Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol.21, No.4, December, 1995

대기구조를 갖는 시스템의 예방 교체 모형*

A Preventive Replacement Model for Standby Systems

이 효 성**

Hyo-Seong Lee**

Abstract

We consider a preventive replacement policy for a cold-standby system with N components, in which only one component is in operation at a time. If the component in operation fails, a standby component is immediately switched into operation. If all components fail, the system fails. The system is inspected at random poins in time to determine whether it is to be replaced or not. If the number of failed components at the time of inspection exceeds a threshold value r, the system is replaced. Otherwise the decision is put off until the next inspection point arrives. Under the cost structure which includes a replacement cost, a system down-time cost and a holding cost of the components, we develop an efficient procedure to find the optimal control values N and r, which minimize the expected cost per unit time.

1. 서론

최근 장비의 구조가 고도로 복잡해지고 전문화됨에 따라 장비고장으로 인한 유휴손실을 감소시키고 장비의 신뢰성을 높이기 위한 예방보전활동이 중요한 문제로 대두되고 있다. 일반적으로 가동중에 발생하는 장비의 고장은 금전적으로 큰 손실을 초래할 뿐 아니라 위험한 경우가 많다. 따라서 장비가 고장나기전 적절한 시점을 택해 장비의 고장을 야기시킬 수 있는 부품을 사전에 교체하게 되면 장비의 가동중 고장으로 인한 금전적 손실이나 위험을 줄일 수 있게 된다[1]. 특히 장비의 고장원인이 되는 부품이 사용시간이 지남에 따라 확률적으로 노후화(deteriorate)되는 경우에는 이러한 부품에 대해 적절

* 본 연구는 93년도 한국과학재단 연구지원(과제번호 : 931-1000-006-1)에 의한 결과임.
** 경희대학교 공과대학 산업공학과

한 예방교체정책(preventive replacement policy)을 적용함으로써 장비의 운용비용(operation cost)를 현저하게 낮출수 있게 된다.

장비의 예방교체정책에 대해서는 과거 많은 연구들이 수행되어져 왔다[5,8]. 그러나 대부분의 기존연구들은 한개나 두개의 부품으로 구성된 극히 단순한 시스템의 경우에 국한되어 왔다. 다수의 부품으로 구성된 복잡한 시스템의 예방교체에 대한 연구는 매우 희귀하다[2,7,9]. 특히, 시스템의 신뢰성을 보장하여주기위해 중요부품을 중복(redundancy) 및 대기(standby)구조로 설계함이 최근의 설계경향임에도 불구하고 중복 및 대기구조를 갖는 시스템의 예방교체정책에 대한 연구는 최근에 수행된 Lee와 Srinivasan[3]의 연구를 제외하고는 찾아보기 힘든 실정이다. 이 연구에서는 결함감내체계(fault tolerant system)에서 많이 사용되는 대기구조가 다루어졌을 뿐 아니라 비용함수의 다양한 특성들이 수학적으로 증명되었고 최적예방교체정책을 손쉽게 찾을 수 있는 효율적인 알고리듬(algorithm)이 제시되었다. 그러나, 이 연구에서는 몇가지 가정이 지나치게 단순화되어 실제 상황을 정확하게 반영하지 못하고 있다. 따라서 보다 현실적인 모형의 개발이 요구되며 본 연구는 이러한 필요에 따라 Lee와 Srinivasan의 모형을 실제상황에 잘 맞는 현실적인 모형으로 일반화하기 위해 다음과 같은 후속 연구를 수행하고자 함이 목적이다.

