}$$

$$c_t^a = \alpha_1 c_t^s + \varepsilon \tag{15}$$

단, c_t^s = 시뮬레이션한 모형가격
c_t^a = 시장가격
α_1 = 회귀계수
ε = 오차항
T = 시뮬레이션 기간수

(1) 통화옵션 상태별 분석결과

〈표 5〉의 첫째 열에서는 옵션의 상태별로 네 통화옵션의 시장가격의 평균을 나타내고, 둘째 열에서는 Garman-Kohlhagen 모형으로 구한 모형가격의 평균, 시장가격과의 평균오차, 평균오차율, RMSE 및 MAE를 나타내며, Garman-Kohlhagen 모형가격을 시장가격에 회귀

분석한 결과를 나타낸다. 또 셋째 열에서는 GARCH 통화옵션가격결정모형으로 구한 모형가격의 평균, 시장가격과의 평균오차, 평균오차율, RMSE 및 MAE를 나타내며, GARCH 모형가격을 시장가격에 회귀분석한 결과를 나타낸다. 옵션의 상태별로 손실옵션(OTM), 손익분기옵션(ATM), 이익옵션(ITM)으로 구분하는 기준은 Cao(1993)의 구분기준에 따랐으며, 구체적으로 0.97 ≤ S/X은 OTM, 0.98 〈 S/X ≤ 1.02는 ATM, 1.03 ≤ S/X은 ITM으로 구분하였다.

분석결과, 두 모형의 모형가격은 JY 옵션에서 시장가격보다 과소평가되었고, 나머지 세 통화옵션에서는 시장가격보다 과대평가되었다. 평균오차, 평균오차율, RMSE, MAE를 비교해 보면, GARCH 모형이 Garman-Kohlhagen 모형보다 가격오차가 작게 나타났다. 손실옵션(OTM)에서는 Garman-Kohlhagen 모형에 비해 GARCH 모형의 RMSE 감소비율이 BP, FF, JY 옵션에서 각각, 35%, 42%, 45% 정도이다. 이러한 분석결과는 Melino-Turnbull(1990)의 분석결과와 일치한다. 회귀분석결과를 비교해 보면, GARCH 모형의 R^2가 Garman-Kohlhagen 모형보다는 높게 나타났다. GARCH 모형의 R^2는 DM 옵션이 88.6%로 가장 높게 나타났고, BP 옵션은 53.2%로 가장 낮게 나타났다. 전반적으로 두 모형가격은 손실옵션(OTM)에서 시장가격을 잘 반영하지 못하는 것으로 나타났다. 그러나 GARCH 모형이 Garman-Kohlhagen 모형보다 가격오차가 감소하는 것으로 나타났다.

손익분기옵션(ATM)에서 평균오차, 평균오차율 및 MAE를 보면, GARCH 모형의 가격오차가 Garman-Kohlhagen 모형보다 매우 낮게 나타났다. 그리고 회귀분석결과 GARCH 모형의 R^2는 88.5%~89.5%로 Garman-Kohlhagen 모형의 64.0%~86.4%보다 전반적으로 높게 나타났다.

이익옵션(ITM)의 분석결과를 보면, 전반적으로 GARCH 모형의 모형가격이 시장가격보다 과대평가되고 있어 Chesney-Scott(1989)의 분석결과와 일치한다. GARCH 모형의 경우, 시장평균가격의 MAE는 4% ~ 7%로 Garman-Kohlhagen 모형의 9.6%~14.7%보다 낮게 나타났다. 회귀분석결과, 이익옵션은 손실옵션이나 손익분기옵션에 비해 R^2가 매우 높게 나타났으며, 특히 GARCH 모형의 경우, FF 옵션과 JY 옵션의 R^2는 98.6%와 98.2%를 나타나고 있어 GARCH 모형이 더 유효한 모형임을 알 수 있다. 이와 같이 GARCH 모형과 Garman-Kohlhagen 모형이 이익옵션에서 가격오차가 작게 나타나는 이유는 위험회피형 투자자는 내재가치가 높은 이익옵션에 투자한다는 시장의 일반적인 예상을 반영하는 것이다.

