Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol.21, No.4, December, 1995

신뢰도 함수의 동치에 관한 소고

On the Reliability Equivalence

안창원*, 채경철**
C. W. Ahn*, K. C. Chae**

Abstract

It is shown that the reliability function of an n-component parallel system is equivalent to that of n-component stand-by system if we increase the exponential failure rates of the parallel system's components in proportion to the increasing load per surviving component.

1. 서론

Rade[3]는 2-부품 병렬 시스템의 신뢰함수가 2-부품 대기(stand-by) 시스템의 신뢰함수와 동일하게 되는 가정을 아래와 같이 제시하였다.

i) 대기 시스템에서 주부품의 수명은 고장률이 λ_1인 지수분포를 따르고, 대기부품의 수명은 고장률이 λ_2인 지수분포를 따른다. (cold-redundancy를 가정함.)
ii) 병렬 시스템에서 두 부품의 수명은 서로 독립이고, 각각은 초기 고장률이 $\lambda_1/2$, $\lambda_2/2$인 지수분포를 따른다. 그러나 2개의 부품중 어느 하나의 부품에서 고장이 발생했을 경우, 남은 부품은 고장률이 초기 고장률의 2배가 되며, 그 분포는 여전히 지수분포를 따른다. (λ_1 또는 λ_2)

본 논문에서는 Rade의 결과를 n개의 부품으로 이루어진 시스템으로 확장하고, 부품의 고장

* 한국과학기술원 산업경영학과 박사과정
** 한국과학기술원 산업경영학과 부교수

률이 그 부품에 부과되는 부하의 양에 비례하여 증가하는 좀 더 일반적인 모형도 고려한다. 그리고 추가로 Marshall과 Olkin[1, 2]형태의 종속성과 n중 k 시스템도 다룬다.

2. n-부품 시스템

먼저 간단한 예로 3-부품 시스템을 고려해 보자. 대기 시스템의 전체 수명은 각 부품의 수명의 합과 같다. 이는 두번째, 세번째 부품이 각각 첫번째, 두번째 부품이 고장났을 때 비로소 가동되기 때문이다. i번째 부품이 고장률이 λ_i인 지수분포를 따른다고 가정하면 시스템 수명의 확률밀도함수에 대한 라플라스 변환(Laplace transform)은 다음과 같다. (이후로 '확률변수 X의 확률밀도함수에 대한 라플라스 변환'을 간단히 '확률변수 X의 라플라스 변환'이라고 부름.)

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+s}\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_2+s}\cdot\frac{\lambda_3}{\lambda_3+s} \tag{1}$$

한편, 병렬구조에서의 시스템 수명은 좀 더 복잡한 양상을 띈다. 세 부품의 수명이 서로 독립이고 각각의 고장률이 $\lambda_1/3$, $\lambda_2/3$, $\lambda_3/3$인 지수분포를 따른다고 가정하자. 그리고 3개의 부품중 어느 하나가 고장나면 남은 2개의 부품의 고장률이 3/2배로 증가하고, 2개의 부품이 고장나서 남은 부품이 1개가 되면 그 부품의 고장률은 초기 고장률의 3배가 된다고 가정하자. 세 부품중 어느 하나가 고장날 때까지의 시간은 세 부품의 수명중 최소값과 같다. 지수분포를 따르고 서로 독립인 확률변수들의 최소값의 분포는 발생률(rate)이 각 확률변수의 발생률의 합으로 이루어지는 지수분포라는 사실이 잘 알려져 있다. 그리고 첫 고장이 발생할 때까지의 시간은 세 부품중 어느 부품에서 가장 먼저 고장이 발생했는가에 대하여 독립이다. 따라서 첫번째 고장발생시간의 라플라스 변환은 다음과 같고, 이는 어느 부품에서 먼저 고장이 발생했는가에 무관하다.

$$\frac{\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}{\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+s}$$