본 연구에서는 N개의 동일한 종류의 부품이 대기구조로 연결된 시스템의 최적예방교체정책을 분석한다. 부품은 한순간에 한개만 작동되며 작동중인 부품이 고장나면 대기상태에 있는 부품중 하나가 즉시 작동상태로 전환된다. 만일 대기중인 부품이 없을때 작동중인 부품이 고장나면(N개의 부품이 모두 고장)시스템고장으로 간주한다. 시스템의 고장은 특정한 시점에서 행해지는 검사에 의해서만 탐지가능하며 고장난 부품의 수에 대한 정보도 검사에 의해서만 알수 있다. 한개의 부품이 고장날 때 까지의 시간은 평균 $1/\lambda$인 지수분포를 따르며 검사간격은 확률변수, V로서 일반분포(general distribution), $G(\cdot)$를 따르는 것으로 가정한다. 따라서 본 모형에서는 시스템의 고장이 발생하더라도 다음 검사시점에 이를 때까지 시스템의 교체는 이루어지지 않으며, 시스템 교체에 소요되는 시간은 무시할 수 있을 정도로 짧다고 가정한다.

본 모형은 일회생산기간이 확률변수, V로서 일반분포(general distribution), $G(\cdot)$를 따르고 생산기간중에는 생산설비의 검사가 불가능한 제조시스템을 잘 묘사한다. 이 경우 예방교체대상인 대기시스템(standby system)은 생산설비의 결함을 야기하는 설비의 중요모듈로 생각할 수 있다.

위와같은 유형의 예방교체모형에서는 일반적으로 한계치를 이용한 제어정책(control limit policy)이 사용되며[3,9] 본 연구에서도 시스템의 예방교체정책으로서 다음과 같이 한계치를 이용한 제어정책을 사용한다.

"검사시점이 도래하면 그 시점까지 고장난 부품의 수가 한계치 r의 값을 넘어 섰는지 조사한다. 만일 고장난 부품의 수가 r이상이면 시스템을 즉시 새 시스템으로 교체하고 고장난 부품의 수가 r미만이면 다음 검사시점까지 아무 조치를 취하지 않는다."

본 연구에서는 시스템 운용과 관련되어 다

음과 같은 비용이 발생한다고 가정한다.

(1) 시스템이 N개의 부품으로 구성되고 보충해야 될 부품수가 m개일 경우의 교체비용 : $\psi(m, N)$

여기서

$$\psi(m, N) = \begin{cases} cm + K_1, & m < N \\ cN + K_2, & m = N \end{cases}$$

으로 표시되며 $\psi(N, N)$은 사후 교체비용이다.

또한 K_1, K_2, $(K_1 < K_2)$는 예방교체 및 사후교체시 각각 소요되는 고정 비용이다.

(2) 시스템의 고장기간중 발생하는 벌과비용 : π/단위시간

(3) 부품을 보유하는데 따른 보유비용 : h/단위부품/단위시간

위와같은 모형에서 Lee와 Srinivasan[3]은 시스템을 구성하는 부품의 수가 N으로 고정되어 있다는 가정하에 단위시간당 기대비용을 최소화해주는 r의 값을 구하는 효율적인 기법을 제시하였다. 이들의 모형에서는 N의 값이 고정되어있다는 제약외에도 부품을 보유하는데 따르는 보유비용(holding cost)을 최적화 과정에서 고려해주지 않았다.

본 연구에서는 Lee와 Srinivasan의 연구를 확장하여 r뿐만아니라 N의 값도 변화될 수 있고 부품을 보유하는데 따른 부품보유비용도 고려된 보다 일반화된 모형을 분석하고자 한다. 본 연구의 목적은 앞에서 언급된 비용구조 하에서 단위시간당 발생하는 운용비용을 최소화해주는 제어변수 r과 N의 값을 구하는 것이며, 본 연구에서는 제어변수 값으로 r과 N이 사용될 경우의 예방교체 정책을 (r, N)정책이라 부르기로 한다. 최적(r, N)정책을 구하기 위하여 본 연구에서는 첫째, 특정정책을 운용할 경우 발생하는 단위시간당 기대비용을 식으로 표시하고 둘째, 이 식의 특성을 규명한 후, 규명된 식의 특성을 이용하여 최적(r, N)정책을 구하는 2단계절차를 취하고자 한다. 경우에 따라서는 시스템을 운용하지 않고 방치하여 두는 것이 경제적으로 유리할 수도 있다. 본 연구에서는 이와같은 정책을 (-1, 0)정책이라 부르기로 하며, (-1, 0)정책도 최적정책의 가능한 후보로서 본 연구에서의 분석대상이 될 것이다.

