

# 우리나라 債券收益率의 異分散性에 관한 연구

장 국 현\*·이 진\*\*

## (요 약)

본 연구에서는 우리나라 채권시장의 변동성 분석과 추정을 위하여 Markov-Switching ARCH (SWARCH) 모형과 GMM 모형 및 I-GARCH 모형을 적용하였다. 관측된 자료는 1993년 1월에서부터 1996년 4월까지의 주별 91일물 양도성 예금증서 수익률이다. 본 연구에서 채권 수익률 분산 과정의 추정을 위해 사용하는 SWARCH 모형은 경제나 채권시장의 국면전환으로 말미암아 채권수익률의 변동성이 이질적인 분포에서 오는 경우 서로 다른 분산 국면의 확률적 식별이 가능할 뿐만 아니라 지속성이 GARCH모형보다 작아서 조건부 변동성의 예측력이 뛰어난 모형으로 알려져 있다. 또한 SWARCH 모형은 베이즈이론에 의한 확률의 개념으로 국면전환을 추정하기 때문에 주관적인 국면전환시점의 판단이 불필요하다는 장점을 가진다. 여러 가지 모형들의 추정결과 I-GARCH 모형과 SWARCH 모형등이 우리나라 단기 채권수익률의 조건부 변동성을 비교적 잘 설명해 내는 것으로 나타났으며 우리나라 단기 채권시장은 1993년 6월부터 1993년 12월초까지, 1994년 7월경부터 1995년 5월경까지 비교적 높은 변동성을 유지하였으며 그후로는 변동성이 등락을 계속하는 것으로 추정되었다. 본 연구의 결과 아직은 대동단계에 머물러 있는 한국 채권시장의 시계열적 특성을 체계적으로 문서화하고 정교하고 다양한 최근 계량기법을 체계적으로 정리하고 응용하여 시장 참가자들의 기회비용과 시행착오의 기간을 단축시키는데 도움을 줄 수 있을 것으로 기대된다.

## I. 서 론

1996년 5월초에 개설된 주가지수선물시장과 함께 우리나라에도 파생상품시장의 문이 열리게 되었다. 주가지수선물에 이어 주가지수옵션과 금리선물, 통화선물, 상품선물시장도 곧 개설될 예정으로 있다. 이와같은 파생상품의 가격을 결정하는 요인으로는 기초자산의 가격, 행사가격, 만기까지의 기간, 무위험이자율, 기초자산의 변동성등이 있는데 변동성의 경우에는 실제로 관측이 되지 않으므로 일반적으로 내재된 변동성을 사용하고 있다. 그러나 여러 가지 현실

\* 광주대학교 경상대학 금융학과

\*\* 한양대학교 상경대학 경제학부

을 잘 반영하는 모형으로 부터 추정된 변동성과 내재된 변동성에는 차이가 있을 수 있으므로 선진국의 여러 투자기관에서는 변동성예측모형의 개발에 많은 노력을 기울이고 있는 것으로 알려져 있다.

기초자산의 변동성이 일정하지 않고 시간에 따라서 변한다는 시간가변적 변동성을 주장한 대표적인 연구로는 Bollerslev(1986)을 들 수 있다. 그 이후로 금융시장에서 기초자산수익률의 조건부 변동성을 추정한 수 많은 연구들은 Bollerslev, Chou and Kroner(1992)의 서베이에 잘 나타나 있다. 우리나라에서 주식수익률의 조건부 변동성을 추정하고 분석한 연구로는 Kim and Chang(1996), 장국현·이진(1996) 등을 들 수 있다. 그러나 아직까지 태동단계에 머물러 있는 우리나라의 채권수익률 조건부 변동성을 본격적으로 추정하고 분석한 연구는 그리 많지 않다.

한편 Cox, Ingersoll and Ross(이하 CIR, 1985)은 경제주체의 효용극대화조건과 시장청산 조건(market clearing condition)을 만족하는 균형 이자율이 평균 회귀 제곱근 과정을 따르는 1가지 요소에 의한 채권가격결정모형을 제시했다. 그들의 이론에 의하면 이자율과 변동성이 정의 상관관계를 갖고 만기가 다른 모든 채권의 수익률간에는 완전한 상관관계를 갖는다. 실증분석에서는 균형이자율의 대변수로서 시장에서 관측 가능한 가장 만기가 짧은 이자율을 사용하게 된다. 그 결과 만기가 짧은 채권의 수익률 곡선은 잘 설명하나 만기가 긴 채권의 수익률은 잘 설명하지 못하는 것으로 알려졌다.

이런 단점을 극복하기 위해 여러가지 요인에 의한 이자율 기간구조이론이 제시되었는데 그 중 하나로서 Longstaff and Schwartz(1992)는 CIR(1985)에 변동성을 추가한 2가지요소에 의한 이자율 기간구조이론을 제시하였다. CIR(1985)에서는 이자율이 확률과정을 따르고 변동성은 결정된 경로(deterministic process)를 갖으나 Longstaff and Schwartz(1992)에서는 이자율과 변동성은 정의 상관관계를 갖으며 변동성도 확률변동성과정(stochastic volatility process)을 따른다. 변동성을 설명변수로 추가함으로써 CIR(1985)모형이 만기가 긴 채권의 수익률곡선을 잘 설명하지 못하는 단점을 극복하고자 했다.