일단, 첫번째 고장이 발생하면 두번째 고장이 발생할 때까지의 시간은 남은 두 부품의 잔여수명들의 최소값이 된다. 그런데 지수분포의 무기억속성에 의하여 잔여 수명은 다시 지수분포가 된다. 예를 들어 부품-1에서 첫 고장이 발생했다고 하자. 첫 고장이 부품-1에서 발생할 확률은 $\frac{1}{3}\lambda_1 / \frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$이 되고, 이 경우 두번째 고장발생시간에 대한 라플라스 변환은 다음과 같으며, 이 역시 어느 부품에서 두번째 고장이 발생했는가에 무관하다.

$$\frac{\frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_3)}{\frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_3)+s}$$

두 부품이 고장난 후, 마지막 부품의 고장발생시간에 대한 라플라스 변환은 마지막 남은 부품이 어느 것인가에 따라 달라지게 된다. 즉, $\frac{1}{2}\lambda_3/\frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_3)$의 확률로 $\lambda_2/(\lambda_2+s)$이 되고 $\frac{1}{2}\lambda_2/\frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_3)$의 확률로 $\lambda_3/(\lambda_3+s)$이 된다. 이러한 결과를 종합하면 3-부품 병렬시스템의 수명에 대한 라플라스 변환은 아래의 식(2)로 나타낼 수 있는데, 식(2)를 정리하면 식(1)과 같아짐을 쉽게 보일 수 있다.

$$\frac{\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}{\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+s}\cdot\left[\begin{array}{l}\frac{\frac{1}{3}\lambda_1}{\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\cdot\frac{\frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_3)}{\frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_3)+s}\left[\frac{\frac{1}{2}\lambda_2}{\frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_3)}\cdot\frac{\lambda_3}{\lambda_3+s}+\frac{\frac{1}{2}\lambda_3}{\frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_3)}\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_2+s}\right]\\ +\frac{\frac{1}{3}\lambda_2}{\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\cdot\frac{\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_3)}{\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_3)+s}\left[\frac{\frac{1}{2}\lambda_1}{\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_3)}\cdot\frac{\lambda_3}{\lambda_3+s}+\frac{\frac{1}{2}\lambda_3}{\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_3)}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+s}\right]\\ +\frac{\frac{1}{3}\lambda_3}{\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\cdot\frac{\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)}{\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)+s}\left[\frac{\frac{1}{2}\lambda_1}{\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_2+s}+\frac{\frac{1}{2}\lambda_2}{\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+s}\right]\end{array}\right] \tag{2}$$

이제 n-부품 시스템을 고려해 보자. n-부품 대기 시스템에서는 식(1)이 다음과 같이 확장된다.

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_i+s} \tag{3}$$

n-부품 시스템의 동치관계는 수학적 귀납법으로 증명한다. 먼저, 2개 또는 3개의 부품으로 이루어진 시스템의 신뢰도 동치관계는 이미 앞에서 확인하였다. 다음으로 (n-1)개의 부품(n = 3,4,5,…)으로 이루어진 시스템에서 신뢰도의 동치관계가 성립한다고 가정하면 (n-1)-부품 병렬 시스템의 수명에 대한 라플라스 변환은 $\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_i/(\lambda_i+s)$이 된다. 따라서 n-부품 병렬 시스템의 수명에 대한 라플라스 변환은 다음과 같다.

$$\frac{\frac{1}{n}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}{\frac{1}{n}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)+s}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\frac{1}{n}\lambda_i}{\frac{1}{n}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}\prod_{j\neq i}\frac{\lambda_j}{\lambda_j+s}\right] \tag{4}$$

식(4)에서 첫번째 항은 n개의 부품중에서 어느 하나가 처음으로 고장날 때까지의 시간에 대한 라플라스 변환이고, 두번째 항은 첫번째 고장난 부품이 i번째 부품일 확률이며, 마지막 항은 i번째 부품이 고장난 후 시스템의 잔여 수명에 대한 라플라스 변환이다. 마지막으로 식(4)가 식(3)과 같아짐을 다음과 같이 보인다. ('λ_i / (λ_i+s)'를 곱하고 나눔.)