〈표 5〉 통화옵션의 상태별 분석결과

구 분			통화옵션의 종류											
			BP			*DM*			*FF*			*JY*		
			OTM	*ATM*	*ITM*	*OTM*	*ATM*	*ITM*	*OTM*	*ATM*	*ITM*	*OTM*	*ATM*	*ITM*
시장가격	평균		0.66	1.64	6.80	0.19	0.68	3.22	0.75	2.16	12.49	0.76	1.61	6.38
G-K 모형 가격	평균		1.33	2.43	7.68	0.28	0.87	3.48	1.25	2.92	13.18	0.36	1.19	5.95
	평균오차		0.67	0.79	0.88	0.12	0.19	0.26	0.36	0.76	0.69	-0.12	-0.42	-0.43
	평균오차율		1.01	0.48	0.13	0.11	0.27	0.08	0.07	0.35	0.06	-0.04	-0.26	-0.07
	RMSE		0.86	1.02	2.47	0.15	0.28	0.44	0.72	1.11	1.37	0.61	0.79	1.34
	MAE		0.61	0.76	0.77	0.08	0.21	0.31	0.52	0.84	0.90	0.39	0.48	0.94
	회귀 분석	α^1	0.504	0.716	0.918	0.760	0.788	0.947	0.587	0.778	0.967	1.705	1.201	1.114
		R^2	0.470	0.838	0.946	0.855	0.864	0.958	0.703	0.818	0.969	0.386	0.640	0.913
GARCH 모형 가격	평균		1.02	2.08	7.28	0.26	0.80	3.37	0.91	2.58	12.85	0.60	1.45	6.28
	평균오차		0.36	0.44	0.48	0.09	0.12	0.15	0.16	0.42	0.36	-0.16	-0.16	-0.1
	평균오차율		0.54	0.26	0.07	0.36	0.17	0.04	0.21	0.19	0.03	-0.21	-0.09	-0.02
	RMSE		0.56	0.67	1.39	0.15	0.22	0.43	0.41	0.76	0.99	0.34	0.41	0.52
	MAE		0.31	0.43	0.49	0.05	0.15	0.23	0.22	0.51	0.57	0.22	0.26	0.36
	회귀 분석	α^1	0.685	0.836	0.958	0.800	0.855	0.964	0.823	0.860	0.985	1.090	1.095	1.015
		R^2	0.532	0.880	0.962	0.886	0.895	0.962	0.755	0.889	0.986	0.743	0.891	0.982

주) 각 통화옵션의 시장가격과 모형가격 평균은 센트단위임.

(2) 통화별, 만기별 통화옵션가격 분석결과

① BP 옵션에 대한 분석결과

〈표 6〉은 BP 옵션에 대한 만기별 분석결과를 나타낸다. 두 모형의 모형가격은 시장가격보다 과대평가되고 있으며, 만기가 30일 이하인 근월 옵션에서 R^2가 가장 높게 나타나며, RMSE와 MAE도 근월 옵션에서 가격오차가 가장 작게 나타났다. 그리고 근월 옵션의 경우에도 GARCH 모형의 예측력이 Garman-Kohlhagen 모형보다우월하게 나타났다.

회귀분석결과, 손실옵션(OTM)에서 GARCH 모형과 Garman-Kohlhagen 모형은 가격오차가 매우 높게 나타나고 있어 모형의 유효성에 문제점이 제기된다. 그러나 손익분기옵션(ATM)에서 GARCH 모형의 R^2는 62.3%~81.3%로 Garman-Kohlhagen 모형의 65.43% ~75.8%보다 높게 나타났다. 그리고 이익옵션(ITM)에서는 GARCH 모형의 R^2가 92.9% ~ 93.5%로 Garman-Kohlhagen 모형의 81.2% ~ 90.7%보다 높게 나타났다. 이와 같이 손익분기옵션(ATM)과 이익옵션(ITM)에서는 두 모형의 가격오차가 낮게 나타나고 있어 실제가격을 잘 반영한다고 할 수 있다.