본 연구에서는 우리나라 채권수익률 변동성의 추정을 위하여 1993년 1월부터 1996년 4월까지의 주별 양도성예금증서(91일물) 수익률을 사용하여 GMM모형, Integrated GARCH(I-GARCH)모형 및 Markov switching ARCH(SWARCH)모형 등을 추정하고자 한다. 일반적으로 이분산의 특징을 갖는 조건부 분산의 추정에는 Hansen(1982)의 GMM, Bollerslev(1986)의 GARCH등이 많이 쓰이고 있다. 조건부 분산의 추정에는 GMM보다 GARCH모형이 더 유용하다는 것이 알려져 있다. 그러나 GARCH모형은 과거의 정보가 시장 위협에 미치는 영향(지속성:Persistence)이 아주 길어서 현재의 정보가 상대적으로 적은 비율 만큼 반영되어서 시장에 예측치 못한 큰 충격이 발생할 경우는 실제 시장의

위험과 예측된 위험이 차이가 커진다. 이런 단점을 보완한 분산이 국면전환을 하는 Hamilton and Susmel(1994)의 Markov-Switching ARCH (SWARCH) 모형도 조건부 분산을 추정하는데 유용한 기법으로 소개되고 있다. 본 연구에서 채권 수익률 분산과정의 추정을 위해 사용하는 SWARCH모형은 경제나 채권시장의 국면전환으로 말미암아 채권수익률의 변동성이 이질적인 분포에서 오는 경우 서로 다른 분산 국면의 확률적 식별이 가능할 뿐만 아니라 지속성이 GARCH모형보다 작아서 조건부 변동성의 예측력이 뛰어난 모형으로 알려져 있다. 또한 SWARCH 모형은 베이즈이론에 의한 확률의 개념으로 국면전환을 추정하기 때문에 주관적인 국면전환시점의 판단이 불필요하다는 장점을 가진다.

본 연구의 구성은 다음과 같다. 제2장에서는 우리나라 채권수익률 조건부 변동성을 추정하기 위한 GMM, I-GARCH, SWARCH모형 등과 추정방법을 간단하게 소개하고 제3장에서는 실증결과를 논의하고자 하며 요약과 결론 및 본 연구에서 사용하는 방법론의 응용방안은 제4장에서 살펴보기로 한다.

## II. 채권수익률 변동성 추정모형

본 장에서는 우리나라 채권수익률 변동성의 추정을 위한 GMM모형과 I-GARCH모형 및 SWARCH모형을 간단하게 소개하고자 한다.

### 2.1 GMM 모형

Hansen(1982)의 Generalized Method of Moments(GMM)은 다음의 장점을 갖고 있다. 첫째, 시계열 자료의 분포에 대한 가정이 필요 없으며 시계열 자료가 안정적이고 모집단의 적률(moment), 혹은 직교조건을 정의할 수만 있으면 된다. 둘째로 잔차에 이분산이 존재하더라도 GMM 추정량과 표준편차는 일치 추정량이라는 것이다. Chan, Karolyi, Longstaff and Sanders(1992)는 Cox, Ingersoll and Ross(1985 a)의 평균회귀 제공근과정을 포괄하는 일반적인 모형을 GMM을 이용한 이산시간 모형으로 제시하였다.

$$\begin{aligned}
 dr &= k(\theta - r)dt + \sigma r' dz \\
 r_{t+1} - r_t &= \alpha + \beta r_t + \epsilon_{t+1} \\
 E[\epsilon_{t+1}] &= 0 \quad E[\epsilon_{t+1}^2] = \sigma^2 r_t^{2\alpha}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$\theta$ 를 추정모수인  $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ 라고 할 때 GMM의 직교조건,  $f_t(\theta)$ 는 다음과 같이 정의 된다.

$$f_t(\theta) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ \varepsilon_{t+1} r_t \\ \varepsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 r_t^{2r} \\ (\varepsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 r_t^{2r})^2 r_t \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

표본의 적률과 모집단의 적률은 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$E[f_t(\theta)] = g_T(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_t(\theta) \quad (2.3)$$

그러면 우리는 모수( $\theta$ )를 추정하기 위해서 아래의 목적함수를 최소화하는  $\theta$ 를 구할 수 있다.  $q$ 는 직교조건 수이고  $k$ 는 추정모수의 수이다.

$$J_r = g_T'(\theta) W_T(\theta) g_T(\theta) \sim \chi^2_{q-k} \quad (2.4)$$

목적함수,  $J_T(\theta)$ 를 최소화하는 것은 아래의 연립방정식을 푸는 것과 같다.

$$\frac{\sigma' J_T(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial g_T(\theta)}{\partial \theta} W_T(\theta) g_T(\theta) = 0 \quad (2.5)$$

$W_T(\theta)$ 는 양반정부호행렬로서 과대 식별의 경우 추정모수는  $W_t(\theta)$ 에 따라 민감하게 반응하게 된다. 또한 표본 집단으로 부터는  $W_T(\theta)$ 가 음정부호를 갖을 수도 있어서 분산이 음이 나오는 경우가 발생하게 된다. 이를 방지하기 위해서 Newy-West(1987) 추정량을 사용할 수도 있다. 분산-공분산 행렬은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} W_T(\theta) &= S_0^{-1}(\theta) \\ S_0(\theta) &= E[f_t(\theta) f_t'(\theta)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{분산행렬} = \frac{1}{T} \left[ \frac{\partial g_T(\theta)'}{\partial \theta} S_0^{-1}(\theta) \frac{\partial g_T(\theta)}{\partial \theta} \right]^{-1}$$

## 2.2 GARCH 모형

수익률 생성과정이 AR(1)과정을 따르고 잔차의 조건부 분산이 그 전기의 조건부 분산과 잔차제곱의 함수로 나타나는 일반적인 GARCH(1,1)과정은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} R_t &= \alpha + \beta R_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, h_t) \\ h_t &= \gamma_0 + \gamma_1 h_{t-1} + \gamma_2 \epsilon_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

이때 여기서  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ 는 상수로  $\gamma_0 > 0, \gamma_1 + \gamma_2 < 1$ 의 조건을 만족한다. 이때 조건부 분산의 예측은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} E(h_{t+1}) &= \gamma_0 + \gamma_1 h_t + \gamma_2 E(\epsilon_t^2) \\ &= \gamma_0 + (\gamma_1 + \gamma_2) h_t \\ \\ E(h_{t+m}) &= \gamma_0 + \gamma_1 h_{t+m-1} + \gamma_2 E(\epsilon_{t+m-1}^2) \\ &= \gamma_0 + (\gamma_1 + \gamma_2) h_{t+m-1} \\ &\vdots \\ &= \frac{\gamma_0}{1 - (\gamma_1 + \gamma_2)} + (\gamma_1 + \gamma_2)^m h_t \end{aligned} \quad (2.8)$$

그러므로 조건부 분산의  $m$  기간 예측 값은 식(2.8)에 의해  $(\gamma_1 + \gamma_2)^m = \lambda^m$ 의 속도로 감소하게 된다. 여기서  $\lambda$ 는 지속성(persistence)의 척도이다.