$$(4) = \frac{1}{\frac{1}{n}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)+s}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{n}(\lambda_i+s)\cdot\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{\lambda_j+s}\right] = (3)$$

3. 공통원인(Common-Cause) 고장

이제 2개 이상의 부품들 사이에서 발생가능한 Marshall과 Olkin[1, 2] 형태의 종속성을 살펴보자. 이러한 형태의 종속성은 공통원인 고장으로 불리워진다. 이 모형에 의하면 n개의 부품으로 구성되어 있는 시스템에 대하여 (2^n-1)개의 서로 독립인 포아송(Poisson) 과정이 존재한다. 각 포아송 과정은 부품들의 특정 부분집합에서 동시에 고장을 발생시킨다. (공집합은 제외.) 즉, 각 과정은 최소한 1개 이상의 부품들을 고장나게 하는 것이다.

예를 들어 각 부품의 개별 고장률이 각각 $\frac{1}{2}\lambda_1$, $\frac{1}{2}\lambda_2$이고, 두 부품에서 동시에 고장이 발생하는 공통원인 고장률이 β인 2개의 부품으로 구성되어 있는 병렬 시스템을 생각해 보자. 최초고장발생시간은 서로 독립이고 각각의 발생률(rate)이 $\frac{1}{2}\lambda_1$, $\frac{1}{2}\lambda_2$, β인 지수확률변수들의 최소값과 같으므로 그 분포는 발생률이 $\frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2+\beta$인 지수분포를 따르는데 $\frac{1}{2}\lambda_1$ / $(\frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2+\beta)$의 확률로 부품-1에서만 고장이 발생하고, $\frac{1}{2}\lambda_2$ / $(\frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2+\beta)$의 확률로 부품-2에서만 고장이 발생하며, $\beta/(\frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2+\beta)$의 확률로 두개의 부품이 동시에 고장난다. 2개 이상의 부품에서 공통고장을 일으키는 공통원인의 예로는 전기단락등을 들 수 있다. 공통고장의 발생률은 각 부품의 부하가 증가하여도 변화하지 않는다고 가정하겠는데, 이는 전기단락등과 같은 공통고장의 원인은 보통 외부적인 요인이기 때문에 내부적인 부하와는 무관하다고 볼 수 있기 때문이다. 이상의 가정에 따른 2-부품 병렬 시스템 수명의 라플라스 변환은 다음과 같다.

$$\frac{\frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2+\beta}{(\frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2+\beta)+s}\cdot\left[\begin{array}{l}\dfrac{\beta}{\frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2+\beta}+\dfrac{\frac{1}{2}\lambda_1}{\frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2+\beta}\cdot\dfrac{\lambda_2+\beta}{(\lambda_2+\beta)+s}\\ \qquad\qquad\qquad+\dfrac{\frac{1}{2}\lambda_2}{\frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2+\beta}\cdot\dfrac{\lambda_1+\beta}{(\lambda_1+\beta)+s}\end{array}\right] \quad (5)$$

한편, 외부적인 요인인 공통고장 원인은 가동중인 부품뿐만 아니라 대기중인 부품에 대해서

도 고장을 일으킨다는 가정하에서 대기 시스템의 수명에 대한 라플라스 변환은 다음과 같다.

$$\frac{\lambda_1+\beta}{(\lambda_1+\beta)+s}\cdot\left[\frac{\beta}{\lambda_1+\beta}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\beta}\cdot\frac{\lambda_2+\beta}{(\lambda_2+\beta)+s}\right] \tag{6.a}$$

$$\frac{\lambda_2+\beta}{(\lambda_2+\beta)+s}\cdot\left[\frac{\beta}{\lambda_2+\beta}+\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\beta}\cdot\frac{\lambda_1+\beta}{(\lambda_1+\beta)+s}\right] \tag{6.b}$$