2. 수학적 모형

시스템을 운용하지 않고 고장상태로 방치하여 두는(-1, 0)정책을 사용할 경우에는 시스템 교체에 따른 비용이나 부품보유비용이 발생하지 않는다. 따라서 이 경우의 단위시간당 발생비용을 $TC(-1, 0)$라 하면 $TC(-1, 0) = \pi$로 주어진다.

시스템을 운용할 경우의 단위시간당 기대비용 $TC(r, N)$은 다음에 설명되는 바와같이 구해질수 있다. 예방교체정책(r, N)을 운용할 경우 시스템의 교체직후 시점은 매번 확률적으로 동일한 조건을 갖는 재생점(regeneration point)이 됨을 쉽게 알 수 있다. 따라서 재생주기(regeneration cycle)는 시스템의 교체시점으로부터 다음 교체시점까지의 기간이 된다. 시스템의 교체여부에 대한 결정은 검사시점에서의 고장난 부품의 총수가 한계치 r을 초과했는지, 초과하지 않았는지에 의해서만 이루어지고 고장 발생시 다음 검사 시점이 도래할 때까지는 시스템의 교체가 이루어지지 않으므로 재생주기의 길이는 N의 값과

무관하며 r만의 함수가 된다. 제어변수의 값이 r과 N으로 주어졌을 때 한 주기동안 발생하는 기대비용을 $C(r, N)$이라 정의하고, 한 주기의 기대길이를 $L(r)$이라 정의하면 재생보상정리(renewal reward theorem[4])으로부터 단위시간당 발생하는 기대비용은 다음과 같이 주어진다.

$$TC(r,N) = \frac{C(r,N)}{L(r)}. \tag{1}$$

$P_m(r,N)$을 (r,N)정책을 사용할 경우 예방교체시 보충해야 될 부품의 수가 m개일 확률이라 정의하고, $\tau(r,N)$을 한주기동안 발생하는 시스템의 기대고장시간, 그리고 $\zeta(r,N)$을 한 주기동안 발생하는 부품의 총 기대보유시간이라 정의하면 $C(r,N)$은 다음과 같이 표현된다.

$$C(r,N) = \sum_{m=r}^{N} \phi(m,N)P_m(r,N) + \pi\tau(r,N) + h\zeta(r,N). \tag{2}$$

사후교체에 의해 시스템의 교체가 이루어질 확률 $P_N(r,N)$을 $P_f(r,N)$이라 정의하자. 부품의 고장은 시스템이 정상적으로 작동할 경우에만 발생하고 시스템의 정상작동중 단위시간당 고장나는 부품의 기대갯수가 λ이므로 한 주기당 교체되는 부품의 기대갯수는 $\lambda\{L(r)-\tau(r,N)\}$가 된다. 또한 예방교체 및 사후교체시 각각 소요되는 고정비용은 K_1, $K_2(K_1 < K_2)$이고, 부품 한개의 구매에 소요되는 비용은 c이므로 한 주기당 발생하는 교체비용의 기대치는 다음과 같다.

$$\sum_{m=r}^{N} \phi(m,N)P_m(r,N) = \lambda c\{L(r)-\tau(r,N)\} + K_2P_f(r,N) + K_1\{1-P_f(r,N)\}$$

$$= \lambda c\{L(r)-\tau(r,N)\} + K_1 + (K_2-K_1)P_f(r,N)$$

식(1), (2), (3)으로 부터 $TC(r,N)$은 다음과 같이 표현된다.