## 2.3 SWARCH 모형

국면 혹은 상태를 나타내는  $S_t$ 는 관측되지 않는 확률 변수로서 1에서  $K$ 까지의 값을 갖는다.  $K$ 는 상태의 수이다.  $S_t$ 가 1차 Markov chain을 따르면  $t$ 시점에  $j$ 상태일 확률은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} P(S_t = j | S_{t-1} = i) &= P_{ij} \\ i, j &= 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & \cdots & P_{K1} \\ P_{12} & P_{22} & \cdots & P_{K2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P_{1K} & P_{2K} & \cdots & P_{KK} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$P_{ij}$ 는 전이확률로서  $t-1$ 시점에  $i$ 상태라는 조건에서  $t$ 시점에  $j$ 상태일 확률을 의미하고 식 (2.10)의  $P$ 는 전이행렬이다. 전이행렬  $P$ 의 각 열의 합은 1이다.

만일  $y_t$ 가 ARCH( $q$ ) 과정을 따르면  $y_t$ 는  $q$ 기전까지의  $y_t$ 값과  $q$ 기전까지의  $S_t$  값에 따르는 조건부 분포로 나타낼 수 있다.

$$f(y_t | s_1, s_{t-1}, \dots, s_{t-q}, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-q}) \quad (2.11)$$

이때 최우범으로 모수를 추정하는 방법이 Hamilton(1989)에 의해 제시되었다.

조건부 분산이 저분산 국면과 고분산 국면으로 전환하는 Markov Switching ARCH<sup>1)</sup>(이하 SWARCH)모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R_t &= \alpha + \beta R_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &= \sqrt{g_{s_t}} \tilde{u}_t, \quad \tilde{u}_t = \sqrt{h_t} v_t, v_t \sim N(0,1) \end{aligned} \quad (2.12)$$

이때  $\tilde{u}_t$ 는 ARCH( $q$ )과정을 따른다. 그러므로

$$h_t = \gamma_0 + \gamma_1 \tilde{u}_{t-1}^2 + \gamma_2 \tilde{u}_{t-2}^2 + \cdots + \gamma_q \tilde{u}_{t-q}^2 \quad (2.13)$$

예를 들어 변동성의 국면이 3상태이고  $\tilde{u}_t$ 가 ARCH( $q$ )과정을 따를 경우, 저분산 상태 ( $S_t=1$ )일때의 변동성의 상대적 크기를 나타내는 변수를  $g_1 = 1$ 로 고정시켰을 때 중간 분산 국면( $S_t=2$ )과 높은 분산 국면( $S_t=3$ )의 변동성의 상대적 크기는 각각  $g_2$ 와  $g_3$ 으로 나타난다.  $V_t \sim N(0,1)$ 이므로 식(2.12)로부터 2번째 상태의 잔차의 조건부 분산은 분산이  $g_2 h_t$ 인 정규분포에서 추출되는 것을 의미한다. 그러므로  $K$ 개의 국면을 갖는 모형에서는 식(2.12)에 따르는  $K$ 개의 서로 다른 분산을 갖는 정규분포,  $N(0, g_i h_t)$ ,  $i=1 \sim k$ 로부터 잔차가 추출 되는

1) 통상적인 ARCH( )는 유한한 시차의 GARCH( $p, q$ )로 바꿀 수 있다. 그러나 SWARCH모형은 조건부 분산의 과정을 GARCH로 바꿀 수 없다. 왜냐하면  $Y_t$ 의 조건부 분포는 유한한 과거의 값,  $Y_t, S_t$ 에 영향을 받기 때문이다. 자세한 것은 Hamilton & Susmel(1994)을 참고하기 바람.

것이다. 이를  $\epsilon_t \sim \text{SWARCH}(K, q)$ 라고 하며 잔차( $\epsilon_t$ )의 조건부 분산은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} & E(\epsilon_t^2 | s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q}, \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-q}) \\ &= g_{s_t} \times (\gamma_0 + \gamma_1 \frac{\epsilon_{t-1}^2}{g_{s_{t-1}}} + \dots + \gamma_q \frac{\epsilon_{t-q}^2}{g_{s_{t-q}}}) \\ &= \sigma^2(s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q}) \end{aligned} \tag{2.14}$$

SWARCH(K, q) 모형에서의 우도함수는 부록에 기술하였다.

(1) 예측(forecasting)

조건부 분산의 m기간 예측은 아래의 과정을 따른다.

$$\begin{aligned} & E(\epsilon_{t+m}^2 | s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}, \tilde{u}_t, \tilde{u}_{t-1}, \dots, \tilde{u}_{t-q+1}) \\ &= E(g_{s_{t+m}} \times \tilde{u}_{t+m}^2 | s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}, \tilde{u}_t, \tilde{u}_{t-1}, \dots, \tilde{u}_{t-q+1}) \\ &= E(g_{s_{t+m}} | s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}) \times E(\tilde{u}_{t+m}^2 | \tilde{u}_t, \tilde{u}_{t-1}, \dots, \tilde{u}_{t-q+1}) \end{aligned} \tag{2.15}$$

$S_t$ 가 1차 Markov chain을 따르면 식(2.15)의 첫 항은 아래와 같다.

$$E(g_{s_{t+m}} | s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}) = \sum_{j=1}^k g_j P(s_{t+m} = j | s_t) \tag{2.16}$$

이를 행렬로 표시하면 아래와 같다.

$$E(g_{s_{t+m}} | s_t = j) = g' P^m I_k \tag{2.17}$$

m기간 앞의 전이확률은 전이행렬, P를 m제곱하여 얻는다.