식(6.a)는 두 부품을 부품-1에서 부품-2의 순서로 가동한 경우이고 식 (6.b)는 부품-2에서 부품-1의 순서로 가동한 경우이다. 그러나 두 식을 정리해서 나타내면 두 식 모두 아래의 식 (7)과 같아짐을 확인할 수 있고, 이는 또한 식(5)와도 결국 같음을 알 수 있다.

$$\frac{(\lambda_1+\beta)\,(\lambda_2+\beta)+\beta\cdot s}{(\lambda_1+\beta+s)\,(\lambda_2+\beta+s)} \tag{7}$$

그러나 3개 이상의 부품으로 구성된 시스템에서는 2-부품 시스템의 경우와 같은 신뢰도 동치관계가 일반적으로는 성립하지 않는다. 그 이유는 대기부품의 가동 순서에 따라 공통원인 고장이 미치는 효과가 달라지기 때문이다. 그러나 부품들이 모두 동일(identical)한 경우에는 대기부품의 가동순서가 시스템 수명에 영향을 주지 않기 때문에 신뢰도 동치관계가 성립한다. 3개의 동일한 부품으로 이루어진 시스템의 경우 병렬구조나 대기구조에 있어서 시스템 수명의 라플라스 변환은 다음과 같다.

$$\frac{\lambda+3\beta+\gamma}{(\lambda+3\beta+\gamma)+s}\cdot\left[\begin{array}{l}\dfrac{\gamma}{\lambda+3\beta+\gamma}+\dfrac{3\beta}{\lambda+3\beta+\gamma}\cdot\dfrac{\lambda+2\beta+\gamma}{(\lambda+2\beta+\gamma)+s}\\ +\dfrac{\lambda}{\lambda+3\beta+\gamma}\cdot\dfrac{\lambda+3\beta+\gamma}{(\lambda+3\beta+\gamma)+s}\left[\dfrac{\beta+\gamma}{\lambda+3\beta+\gamma}+\dfrac{\lambda+2\beta}{\lambda+3\beta+\gamma}\cdot\dfrac{\lambda+2\beta+\gamma}{(\lambda+2\beta+\gamma)+s}\right]\end{array}\right] \tag{8}$$

병렬구조에서는 식(8)의 λ가 3개의 부품이 모두 가동중인 경우에는 $\frac{1}{3}(\lambda+\lambda+\lambda)$를 의미하고 2개의 부품이 가동중인 경우에는 $\frac{1}{2}(\lambda+\lambda)$를 의미한다. γ는 3개의 부품 모두에서 동시에 고장이 발생하는 공통원인 고장률이며, β는 3개의 부품 중 특정한 2개의 부품에서 동시에 고장이 발생할 공통원인 고장률이다. 앞에서와 마찬가지로 고장발생률이 β와 γ인 공통원인 고장들은 고장나지 않은 부품들의 수에 대하여 독립이고 가동중인 부품과 대기중인 부품 모두에게 영향을 미친다.

n-부품 시스템에서 신뢰도 동치관계가 성립하는 또 한가지 경우가 있는데, 이는 n개 부품 전체를 동시에 고장나게하는 공통원인과 개별부품을 고장나게 하는 개별원인만을 고려하는 모

형이다. 즉, 일반적인 공통원인 고장 모형에서 $2,3,\cdots,n$-1개의 특정 부품을 동시에 고장나게 하는 포아송과정들을 모두 무시한 모형이다. 이 경우, 3-부품 병렬 시스템 수명의 라플라스 변환은 다음과 같다.