$$TC(r,N) = \frac{\lambda c\{L(r)-\tau(r,N)\} + K_1 + (K_2-K_1)P_f(r,N) + \pi\tau(r,N) + h\zeta(r,N)}{L(r)}$$

$$= \lambda c + \frac{K_1 + (\pi-\lambda c)\tau(r,N) + (K_2-K_1)P_f(r,N) + h\zeta(r,N)}{L(r)}. \tag{4}$$

식 (4)을 단순화시키기 위하여

$$A(r,N) = (\pi-\lambda c)\tau(r,N) + (K_2-K_1)P_f(r,N) + h\zeta(r,N) \tag{5}$$

이라 놓으면 $TC(r,N)$은 다음과 같이 주어진다.

$$TC(r,N) = \lambda c + \frac{K_1 + A(r,N)}{L(r)}. \tag{6}$$

따라서 $TC(r,N)$을 구하기 위해서는 $\tau(r,N)$, $P_f(r,N)$, $\zeta(r,N)$ 및 $L(r)$의 값을 각각 구할 수 있어야만 한다.

분석의 편의상 부품의 고장은 충격(shock)에 의해서 발생하고, 부품의 고장을 야기하는 충격은 단위기간당 λ의 비율을 갖는 Poisson과정에 따라 도래한다고 생각하자. 만일 한 검사간격동안 j번의 충격이 도래할 확률을 q_j라 하면, q_j는 다음과 같이 표현된다.

$$q_j = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!} dG(t). \tag{7}$$

q_j의 값은 식(7)으로부터 수치해석적 방법

(numerical method)으로 구해질 수도 있으나, 지수분포, 일양분포, Phase-type분포 등 대부분의 중요한 분포들에 대해서는 닫힌 형태 (closed form)로 표현될 수 있다[6]. 첫번째 검사시점까지 도래하는 충격 횟수에 대해 조건화하여 Lee와 Srinivasan은 $\tau(r,N)$, $P_f(r,N)$, $\zeta(r,N)$, $L(r)$에 대한 다음과 같은 순환식을 유도하였다.

$$\tau(r,N)=\tau(1,N)+\sum_{j=1}^{r-1}\tilde{q}_j\tau(r-j,N-j), \tag{8.a}$$

$$P_f(r,N)=P_f(1,N)+\sum_{j=1}^{r-1}\tilde{q}_jP_f(r-j,N-j), \tag{8.b}$$

$$\zeta(r,N)=\zeta(1,N)+\sum_{j=1}^{r-1}\tilde{q}_j\zeta(r-j,N-j), \tag{8.c}$$

$$L(r)=L(1)+\sum_{j=1}^{r-1}\tilde{q}_jL(r-j), \tag{8.d}$$

여기서,

$$\tilde{q}_j=\frac{q_j}{1-q_0},\qquad j\geq 1.$$

식(8)을 r=1의 식만으로 표현하기 위하여 식(8)의 우변항에 위 순환식을 반복하여 적용한 후 정리하면 다음과 같다.

$$\tau(r,N)=\sum_{j=0}^{r-1}\beta_j\tau(1,N-j), \tag{9.a}$$

$$P_f(r,N)=\sum_{j=0}^{r-1}\beta_jP_f(1,N-j), \tag{9.b}$$

$$\zeta(r,N)=\sum_{j=0}^{r-1}\beta_j\zeta(1,N-j), \tag{9.c}$$

$$L(r)=\sum_{j=0}^{r-1}\beta_jL(1), \tag{9.d}$$

여기서 β_j는 다음과 같이 정의된다.

$$\beta_j=\begin{cases}1, & j=0,\\ \sum_{i=1}^{j}\tilde{q}_i\beta_{j-i}, & j>0.\end{cases} \tag{10}$$

식(10)으로부터 j≥1일 경우 $0\leq\beta_j\leq\beta_0=1$이 됨을 확인할 수 있다.