$$P^m = \begin{bmatrix} P(S_{t+m} = 1 | s_t = 1) & P(S_{t+m} = 1 | s_t = 2) & \dots & P(S_{t+m} = 1 | s_t = K) \\ P(S_{t+m} = 2 | s_t = 1) & P(S_{t+m} = 2 | s_t = 2) & \dots & P(S_{t+m} = 2 | s_t = K) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P(S_{t+m} = K | s_t = 1) & P(S_{t+m} = K | s_t = 2) & \dots & P(S_{t+m} = K | s_t = K) \end{bmatrix}$$

벡터  $g' = [g_1, g_2, \dots, g_k]$ 는 각 국면에서의 변동성의 상대적 크기를 나타내고  $I_k$ 는  $(K \times K)$

항등행렬이다. 식(2.15)의 2번째 항은 식(2.18)과 같다.

$$\begin{aligned}
 & E(\tilde{u}_{t+m}^2 | \tilde{u}_t, \tilde{u}_{t-1}, \dots, \tilde{u}_{t-q+1}) \\
 &= \gamma_0 + \gamma_1 \tilde{u}_t^2 + \gamma_2 \tilde{u}_{t-1}^2, \dots, + \gamma_q \tilde{u}_{t-q+1}^2 \quad \text{for } m=1 \\
 &= \gamma_0 + \gamma_1 h_{t+m-1} + \gamma_2 h_{t+m-2}, \dots, + \gamma_q h_{t-q} \quad \text{for } m=2,3,\dots \\
 & E(\tilde{u}_{t+m}^2 | \Omega_t) = h_{t+m}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

이미 언급한 바와 같이  $\varepsilon_t = \sqrt{g_s} \tilde{u}, \tilde{u} = \sqrt{h_t} v_t, v_t = N(0,1)$ 이므로 조건부 분산의 예측치 또한  $S_t$ 와  $\varepsilon_t$ 의 함수이다. 따라서

$$\begin{aligned}
 & E(\tilde{u}_{t+m}^2 | \tilde{u}_1, \tilde{u}_{t-1}, \dots, \tilde{u}_{t-q+1}) \\
 &= h_{t+m}(s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}, \varepsilon_1, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q+1})
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

그러므로 식(2.15)는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & E(\varepsilon_{t+m}^2 | s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}, \tilde{u}_1, \tilde{u}_{t-1}, \dots, \tilde{u}_{t-q+1}) \\
 &= (g' P^m I_k) \times h_{t+m}(s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}, \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q+1})
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

## (2) 지속성

식(2.15)의 2번째 항을 다시쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & E(\tilde{u}_{t+m}^2 | \tilde{u}_1, \tilde{u}_{t-1}, \dots, \tilde{u}_{t-q+1}) \\
 &= \gamma_0 + \gamma_1 h_{t+m-1} + \gamma_2 h_{t+m-2}, \dots, + \gamma_q h_{t+m-q} \\
 &= c_1 \lambda^m + c_2 \lambda^m + \dots + c_q \lambda^m
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

이때  $\lambda$ 는 식(2.22)의 행렬의 특성근(eigenvalues)이고 이 중 가장 큰 값이 지속성의 척도이다.

$$\begin{bmatrix}
 \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{q-1} & \gamma_q \\
 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 1 & 0
 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$



### Ⅲ. 실증 분석

본 장에서는 제2장에서 소개한 모형들을 이용하여 우리나라 채권수익률 조건부 변동성을 추정 한 결과를 제시하고자 한다. 단기이자율 변동성의 추정을 위하여 본 논문에서는 Chan, Karolyi, Longstaff and Sanders(1992)의 이자율확률과정을 이용하였다.<sup>2)</sup>

#### 3.1 자료

실증 분석에는 93년 1월에서 96년 4월까지의 매주 수요일 양도성예금증서(91일물) 수익률 관 측치를 사용하였다. <표 3.1>은 우리나라 단기채권수익률을 대표할 수 있는 91일물 양도성예 금증서수익률과 그 일차차분의 기초통계량을 나타내고 있다.

<표 3.1> 실증분석자료의 기초통계량

	평균	표준편차	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$
$\gamma_t - \gamma_{t-1}$	-0.000227	0.004459	-0.124	0.250	0.020
$\gamma_t$	0.134099	0.014163	0.940	0.892	0.822

주 :  $\rho_i$  : 자기상관계수,  $\gamma$  : CD(91일물)수익

#### 3.2 실증분석결과

##### 3.2.1 GMM모형 추정결과

<표 3.2>에서는 Chan, et al.(1992)의 예측방정식을 이용하여 조건부변동성을 추정한 결과 가 나타나 있다.

추정 결과에 의하면  $\gamma$ 를 제외한 나머지 변수는 통계적으로 유의성이 없는 것으로 보인다. 그러나 Chan, et al.<sup>3)</sup>(1992)이 T-bil수익률을 대상으로 실증 분석한 결과에서도  $\gamma$ 이외의 변

2) 본 논문의 모형은 Chan, et al.(1992)에서 사용한 이자율 예측 방정식을 적용하여 2차 적률조건에 대한 가정을 GMM, GARCH, SWARCH 등으로 바꿔 추정, 비교한 것이다.

3) Chan, et al.(1992)의 추정결과에서는  $\gamma=1.4999$  이고  $\sigma^2=1.6704$  로 추정하였다. 또한 Chan, et al.(1992)은 기존의 모형은  $0 \leq \gamma \leq 1$ (Cox, Ingersoll and Ross모형은 ( $\gamma = 0.5$ ))로 제약하여 조건부 분산이  $\sigma^2$ 에 주된 영향을 받는 것으로 추정하였으나 이러한 제약된 모형보다는  $\gamma$ 에 제약이 없이 1보다 큰 값을 허용하는 모형이 이자율의 조건부 변동성 추정에 더 좋은 결과를 가져온다고 주장하였다.