$$\frac{\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\gamma}{\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\gamma+s}\cdot\left[\begin{array}{l}\dfrac{\gamma}{\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\gamma}\\ +\dfrac{\frac{1}{3}\lambda_1}{\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\gamma}\cdot\dfrac{\frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_3)+\gamma}{\frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_3)+\gamma+s}(*)\\ +\dfrac{\frac{1}{3}\lambda_2}{\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\gamma}\cdot\dfrac{\frac{1}{2}(\lambda_3+\lambda_1)+\gamma}{\frac{1}{2}(\lambda_3+\lambda_1)+\gamma+s}(**)\\ +\dfrac{\frac{1}{3}\lambda_3}{\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\gamma}\cdot\dfrac{\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)+\gamma}{\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)+\gamma+s}(***)\end{array}\right] \tag{9}$$

식(9)에서 괄호부분은 식(5)와 동일한 형태인데, 예를 들어 (***)는 식(5)와 첨자까지 일치한다. 한편, 3-부품 대기 시스템 수명의 라플라스 변환은

$$\frac{\lambda_1+\gamma}{\lambda_1+\gamma+s}\cdot\left[\frac{\gamma}{\lambda_1+\gamma}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\gamma}\cdot\frac{\lambda_2+\gamma}{\lambda_2+\gamma+s}\cdot\left(\frac{\gamma}{\lambda_2+\gamma}+\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\gamma}\cdot\frac{\lambda_3+\gamma}{\lambda_3+\gamma+s}\right)\right] \tag{10}$$

인데, 식(9)와 식(10)을 정리하면 모두 아래의 식(11)이 된다.

$$\frac{(\lambda_1+\gamma)(\lambda_2+\gamma)(\lambda_3+\gamma)+s\cdot\gamma\cdot(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2\gamma+s)}{(\lambda_1+\gamma+s)(\lambda_2+\gamma+s)(\lambda_3+\gamma+s)} \tag{11}$$

4. n 중 k 시스템

n 중 k 시스템은 n개의 부품 중 k개($1 \leq k \leq n$) 이상의 부품이 작동하는 한 전체 시스템이 기능을 수행하는 시스템을 말한다. k=1인 경우, 이 시스템은 보통의 병렬 시스템이 되고 $k=n$이면 보통의 직렬 시스템이 된다. 이러한 개념은 대기 시스템에도 적용가능하다. 우선 k

개의 부품을 가동시키고 나머지는 대기 상태로 둔다. k개의 부품 중 어느 하나가 고장을 일으킬 때마다 고장난 부품을 대기 부품으로 교체하여 가동시킬 수 있다. 그러나 이 경우 역시 부품의 가동 순서가 대기 시스템의 수명에 영향을 미치므로 각 부품이 모두 동일한 경우만 고려하였다. (대기중인 부품들 중 평균수명이 긴 순서로 가동을 시키면 평균 시스템 수명을 최대화할 수 있을 것임.)

병렬구조와 대기구조의 시스템 수명에 대한 라플라스 변환은 다음과 같이 간단한 형태로 나타낼 수 있다.

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{n-k+1} \qquad k=1,2,\cdots,n.$$

여기서 λ는 대기구조에서는 $k\cdot(\lambda/k)$를 의미하고, 병렬구조에서는 고장나지 않은 부품의 수가 m개일 때 $m\cdot(\lambda/m)$, $n\geq m\geq k$,를 의미한다.

5. 고장률 증가의 일반화

서론에서 언급되었듯이 Rade[3]는 병렬시스템에서 2개의 부품 중 어느 하나가 고장나게 되면 남아 있는 나머지 부품의 고장률이 2배로 증가한다고 가정하였다. 이러한 가정에는 각 부품의 부하용량(load capacity)이 동일하고 고장률은 각 부품이 담당하게 되는 부하의 양에 비례한다는 가정이 암묵적으로 포함되어 있다. 예를 들면, 2-부품 병렬시스템에서 시스템에 부과되는 부하의 양이 L이고 각 부품이 이 양을 균분하고 있다고 하자. 이 중 한 부품이 고장나게 되면 남아 있는 부품이 시스템 전체의 부하를 모두 감당하게 되어 부하의 양이 $L/2$에서 L로 2배 증가하는데 이러한 부하의 배가(倍加)를 고장률의 배가로 모형화한 것이다. 이를 확장하여 각 부품의 부하용량이 다른 경우도 고려할 수 있을 것이다. 본 절에서는 각 부품의 부하용량이 다른 경우에서의 신뢰도 동치 관계를 보일 것이다. 먼저 이 절에서 사용하게 될 기호는 다음과 같다.