〈표 6〉 BP 옵션의 만기별 분석결과

구 분			만기까지 잔존기간								
			1 - 30일			31 - 90일			91 - 180일		
			OTM	*ATM*	*ITM*	*OTM*	*ATM*	*ITM*	*OTM*	*ATM*	*ITM*
시장가격	평균		0.44	1.21	6.94	0.64	1.86	6.20	0.97	3.22	7.55
G-K 모형 가격	평균		0.54	1.69	7.30	1.28	2.91	7.22	2.12	4.83	9.91
	평균오차		0.10	0.48	0.36	0.64	1.05	1.02	1.15	1.61	2.36
	평균오차율		0.22	0.39	0.05	1.00	0.56	0.16	1.18	0.50	0.31
	RMSE		0.29	0.71	1.04	0.78	1.17	1.18	1.22	1.69	2.47
	MAE		0.24	1.21	0.72	0.68	1.07	1.02	1.15	1.60	2.35
	회귀 분석	α^1	0.765	0.723	0.945	0.462	0.674	0.864	0.469	0.680	0.781
		R^2	0.299	0.758	0.907	0.185	0.723	0.887	0.587	0.653	0.812
GARCH 모형 가격	평균		0.43	1.48	7.17	1.02	2.47	6.80	1.56	3.97	8.62
	평균오차		0.01	0.27	0.23	0.38	0.61	0.60	0.59	0.75	1.07
	평균오차율		-0.02	0.23	0.03	0.59	0.32	0.09	0.60	0.23	0.14
	RMSE		0.21	0.51	0.96	0.57	0.77	0.77	0.72	0.98	1.39
	MAE		0.14	0.43	0.62	0.43	0.64	0.62	0.62	0.81	1.16
	회귀 분석	α^1	0.992	0.815	0.967	0.554	0.784	0.915	0.617	0.821	0.895
		R^2	0.536	0.813	0.915	0.367	0.790	0.929	0.541	0.622	0.835

BP 통화옵션에 대한 분석결과를 종합하면, 옵션의 잔존만기가 길수록 가격오차가 크게 나타났고, 옵션의 유형별로는 이익옵션(ITM)에서 가격오차가 가장 낮게 나타났다. 전반적으로는 GARCH 모형이 Garman-Kohlhagen 모형보다 가격오차가 낮게 나타났다.

② DM 옵션에 대한 분석결과

〈표 7〉은 DM 옵션에 대한 만기별 분석결과를 나타낸다. 두 모형의 모형가격은 시장가격보다 과대평가되고 있으며, 만기가 30일 이하인 근월 옵션에서 R^2가 가장 높게 나타나며, 근월 옵션에서도 GARCH 모형의 예측력이 Garman-Kohlhagen 모형보다 우월하게 나타났다. 전반적으로 평균오차, 평균오차율, MAE, RMSE가 옵션의 상태에 따라 GARCH 모형이 Garman-Kohlhagen 모형보다는 낮게 나타났다.

회귀분석결과, 손실옵션(OTM)에서 GARCH 모형의 R^2는 53.8%~80.6%로 Garman-Kohlhagen 모형의 45.4%~82.4%보다 다소 높게 나타났다. 두 모형 모두 가격오차가 높은 편이어서 모형의 유효성에 문제가 제기된다. 손익분기옵션(ATM)에서 GARCH 모형의 R^2는 82.5%~89.3%로 Garman-Kohlhagen 모형의 73.3%~82.3%보다 높다. 또한 이익옵션

〈표 7〉 DM 옵션의 만기별 분석결과

구 분			만기까지 잔존기간								
			1 - 30일			31 - 90일			91 - 180일		
			OTM	*ATM*	*ITM*	*OTM*	*ATM*	*ITM*	*OTM*	*ATM*	*ITM*
시장가격	평균		0.068	0.47	3.13	0.20	0.81	3.01	0.56	1.29	3.86
G-K 모형 가격	평균		0.097	0.55	3.27	0.29	1.07	3.41	0.79	1.74	4.25
	평균오차		0.29	0.08	0.14	0.09	0.26	0.40	0.23	0.45	0.39
	평균오차율		0.42	0.17	0.04	0.45	0.32	0.13	0.41	0.34	0.10
	RMSE		0.06	0.19	0.27	0.13	0.31	0.51	0.31	0.51	0.64
	MAE		0.04	0.14	0.20	0.11	0.28	0.43	0.27	0.45	0.51
	회 귀 분 석	α^1	0.630	0.843	0.971	0.686	0.772	0.900	0.718	0.745	0.939
		R^2	0.454	0.802	0.981	0.824	0.823	0.936	0.557	0.733	0.914
GARCH 모형 가격	평균		0.075	0.52	3.24	0.27	1.00	3.20	0.79	1.56	4.09
	평균오차		0.007	0.05	0.11	0.07	0.19	0.19	0.23	0.27	0.23
	평균오차율		0.10	0.10	0.03	0.35	0.23	0.06	0.41	0.21	0.06
	RMSE		0.04	0.15	0.24	0.12	0.25	0.47	0.33	0.39	0.71
	MAE		0.02	0.10	0.17	0.08	0.21	0.30	0.24	0.28	0.46
	회 귀 분 석	α^1	0.811	0.893	0.976	0.720	0.825	0.943	0.700	0.828	0.951
		R^2	0.538	0.861	0.984	0.806	0.828	0.909	0.546	0.695	0.879

(ITM)에서는 GARCH 모형의 R^2가 87.9%~98.4%로 Garman-Kohlhagen 모형의 91.4%~98.1%와 비슷하게 나타났다.