〈표 3.2〉 GMM 모형 추정 결과

$\alpha$	$\beta$	$\sigma^2$	$\gamma$
0.0036	-0.0292	1.1555	2.7747*
(1.6089)	(1.6130)	(0.3932)	(4.1435)

주 : ( )안은 t값을 나타내고 \*는 5%구간에서 유의적임.

$$\text{GMM 모형 : } \gamma_t - \gamma_{t-1} = \alpha + \beta r_{t-1} + \varepsilon_t, \quad E[\varepsilon_t] = 0, \quad E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2 \gamma_{t-1}^2$$

〈표 3.3〉 I-GARCH(1, 1) 모형 추정 결과

$\alpha$	$\beta$	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
0.2496	-0.0264*	0.0225*	0.5231*	0.4769
(1.5161)	(1.9998)	(2.8351)	(6.1735)	

주 : ( )안은 t값을 나타내고 \*는 5%구간에서 통계적으로 유의적임.

I-GARCH 모형 :

$$\gamma_t - \gamma_{t-1} = \alpha + \beta r_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \gamma_0 + \gamma_1 h_{t-1} + \gamma_2 \varepsilon_{t-1}^2$$

$$\text{단, } \gamma_1 + \gamma_2 = 1$$

수는 통계적으로 유의적이지 못하였으며 그들은 이자율의 조건부 변동성이  $\gamma$ 에 민감하게 반응한다고 주장하였다. 그 이유는 조건부 분산의 직교 조건을 정의할 때 현물이자율의  $\gamma$ 제곱과  $\sigma^2$ 에 의존하는 함수로 구성하기 때문이다.  $\gamma$ 는 지수로 조건부 분산에 영향을 주고  $\sigma^2$ 는 비례적으로 조건부 분산에 영향을 주므로  $\sigma^2$ 보다는  $\gamma$ 의 값에 따라 조건부 분산이 더 민감하게 반응하게 되는 것이다.

### 3.2.2 I-GARCH모형 추정결과

〈표 3.3〉에는 I-GARCH(1, 1)모형을 이용하여 우리나라 단기채권수익률의 시간가변적 변동성을 추정한 결과가 제시되어 있다.

GARCH(1, 1)의 추정결과  $\gamma_1 + \gamma_2 > 1$ 로서 조건부 분산의 과정이 안정적이지 않은 것으로 나타났다. 이런 경우 잔차의 비조건부 분산이 무한대이므로 covariance-stationary 과정이 아니다. 하지만 잔차의 비조건부 분산이 모든 시점에 동일한 strictly stationary 과정에서 잔차가 추출된다고 가정한다면  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ 으로 제약하여 Integrated GARCH를 이용하여 추정할 수 있다.

〈표 3.4〉 SWARCH(2, 2) 모형 추정 결과

$\alpha$	$\beta$	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\sqrt{g_2}$	$\rho_{11}$	$\rho_{22}$
0.0247	-0.0056	0.0158	0.1513	0.4608*	3.2040*	0.90857*	0.89400*
(0.1322)	(0.3793)	(1.5157)	(0.7093)	(2.3048)	(2.0285)	(3.3757)	(3.3268)

주 : ( )안은 t값을 나타내고 \*는 5%구간에서 통계적으로 유의적임.

SWARCH(2, 2) 모형:

$$r_t - r_{t-1} = \alpha + \beta r_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{g_t} u_t, u_t = \sqrt{h_t} v_t, v_t \sim N(0, 1)$$

$$h_t = r_0 + r_1 \tilde{u}_{t-1}^2 + r_2 \tilde{u}_{t-2}^2$$

$\sqrt{g_2}$  : 고분산 국면(St=2)일때의 변동성의 상대적 크기 (g1 = 1로 제약)

### 3.2.3 SWARCH(2, 2) 모형 추정결과

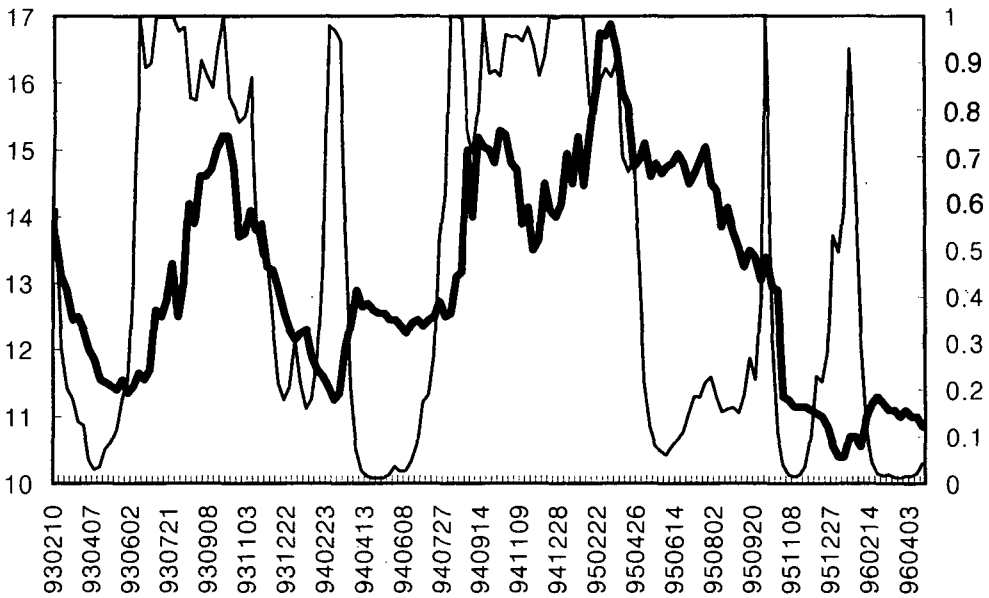
〈표 3.4〉에서는 SWARCH(2, 2)모형을 이용하여 이자율 예측방정식의 모수와 시간가변적 변동성을 추정한 결과들이 각 열별로 나타나 있다.