L : 시스템 전체에 부과되는 총 부하의 양.
c_i : 부품-i의 부하용량.
λ_i : 부품-i의 표준고장률.
l_i : 부품-i에 부과되는 부하의 양.
($\Sigma l_i = L$)
λ_i^e : l_i의 부하가 부과될 때의 부품-i의 실질고장률.

Rade의 네번째 가정을 좀 더 일반화하여 다음과 같이 가정하였다.

i) 각 부품에 부과되는 부하의 양은 부품의 부하용량에 비례한다.

$l_i \propto c_i \Rightarrow l_i = \frac{c_i}{\Sigma c_j} \times L$

ii) 각 부품의 실질 고장률은 부품에 부과되는 부하의 양에 비례한다.

$\lambda_i^e \propto l_i \Rightarrow \lambda_i^e = \frac{l_i}{c_i} \times \lambda_i$

iii) 병렬시스템에서 2개 이상의 부품이 가동중일 때 각 부품의 실질고장률은 $(L/\Sigma c_i)\lambda_i$이다.

위의 가정하에 3-부품 대기 시스템의 수명에 대한 라플라스 변환은 다음과 같다.

$$\frac{\frac{L}{c_1}\lambda_1}{\frac{L}{c_1}\lambda_1+s}\cdot\frac{\frac{L}{c_2}\lambda_2}{\frac{L}{c_2}\lambda_2+s}\cdot\frac{\frac{L}{c_3}\lambda_3}{\frac{L}{c_3}\lambda_3+s} \tag{12}$$

식(12)에서 $(L/c_i)\lambda_i$는 부품-i에 부과되는 부하의 양(L/c_i)에 따라 증가된 고장률을 의미한다. 같은 가정하에서 병렬 시스템의 수명에 대한 라플라스 변환은 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{L}{c_1+c_2+c_3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}{\frac{L}{c_1+c_2+c_3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+s}\cdot\\
&\left[\frac{\frac{L}{c_1+c_2+c_3}\lambda_1}{\frac{L}{c_1+c_2+c_3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\cdot\frac{\frac{L}{c_2+c_3}(\lambda_2+\lambda_3)}{\frac{L}{c_2+c_3}(\lambda_2+\lambda_3)+s}\left[\frac{\frac{L}{c_2+c_3}\lambda_2}{\frac{L}{c_2+c_3}(\lambda_2+\lambda_3)}\cdot\frac{\frac{L}{c_3}\lambda_3}{\frac{L}{c_3}\lambda_3+s}+\frac{\frac{L}{c_2+c_3}\lambda_3}{\frac{L}{c_2+c_3}(\lambda_2+\lambda_3)}\cdot\frac{\frac{L}{c_2}\lambda_2}{\frac{L}{c_2}\lambda_2+s}\right]\right.\\
&+\frac{\frac{L}{c_1+c_2+c_3}\lambda_2}{\frac{L}{c_1+c_2+c_3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\cdot\frac{\frac{L}{c_1+c_3}(\lambda_1+\lambda_3)}{\frac{L}{c_1+c_3}(\lambda_1+\lambda_3)+s}\left[\frac{\frac{L}{c_1+c_3}\lambda_1}{\frac{L}{c_1+c_3}(\lambda_1+\lambda_3)}\cdot\frac{\frac{L}{c_3}\lambda_3}{\frac{L}{c_3}\lambda_3+s}+\frac{\frac{L}{c_1+c_3}\lambda_3}{\frac{L}{c_1+c_3}(\lambda_1+\lambda_3)}\cdot\frac{\frac{L}{c_1}\lambda_1}{\frac{L}{c_1}\lambda_1+s}\right]\\
&\left.+\frac{\frac{L}{c_1+c_2+c_3}\lambda_3}{\frac{L}{c_1+c_2+c_3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\cdot\frac{\frac{L}{c_1+c_2}(\lambda_1+\lambda_2)}{\frac{L}{c_1+c_2}(\lambda_1+\lambda_2)+s}\left[\frac{\frac{L}{c_1+c_2}\lambda_1}{\frac{L}{c_1+c_2}(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\frac{\frac{L}{c_2}\lambda_2}{\frac{L}{c_2}\lambda_2+s}+\frac{\frac{L}{c_1+c_2}\lambda_2}{\frac{L}{c_1+c_2}(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\frac{\frac{L}{c_1}\lambda_1}{\frac{L}{c_1}\lambda_1+s}\right]\right].
\end{aligned} \tag{13}$$