DM 통화옵션에 대한 분석결과를 종합하면, 옵션의 잔존만기가 길수록 가격오차는 크게 나타났고, 옵션의 유형별로는 이익옵션에서 가격오차가 가장 낮게 나타났다. 전반적으로는 GARCH 모형이 Garman-Kohlhagen 모형보다 가격오차가 낮게 나타났다.

③ FF 옵션에 대한 분석결과

〈표 8〉은 FF 옵션에 대한 만기별 분석결과를 나타낸다. 두 모형의 모형가격은 모두 시장가격보다 과대평가되고 있으며, 손실옵션(OTM)을 제외한 손익분기옵션(ATM)과 이익옵션(ITM)에서는 만기가 길수록 가격오차가 크게 나타났다. 평균오차, RMSE, MAE를 보면, GARCH 모형이 Garman-Kohlhagen 모형의 가격오차보다는 작게 나타났다.

회귀분석결과, 손실옵션(OTM)에서 GARCH 모형과 Garman-Kohlhagen 모형은 가격오차가 매우 높게 나타났다. 손익분기옵션(ATM)에서는 GARCH 모형의 R^2가 83.1%~88.9%로 Garman-Kohlhagen 모형의 69.8%~84.6%보다 높게 나타났다. 이익옵션(ITM)에서는 두 모형의 R^2가 매우 높지만, GARCH 모형의 R^2가 95.9%~99.1%로

〈표 8〉 FF 옵션의 만기별 분석결과

구 분			만기까지 잔존기간								
			1 - 30일			31 - 90일			91 - 180일		
			OTM	ATM	ITM	OTM	ATM	ITM	OTM	ATM	ITM
시장가격	평균		0.35	1.48	12.91	0.62	2.49	12.91	1.21	3.65	10.32
G-K 모형가격	평균		0.43	1.78	12.98	1.08	3.50	13.67	1.95	5.26	11.99
	평균오차		0.08	0.30	0.07	0.46	1.01	0.76	0.74	1.61	1.67
	RMSE		0.25	0.67	0.77	0.61	1.23	1.27	0.97	1.78	2.07
	MAE		0.18	0.48	0.83	0.50	1.08	0.91	0.87	1.65	1.80
	회귀분석	α^1	0.721	0.846	0.967	0.545	0.739	0.962	0.596	0.698	0.887
		R^2	0.264	0.814	0.982	0.612	0.748	0.976	0.322	0.634	0.886
GARCH 모형가격	평균		0.37	1.66	12.92	0.78	3.08	13.31	1.39	4.36	11.11
	평균오차		0.02	0.18	0.01	0.16	0.59	0.40	0.18	0.71	0.79
	RMSE		0.18	0.58	0.73	0.36	0.83	0.87	0.52	0.93	1.06
	MAE		0.13	0.38	0.51	0.24	0.69	0.55	0.38	0.75	0.87
	회귀분석	α^1	0.854	0.889	0.981	0.713	0.831	0.978	0.827	0.835	0.951
		R^2	0.485	0.844	0.991	0.524	0.847	0.988	0.405	0.787	0.959

Garman-Kohlhagen 모형의 88.6%~98.2%보다 더 높다.

FF 통화옵션에 대한 분석결과를 종합하면, 손실옵션을 제외한 손익분기옵션과 이익옵션에서 옵션의 잔존만기가 길수록 가격오차는 크게 나타났고, 옵션의 유형별로는 이익옵션에서 가격오차가 가장 낮게 나타났다. 전반적으로는 GARCH 모형이 Garman-Kohlhagen 모형보다 가격오차가 낮게 나타났다.