위에서 추정한 결과를 이용하여 알아본 전이행렬은 다음과 같다.

$$P = \begin{bmatrix} 0.90857 & 0.10600 \\ 0.091429 & 0.89400 \end{bmatrix}$$

저분산 국면과 고분산 국면의 확률을 나타내는 변수인  $P_{11}, P_{22}$ ,  $\sqrt{g_2}, \gamma^2$ 가 유의적으로 추정되어서 CD수익률의 변동성과정은 위의 전이행렬하에서  $N(0, g_1 h_t)$ 와  $N(0, g_2 h_t)$ ,  $\sqrt{g_1} = 1$ ,  $\sqrt{g_2} = 3.2040$ 인 분포에서 CD 수익률 생성식의 잔차가 추출되는 모형이라 할 수 있다 SWARCH에서는 ARCH효과를 변동성의 국면 전환으로 어느 정도 설명하기 때문에 ARCH 계수의 시차를 줄일 수 있으나 2번째 시차의 ARCH계수가 유의적인 것을 보면 이자율의 과정과 마찬가지로 이자율의 변동성 과정도 지속성이 긴 과정이라는 것을 알 수 있다. 이는 GARCH로는 이자율 변동성 추정에 실패하고 Integrated GARCH를 이용할 수 밖에 없었던 결과와 상응하는 것이기도 하다.

[그림 3.1]은 고분산 상태일 확률과 CD 수익률 과정을 나타낸 것이다. 분석 기간이 짧아서 항구적인 구조 변동이라기 보다는 시장 상황의 변화에 따른 단기 변동을 나타내는 것으로 보인다. [그림 3.1]에 의하면 고분산 국면일 확률의 변화와 이자율의 움직임이 상당부분 유사함을 보이고 있는데 이는 이자율 자체의 과정이 이자율의 변동성에 대한 정보를 상당부분 가지고 있다는 것을 의미한다. Cox, Ingersoll and Ross(1985)와 Chan, et al.(1992)가 이

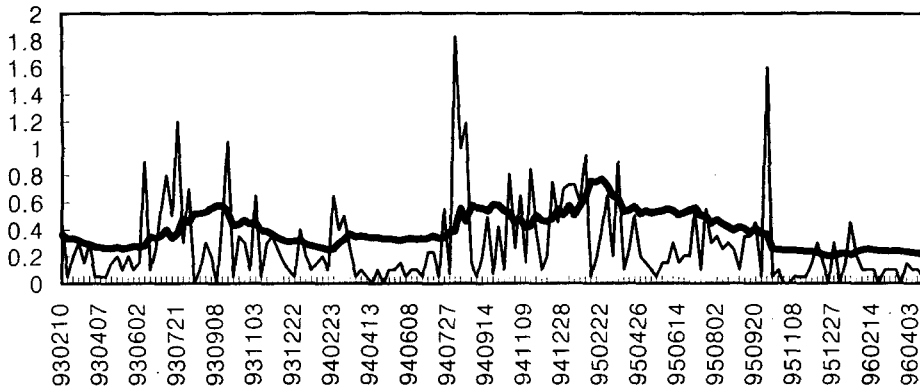


\*굵은 선 : CD수익률, 실선 : 고분산의 확률

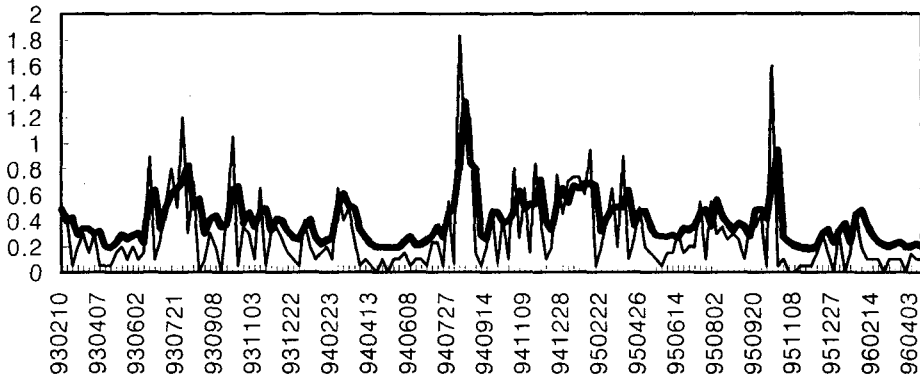
(그림 3.1) SWARCH(2,2) 모형에 근거한 고분산의 확률과 CD수익률

자율 변화의 변동성을 현물 이자율의 함수로 표현한 것은 이처럼 이자율 과정과 이자율 변화의 변동성이 유사한 과정을 갖고 있기 때문인 것으로 풀이된다.

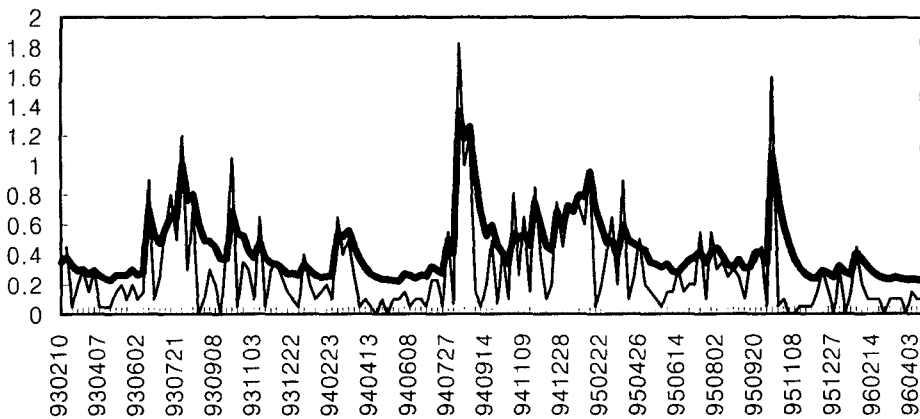
한편 (그림 3.2)는 각 모형에서 추정된 우리나라 단기 채권수익률의 조건부 변동성을 나타내고 있다. 저분산 국면과 고분산 국면의 두 가지 분포에서 CD 수익률과정의 잔차를 추출하는 SWARCH(2,2) 모형의 경우 이자율 변동성의 국면전환을 보여주고 있으며 실제 이자율의 변동성과 상당히 유사하게 조건부 변동성을 추정해 내는 것으로 보인다. 한편 CD 수익률의 변동성이 큰 기간에서는 SWARCH(2,2) 모형이 I-GARCH모형보다 지속성이 짧아서 시장의 정보를 신속하게 반영하는 것을 볼 수 있다. I-GARCH 모형은 비교적 실제 변동성에 유사하게 조건부 변동성을 추정하는 것으로 보이나 지속성이 길다. 이에 비해 GMM에 의한 변동성의 사후적 예측은 지속성이 비교적 길뿐만 아니라 변동성이 큰 기간에는 예측력이 떨어지는 것을 볼 수 있다.