식(12)와 식(13)을 간단하게 정리하면 두 식 모두 아래와 같은 식으로 표현가능하고 결국 두 시스템의 수명이 동일한 분포를 가짐을 확인할 수 있다.

$$\frac{L^3\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3}{(L\cdot\lambda_1+c_1\cdot s)(L\cdot\lambda_2+c_2\cdot s)(L\cdot\lambda_3+c_3\cdot s)}$$

위의 결과를 수학적 귀납법을 이용하여 n-부품 시스템으로 확장하면 여전히 대기 시스템과 병렬 시스템의 수명은 동일한 분포를 가짐을 확인할 수 있고 그 수명의 라플라스 변환은 식(14)와 같다.

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{L \cdot \lambda_i}{(L \cdot \lambda_i + c_i \cdot s)} \tag{14}$$

이제 공통원인 고장의 경우를 고려해 보자. 2개의 부품으로 구성되어 있는 병렬 시스템에서 개별고장(λ_1, λ_2)과 공통고장(β)이 존재할 때, 그 수명에 대한 라플라스 변환은 다음과 같다.

$$\frac{\frac{L}{c_1+c_2}(\lambda_1+\lambda_2)+\beta}{\left(\frac{L}{c_1+c_2}(\lambda_1+\lambda_2)+\beta\right)+s} \cdot \left[\frac{\beta}{\frac{L}{c_1+c_2}(\lambda_1+\lambda_2)+\beta} + \frac{\frac{L}{c_1+c_2}\lambda_1}{\frac{L}{c_1+c_2}(\lambda_1+\lambda_2)+\beta} \cdot \left[\frac{\frac{L}{c_2}\lambda_2+\beta}{(\frac{L}{c_2}\lambda_2+\beta)+s} \right] + \frac{\frac{L}{c_1+c_2}\lambda_2}{\frac{L}{c_1+c_2}(\lambda_1+\lambda_2)+\beta} \cdot \left[\frac{\frac{L}{c_1}\lambda_1+\beta}{(\frac{L}{c_1}\lambda_1+\beta)+s} \right] \right] \tag{15}$$

같은 상황하에서 대기 시스템의 수명에 대한 라플라스 변환은 부품의 가동 순서에 따라 다음 두 식으로 표현된다.

$$\frac{\frac{L}{c_1}\lambda_1+\beta}{(\frac{L}{c_1}\lambda_1+\beta)+s} \cdot \left[\frac{\beta}{\frac{L}{c_1}\lambda_1+\beta} + \frac{\frac{L}{c_1}\lambda_1}{\frac{L}{c_1}\lambda_1+\beta} \cdot \frac{\frac{L}{c_2}\lambda_2+\beta}{(\frac{L}{c_2}\lambda_2+\beta)+s} \right] \tag{16.a}$$

$$\frac{\frac{L}{c_2}\lambda_2+\beta}{(\frac{L}{c_2}\lambda_2+\beta)+s} \cdot \left[\frac{\beta}{\frac{L}{c_2}\lambda_2+\beta} + \frac{\frac{L}{c_2}\lambda_2}{\frac{L}{c_2}\lambda_2+\beta} \cdot \frac{\frac{L}{c_1}\lambda_1+\beta}{(\frac{L}{c_1}\lambda_1+\beta)+s} \right] \tag{16.b}$$