④ JY 옵션에 대한 분석결과

〈표 9〉는 JY 옵션에 대한 만기별 분석결과를 나타낸다. 다른 통화옵션과 달리, 두 모형의 모형가격이 모두 시장가격보다 과소평가되고 있다. 손실옵션(OTM)을 제외한 손익분기옵션(ATM)과 이익옵션(ITM)에서는 만기가 길수록 가격오차가 크게 나타났다. 평균오차, RMSE, MAE를 보면, GARCH 모형이 Garman-Kohlhagen 모형보다 가격오차가 낮게 나타났다.

회귀분석결과, 손실옵션(OTM)에서 두 모형의 가격오차는 매우 높고, R^2는 낮아서 모형의 유효성에 문제점이 제기되고 있다. 손익분기옵션(ATM)에서는 GARCH 모형의 R^2가 81.9%~83%로 Garman-Kohlhagen 모형보다 높게 나타났다. 이익옵션(ITM)에서는 GARCH 모형의 R^2가 93.2%~98.4%로 Garman-Kohlhagen 모형의 58.2%~97.6%보

〈표 9〉 JY 옵션의 만기별 분석결과

구 분			만기까지 잔존기간								
			1 - 30일			31 - 90일			91 - 180일		
			OTM	*ATM*	*ITM*	*OTM*	*ATM*	*ITM*	*OTM*	*ATM*	*ITM*
시장가격	평균		0.30	1.04	5.74	0.73	1.74	6.29	1.30	3.10	8.09
G-K 모형가격	평균		0.11	0.88	5.49	0.37	1.33	5.41	0.58	1.81	6.09
	평균오차		0.19	-0.16	-0.25	-0.36	-0.41	-0.88	-0.72	-1.29	-2.00
	RMSE		0.32	0.42	0.68	0.52	0.72	1.22	0.92	1.62	2.38
	MAE		0.17	0.26	0.47	0.38	0.53	0.97	0.73	0.95	2.02
	회귀분석	α^1	2.110	1.145	1.032	1.567	1.295	1.150	1.801	1.583	1.303
		R^2	0.372	0.752	0.976	0.165	0.582	0.944	0.120	0.259	0.586
GARCH 모형가격	평균		0.15	0.93	5.66	0.55	1.60	6.24	1.13	2.77	7.94
	평균오차		0.15	0.11	-0.008	-0.18	-0.14	-0.05	-0.17	-0.33	-0.15
	RMSE		0.28	0.35	0.52	0.34	0.39	0.39	0.39	0.63	0.64
	MAE		0.14	0.20	0.33	0.26	0.29	0.30	0.27	0.41	0.45
	회귀분석	α^1	1.493	1.100	1.010	1.148	1.092	1.016	1.065	1.123	1.016
		R^2	0.499	0.819	0.984	0.375	0.843	0.987	0.699	0.830	0.932

다 높게 나타났다.

JY 통화옵션에 대한 분석결과를 종합하면, 손실옵션을 제외한 손익분기옵션과 이익옵션에서 옵션의 잔존만기가 길수록 가격오차는 크게 나타났고, 옵션의 유형별로는 이익옵션에서 가격오차가 가장 낮게 나타났다. 전반적으로는 GARCH 모형이 Garman-Kohlhagen 모형보다 가격오차가 낮게 나타났다.

Ⅴ. 결 론

통화옵션의 가격을 정확하게 평가하기 위해서는 무엇보다도 먼저 기초통화별 환율의 확률분포 특성을 규정하는 것이 매우 중요하다. Melino-Turnbull(1990), Cao(1992), Taylor (1986), McCurdy-Morgan(1988), Hsieh(1989) 등은 환율의 확률분포가 정규분포를 이루는 것이 아니라 비정규적이고 꼬리부분이 두터운 leptokurtic한 형태를 이룬다는 연구결과를 제시하였으며, 최근에는 환율의 변동성을 모형화시키는데 GARCH 모형이 적합하다는 연구결과가 제시되고 있다. GARCH 모형에 기초한 옵션가격결정모형은 주식옵션에 먼저 적용되

었으나 Cao(1992)가 EGARCH 모형을 통화옵션에 처음으로 적용하였다.