가. GMM



나. SWARCH(2,2)



다. I-GARCH(1,1)

\*굵은 선 : CD수익률, 실선 : 고분산의 확률

[그림 3.1] SWARCH(2,2) 모형에 근거한 고분산의 확률과 CD수익률

## IV. 결 론

본 연구에서는 우리나라 채권수익률의 시간가변적 변동성의 추정을 위하여 1993년 1월부터 1996년 4월까지의 주별 양도성예금증서(91일물) 수익률을 사용하여 GMM모형, Integrated GARCH(I-GARCH)모형 및 Markov switching ARCH(SWARCH) 모형 등을 추정하였다. 특히 본 연구에서 채권 수익률 분산과정의 추정을 위해 사용하는 SWARCH 모형은 경제나 채권시장의 국면전환으로 말미암아 채권수익률의 변동성이 이질적인 분포에서 오는 경우 서로 다른 분산 국면의 확률적 식별이 가능할 뿐만 아니라 지속성이 GARCH모형보다 작아서 조건부 변동성의 예측력이 뛰어난 모형으로 알려져 있다. 또한 SWARCH 모형은 베イズ 이론에 의한 확률의 개념으로 국면전환을 추정하기 때문에 주관적인 국면전환시점의 판단이 불필요하다는 장점을 가진다.

여러 가지 모형들의 추정결과 I-GARCH 모형과 SWARCH 모형등이 우리나라 단기 채권 수익률의 조건부 변동성을 비교적 잘 설명해 내는 것으로 나타났으며 91일물 CD 수익률로 대변되는 우리나라 단기채권시장은 1993년 6월부터 1993년 12월초까지, 1994년 7월경부터 1995년 5월경까지 비교적 높은 변동성을 유지하였으며 그후로는 변동성이 등락을 계속하는 것으로 추정된다.

본 연구의 결과 아직은 태동단계에 머물러 있는 한국 채권시장의 시계열적 특성을 체계적으로 문서화하고 정교하고 다양한 최근 계량기법을 체계적으로 정리하고 응용하여 시장 참가자들의 기회비용과 시행착오의 기간을 단축시키는데 도움을 줄 수 있을 것으로 기대된다.

### 부록 : Markov-switching ARCH 모형의 최우추정법

K개의 서로 다른 국면을 갖는 국면전환모형을 최우법으로 추정하는 것은 관측치  $R_t$ 와 관측할 수 없는 상태변수의 결합분포의 우도함수의 값이 가장 큰 추정모수  $\theta$ 를 찾는 것이다.

베이즈 정리<sup>4)</sup>에 의해 관측치  $R_t$ 와 관측할 수 없는 상태변수  $S_t$ 의 결합분포는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$P(R_t, S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q}; \theta) = f(R_t | R_{t-1}, \dots, R_{t-q}, S_t, \dots, S_{t-q}; \theta) \times P(S_t = j | \theta) \quad (A.1)$$

그러므로 우리가 실제로 관측할 수 있는 자료 주식 수익률  $R_t$ 의 분포는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(R_t | \theta) &= \sum_{j=1}^n P(R_t, S_t, \dots, S_{t-q}; \theta) \\ &= \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi g_{s_t} h_t(s_{t-1}, \dots, s_{t-q})}} \exp \left[ \frac{-\varepsilon_t^2}{2g_{s_t} h_t(s_{t-1}, \dots, s_{t-q})} \right] \times P(S_t = j | \theta) \right\} \end{aligned} \quad (A.2)$$

T개의 관측치에 대한 우도함수는 아래와 같다.

$$L(\theta) = \sum_{t=1}^T \log f(R_t | \theta) \quad (A.3)$$

그러므로  $\sum_{j=1}^n P(S_t = j | \theta) = 1, 1 \geq P(S_t = j | \theta) \geq 0, j = 1, \dots, n$  이라는 제약하에서 최우법에 의해 우도함수를 극대화하는 모수,  $\theta$ 를 추정할 수 있게 된다.  $S_t$ 가 K개이고 조건부 분산이 ARCH(q)를 따를 때 즉, SWARCH(K, q)의 각 관측치  $R_t$ 는  $K^{q+1} = n$ 개만큼의 조건부 분포값을 갖으므로 이를 각 상태에 있을 확률로 가중치를 주어서 한개의 분포값으로 나내어야 최우법이 적용가능하다. 그러므로 T개의 관측치로부터 우도함수를 구하기 위해서는  $T \times n$  크기의 관측치의 조건부 분포행렬과  $n \times 1$  크기의 가중치로 사용할 확률의 행렬을 구성하여야 한다.