식(16.a)는 부품-1에서 부품-2의 순서로 가동시켰을 때 대기 시스템의 수명에 대한 라플라스 변환이고 식(16.b)는 그 반대의 순서로 가동시킨 수명에 대한 변환이다. 병렬 시스템과 대기 시스템의 수명에 대한 라플라스 변환을 간단히 정리하면 두 식이 같음을 보일 수 있다.

$$\frac{(\frac{L}{c_1}\lambda_1+\beta)(\frac{L}{c_2}\lambda_2+\beta)+\beta\cdot s}{\left[(\frac{L}{c_1}\lambda_1+\beta)+s\right]\left[(\frac{L}{c_2}\lambda_2+\beta)+s\right]}=\frac{(L\cdot\lambda_1+c_1\cdot\beta)(L\cdot\lambda_2+c_2\cdot\beta)+c_1\cdot c_2\cdot\beta\cdot s}{(L\cdot\lambda_1+c_1\cdot\beta+c_1\cdot s)(L\cdot\lambda_2+c_2\cdot\beta+c_2\cdot s)}$$

위의 결과에서 알 수 있듯이 일반화된 고장률 증가 상황하에서도 n -부품 시스템의 신뢰도 동치관계가 성립하고, 공통원인 고장이 존재할 때에도 2-부품 시스템에서는 역시 동치관계가 성립함을 확인할 수 있다.

6. 맺음말

이 글에서는, 병렬 시스템에서 고장난 부품의 수가 증가함에 따라 작동중인 부품들의 고장 발생률이 증가한다는 가정하에 병렬 시스템의 신뢰함수가 대기 시스템의 신뢰함수와 동치가 되는 경우들을 살펴 보았다. 신뢰함수의 동치가 성립하는 경우는 기본적으로 부품수명이 지수 분포를 따르고, 고장발생률이 작동중인 부품수에 반비례하는 경우인데, 추가로 부품수명간의 종속성이 존재하는 경우와 부품별로 부하용량이 다른 경우를 다루었다.

관점에 따라서는 당연한 결과를 확인했다고 볼 수도 있다. 예를 들어 부품들의 수명이 독립이고 동일한 지수분포를 따르는 경우에는 신뢰함수의 동치를 당연한 결과로 볼 수 있다. 그러나 확인을 하고 나서야 납득이 가는 경우도 많았다. 그리고 확인결과 예상과는 달리 동치가 성립하지 않는 경우도 있었는데, 예를 들면 3-부품 공통원인 고장 모형에서 3개의 부품 중 특정한 2개의 부품에서 동시에 고장이 일어나는 공통원인 고장률이 모두 같은 경우($\beta_{12}=\beta_{23}=\beta_{31}$)로서 대기 시스템의 부품 가동순서를 달리하면 신뢰도가 달라지는 것으로 밝혀졌다. (가동순서를 무작위로 하더라도 동치가 성립하지 않음.)

참 고 문 헌

[1] Barlow, R. E., and Proschan, F., *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, pp128, Holt, Reinhardt & Winston, New York, 1975

[2] Marshall, A. W., and Olkin, I., "A Multivariate Exponential Distribution", *Journal of the American Statistical Association*, Vol.62, pp30-44, 1967.

[3] Rade, L., "A Reliability Equivalence", *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, Vol.23, No.5, pp. 797-798, 1992.

95년 8월 최초 접수, 95년 9월 최종 수정