본 논문에서는 영국 파운드(BP), 독일 마르크(DM), 프랑스 프랑(FF), 일본 엔(JY)에 대해 GARCH 모형을 적용하여 환율의 변동성을 추정하였다. 먼저, 환율변동에 대한 기본적 분석결과, Kolmogorov-Smirnov D 통계량에 의해 네 통화에서 정규성 가정이 기각되었고, 첨도는 정규분포보다 높게 나타났다. 또한 환율변동과 AR(1) 잔차, 자승값 및 절대값에 대한 Ljung-Box 검증결과, 환율변동의 시계열에 자기상관이 존재하는 것으로 나타났다. 환율변동과 AR(1) 잔차에 대한 검증에서는 일관된 결과가 나타나지는 않았으나 환율변동의 절대값과 자승값, AR(1) 잔차의 절대값, 자승값에 대한 검증에서는 자기상관이 높게 나타났다. 이러한 분석결과에 의해 GARCH 모형을 적용하여 환율의 변동성을 추정할 수 있는 근거를 얻을 수 있었다.

환율변동성의 추정은 GARCH 모형으로 최우추정기법을 적용하여 추정하였다. GARCH 모수는 네 개 통화에서 통계적으로 유의하였고, 변동성의 지속성이 강하게 나타났으며, 특히 GARCH(1,1) 모형이 환율변동성을 잘 설명하는 것으로 나타났다.

본 논문에서는 Duan(1995)의 GARCH 주식옵션가격결정모형을 통화옵션에 적용시켜 GARCH 통화옵션가격결정모형을 유도한 다음, 이를 Garman-Kohlhagen 모형과 유효성을 비교하여 다음과 같은 연구결과를 얻었다.

첫째, 옵션유형별로 GARCH 모형의 가격오차가 Garman-Kohlhagen 모형보다 일관되게 낮게 나타났다. 이는 GARCH 모형이 Garman-Kohlhagen 모형보다 통화옵션의 평가에 더 유용한 모형임을 의미한다.

둘째, GARCH 모형의 모형가격은 JY 옵션을 제외한 세 통화옵션에서 유형별로 시장가격보다 일관되게 과대평가되었다.

셋째, GARCH 모형의 가격오차가 Garman-Kohlhagen 모형보다 작게 나타났지만, 손실옵션에서는 GARCH 모형의 가격오차도 매우 크게 나타났다. 따라서 손실옵션에 대해서는 GARCH 모형도 시장가격을 잘 반영하지 못한다고 할 수 있다.

넷째, GARCH 모형과 Garman-Kohlhagen 모형에서 모두 옵션의 만기가 길수록 가격오차가 크게 나타났는데, 이는 Cao(1992), Knoch(1993)의 연구결과와 일치한다.

이상의 분석결과를 종합해 볼 때, 통화옵션의 가격을 정확하게 평가하기 위해서는 환율의 확률분포 특성인 꼬리부분이 두터운 leptokurtic한 분포를 가정하는 GARCH 모형이 더 우월하다고 할 수 있다. 그러나 GARCH 모형의 가격오차가 옵션의 유형 및 만기별로 상당한 편차를 보이고 있기 때문에 향후 모형을 더 발전시키는 과정에서 금리의 확률적 특성을 반영하거나 환율의 변동성에 점프특성을 도입해야 할 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

박병수, "GARCH 통화옵션가격결정모형의 실증분석", 경북대학교 경영학박사 학위논문, 1996.

Hull, J., Options, Futures, and Other Derivatives Securities, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1993).

Amin, K., and V. Ng, ARCH Process and Option Valuation, unpublished manuscript, University of Michigan, (1993).

Akgiray, V., "Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns : Evidence and Forecasts," *Journal of Business* Vol. 62, (1989), 55-80.

Baillie, Richard T., and Tim Bollerslev, "The Message in Daily Exchage Rates: A Conditional Variance Tale," *Journal of Business and Economic Statistics* 7, (1989), 297-305.

Berndt, E.K., B.H. Hall, R.E. Hall and J.A. Hausman, "Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models," *Annals of Economics and Social Measurement* No. 4, (1974), 653-665.

Biger N. and J.C. Hull, "The Valuation of Currency Options", *Financial Management*, (1983), 24-28.

Black F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, (1973), 637-659.

Bodurtha J. N., Jr. and G. R. Courtadon, "Tests of an American Option Pricing Model of on the Foreign Currency Options Market," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, (1987), 153-167.

Bollerslev, T., "A Conditional Heteroscedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return," *Review of Economics and Statistics* 69, (1987), 542-547.

Cao, Charles, "Pricing Foreign Currency Option With Stochastic Volatility," *University of Chicago working paper*, (November 1992).

Cao, C.Q., "Pricing Foreign Currency Option With Stochastic Volatility," Ph.D. Dissertation, *University of Chicago*, (August 1993).