4)  $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$

## (1) 관측치의 조건부 분포

$S_t$ 에 대한 정보와 모수  $\theta$ 를 알고 있다는 조건하의 관측치  $R_t$ 의 조건부 분포는 다음과 같다. 식 (A.4)는 각 관측치에 대해서  $K^{n1}=n$  개의 값을 갖는다.

$$f(R_t | R_{t-1}, \dots, R_{t-a}, S_t, \dots, S_{t-q}; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(s_t, \dots, s_{t-q})}} \exp\left[\frac{-\varepsilon_t^2}{2\sigma^2(s_t, \dots, s_{t-q})}\right] \quad (\text{A.4})$$

## (2) 가중치로서의 확률

$S_t$ 가  $K$ 개의 상태를 갖고 조건부 분산이 ARCH( $q$ )를 따를 때의 조건부 분산이 추출되는 경우의 수는  $K^{n1}=n$ 이다. 그러므로  $t$ 기의 관측치  $R_t$ 의 조건부 분포인 식(A.4)도  $K^{n1}=n$ 개만큼의 값을 갖는다. 이때  $t$ 기의 관측치  $R_t$ 가 각 상태에 있을  $n \times 1$ 크기의 확률 벡터를  $P(S_t^* = j | \theta)$ 라고 할 때 이 확률은 베이즈 정리에 의해 아래와 같이 계산된다.

$$P(S_t^* = j | \Omega_t; \theta) = \frac{p(s_t^* = j | \Omega_{t-1}; \theta) \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma_1^2(s_t \dots s_{t-q})}} \exp\left(\frac{-\varepsilon_t^2}{2\sigma_1^2(s_t \dots s_{t-q})}\right)}{\sum_{j=1}^n p(s_t^* = j | \Omega_{t-1}; \theta) \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma_1^2(s_t \dots s_{t-q})}} \exp\left(\frac{-\varepsilon_t^2}{2\sigma_1^2(s_t \dots s_{t-q})}\right)} \quad (\text{A.5})$$

그리고  $t$ 기의 정보를 조건으로 하는  $t+1$ 기의 확률은 아래와 같이  $S_t^*$ 의 전이확률을 곱해주면 된다.  $S_t^*$ 가  $n$ 개의 상태를 갖는 Markov chain을 따를때 전이확률( $P$ )은  $n \times n$  행렬이다.

$$p(s_{t+1}^* = j | \Omega_{t-1}; \theta) = P \times p(s_{t+1}^* = j | \Omega_t; \theta) \quad (\text{A.6})$$

그러므로 (A.5)와 (A.6)을 반복해서 각 시점에서의  $P(S_t^* = j | \theta)$ 를 구하여 식(A.4)의 각 시점의 관측치,  $R_t$ 의 조건부 분포 행렬의 가중치로 사용하여 우도함수를 계산할 수 있게 된다.



## 참 고 문 헌

- 장국현 · 이진, 우리나라 주식수익률의 이분산성과 국면전환에 관한연구, 1996년도 한국재무학회 추계학술연구발표회 논문집(II), 1996, 193-219.
- Akgiray, V., "Conditional Heteroskedasticity in Time Series of Stock Return : Evidence and Forecasts," *Journal of Business*, (January 1989), 55-80.
- Bollerslev, T. "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics* 31, (April 1986), 307-327.
- Bollerslev, T., Chou, R.Y., and Kroner, K.F., "ARCH Modelling in Finance : A Review of the Theory and Empirical Evidence," *Journal of Econometrics* 52, (April 1986), 5-59.
- Black F. and Scholes M., "The Pricing of Option and Coperate Liabilities," *Journal of Political Economy* 81, (May 1973), 637-659.
- Brown Stephen J. and Dybvig Philip H., "The Empirical Implications of the Cox, Ingersoll, Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Finance* No 3, (July 1996), 617-632.
- Brunner, Allan D., Testing for Structural Breaks in U.S. Post-War Inflation Data, Mimeographed, Board of Governors of the Federal Reserve System, Wasington D.C.
- Cai, Jun., A Markov Model of Unconditional Variance in ARCH, Mimeographed, Kellogg School of Management, Northwestern University.
- Campbell John Y., "Stock Returns and The Term Structure," *Journal of Financial Economics* 18, (1987), 373-399.
- Chan, K.C., Karolyi Andrew, Longstaff Francis A., and Sanders Anthony B., "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate," *Journal of Finance*, (July 1992), 1209-1227.
- Clifford A. Ball, A Review of Stochastic Volatility Models with Application to Option Pricing, Working Paper, Owen Graduate School of Management Vanderbilt Univ., (August 1993).
- Cox John C., Ingersoll Jonathan E., and Ross Stephen A., "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica* 53 No. 2, (March

- 1985), 385-407.
- Daniel B. Nelson, "ARCH models as Diffusion Approximations," *Journal of Econometrics*, (1990), 7-38
- Hamilton James D. *Time Series Analysis*, Princeton, (1994), 657-703.
- Hamilton James D. and Lin Gang, Stock Market Volatility and the Business Cycle, working paper, UC, San Diego, revised version, Jun 4, (1996).
- Hamilton, James D., "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle," *Econometrica* 57, 357-384.
- Hamilton, James D. and Susmel Raul., "Heteroskedasticity and Change in Regime," *Journal of Econometrics* 64, (1994), 307-333.
- Hansen, Lars Peter., "Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators," *Econometrica* 50, 1029-1054.
- Heynen Ronald, Kemna Angelien and Vorst Ton, "Analysis of the Termsture of Implied Volatility," *Journal of Finacial and Quantitative Analysis*, (March 1994), 31-56
- Kim, M. J. and K. H. Chang, "Volatility and Jump Risk in Korean Financial Markets", Manuscript, University of Alabama, (1996).
- Lamoureux Christopher G. and Lastrapes William D., "Forecasting Stock Retrun Variance : Toward an Understanding of Stochastic Implied Volatilies," *Review of Finacial Studies* Vol. 6 No 2, (1993), 293-326.
- Longstaff Francis A. and Schwartz Eduardo S., "Interest rate Volatility and the Term Structure : A Two-Factor General Equilibrium Model," *Journal of Finance* No.4, (September 1992), 1259-1282.
- Merton R. C., "Theory of Rational Option Pricing," *Journal of Economics and Management Science* 4, (1973), 141-183.
- Newy, Whitney and Kenneth West, "Hypothesis Testing with Efficient Method of Moments Estimation," *International Economic Review* 28, 777-787.
- Pearson Neil D. and Sun Tong-Sheng, "Exploiting the Conditional Density in Estimating the Term Structure : An Application to the Cox, Ingersoll, and Ross Model," *Journal of Finance* No.4, (September 1994), 1279-1304.