Chaudhury, Mohammed M. and Jasson Z. Wei, "A Comparative Study of the GARCH(1,1) and Black-Scholes Option Prices", *Working Paper*, University of Saskatchewan, (1995).

Chesney M. and Louis Scott, "Pricing European Currency Options : A Comparison of the Modified B-S Model and a Random Variance Model," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* Vol. 24, (1989), 267-284.

Day, T.E., and C.M. Lewis. "Sock Market Volatility and the Information Content of Stock Index Options", *Journal of Econometrice*, (1992).

Duan, Jin-Chuan, "The GARCH Option Pricing Model," Department of Finance, McGill University, Canada, (1992).

Duan, Jin-Chuan, "The GARCH Option Pricing Model", *Mathematical Finance* 5(1), (1995), 13-32.

Duan, Jin-Chuan and T.G. Simonato, "Empirical Martingale Simulation for Asset Prices", *Working Paper*, Macgill University, (October 1995).

Engle R., "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica* (1982), 987-1007.

Engle R., and Bollerslev, "Modelling the Persistence of Conditional Variance," *Econometric Reviews* 51, (1986), 1-50.

Engle R., T. Hong, A. Kane, and J. Noh, "Arbitrage Valuation of Variance Forecasts." *Advanced Future and Option Research* 6, (1993), 393-415.

Engle R. and C. Mustafa, "Implied ARCH Models from Options Prices", *Journal of Econometrics* 52, (1992), 289-311

Garman M.B. and S.W. Kohlhagen, "Foreign Currency Option Values", *Journal of International Money and Finance*, (1983), 231-238.

Grabbe J. Orlin, "The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange", *Jounal of International Money and Finance*, (1983), 239-253.

Harrison J., and D. Kreps, "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets," *Journal of Economics* Theory 20, (1979), 381-408.

Heyen, R., A. Kemna, and T. Vorst, "Analysis of the Term Structure of Implied Volatility," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* Vol 29, (1994), 31-56.

Hillard Jimmy E., Jeff Madura, and Alan L. Tucker, "Currency Option Pricing with Stochastic Domestic and Foreign Interest Rates," *Journal of* *financial and Quantitative Analysis*, (1991), 139-151.

Hsieh, David A., "Modelling Heteroscedasticity in Daily Foreign Exchange Rates Changes," *Journal of Business and Economic Statistics* 7, (1989), 307-317.

Hull J., and A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance*, (1987), 281-300.

Johnson, H., and D. Shanno. "Option Pricing when the Variance is Changing," *Journal of financial and Quantitative Analysis*, 22, (June 1987), 143-151.

Kallsen, J. and M. Taqqu, "Option Pricing in ARCH-Type Models," unpublished manuscript, Department of Mathmatics, Boston University, (1994).

Kang, Taehoon and B.W. Brorsen, "Conditional Heteroskedasticity, and Option Pricing," *Journal of Futures Markets* Vol. 15, No. 8, (December 1995), 901-927.

Knoch, Hans-Jurgen, "The Pricing of Foriegn Currency Options," Ph.D. Dissertation *Yale University*, (May 1992).

Ljung, G.M., and G.E.P. Box, "On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models," *Biometrika* Vol. 65, (1978), 297-303

Mandelbrot, B.B., "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business* 36, (1963), 394-419.

McCourdy, T.H. and Leuan Morgan, "Testing the Martingale Hypothesis in Deutsche Mark Futures with Models Specifying the Form of the Heteroscedasticity," *Journal of Applied Econometrics* 3, (1988), 187-202.

Melino, Angelo and Stuart Turnbull, "Pricing Foreign Currency Options with Stochastic Volatility," *Journal of Econometrice* 45, (1990), 239-265.

Nelson, D.B., "ARCH models as Diffusion Approximations," *Journal of Econometrics* Vol. 45, (1990), 7-38.

Nelson, D.B., "Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns : A New Approach," *Econometrica* Vol. 59, (1991), 347-370.

Shastri K. and Kishore Tandon, "Valuation of Currency Options: Some Empirical Tests," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, (1986), 144-160.

Scott, L.O. "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and an Applications", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22, (Dec. 1987), 419-438.

Taylor, S., *Modelling Financial Time Series*, John Wiley & Sons, (1986).

Wiggins, J.B. "Option Values under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates." *Journal Financial Economics* 19, (1987), 351-372.