따라서 r=1인 경우의 초기값만 각각 구할 수 있으면 식(9)를 이용하여 $\tau(r,N)$, $P_f(r,N)$, $\zeta(r,N)$, L(r)의 값을 구할 수 있게 된다. r=1일 경우의 초기값은 Lee와 Srinivasan에 의하여 유도된 다음식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\tau(1,k)=\tau(1,k-1)-\frac{1}{\lambda}\left(1-\sum_{j=1}^{k-1}\tilde{q}_j\right),\ k\geq 2,$$

$$\tau(1,1)=\frac{E(V)}{1-q_0}-\frac{1}{\lambda} \tag{11.a}$$

$$P_f(1,k)=\sum_{j=k}^{\infty}\tilde{q}_j, \tag{11.b}$$

$$\zeta(1,k)=\zeta(1,k-1)+\frac{1}{\lambda}\left\{k\sum_{j=k+1}^{\infty}\tilde{q}_j+\sum_{j=1}^{k}j\tilde{q}_j\right\},\ k\geq 2,\ \zeta(1,1)=\frac{1}{\lambda} \tag{11.c}$$

$$L(1)=\frac{E(V)}{1-q_0}. \tag{11.d}$$

식 (5)와 (9)로부터 $A(r,N)$은 다음과 같이 표현되며 초기치 $A(1,k)$는 식(11)로부터 구해질 수 있다.

$$A(r,N)=\sum_{j=0}^{r-1}\beta_jA(1,N-j). \tag{12}$$

따라서, (r,N)정책을 사용할 경우의 단위기간당 기대비용은 다음과 같이 $r=1$의 식으로 표현된다.

$$TC(r,N)=\lambda c+\frac{K_1+\sum_{j=0}^{r-1}\beta_jA(1,j)}{L(1)\sum_{j=0}^{r-1}\beta_j}. \tag{13}$$

이상의 과정에 의해 (r,N)정책을 사용할

경우 단위기간당 발생하는 기대비용 $TC(r,N)$의 값을 구할 수 있게 되었다. $TC(r,N)$의 값은 $A(1,k)$와 β_k의 식으로 표시되었으며 $A(1,k)$와 β_k는 순환식이므로 $k=1$을 초기 값으로 하여 순차적으로 계산된다. 또한 일단 $A(1,k)$와 β_k의 값이 계산되면 순환식의 구조상 $A(1,k+1)$와 β_{k+1}의 값은 극히 적은 양의 계산만이 부가됨으로써 구해질 수 있다.

3. 비용식의 특성 및 최적화 과정

이 절에서는 단위기간당 기대비용을 최소화하여 주는 최적(r,N)정책을 구해보도록 한다. 이를 위하여 $\pi \le \lambda c$와 $\pi > \lambda c$의 두경우로 나누어 생각해 보도록 한다.

만일 $\pi \le \lambda c$가 성립하면, 이 경우는 단위기간당 소요되는 부품의 구매비용 보다도 시스템 고장시의 단위기간당 벌과비용이 적게 발생하는 특별한 경우이다. 따라서 시스템 운용을 포기하는 (-1, 0)정책이 이 경우의 최선의 정책이 된다. 이러한 사실은 식(4)를 통해서도 쉽게 증명될 수 있다. 즉 $K_2 \ge K_1 \ge 0, h \ge 0, L(r) \ge \tau(r,N)$이므로 식(4)로부터 $TC(r,N) \ge \pi$의 관계가 성립됨을 간단히 보일 수 있다.

$\pi > \lambda c$의 경우에는 $TC(-1,0)$와 $TC(r,N)$의 대소관계를 쉽게 파악할 수 없다. 따라서 $TC(r,N)$의 최소값을 구한 후 이를 π와 비교해 봄으로써 최적예방교체 정책을 찾을 수 있게 된다. 함수 $T(r,N)$을

$$T(r,N)=\frac{K_1+A(r,N)}{L(r)}, \tag{14}$$

이라 정의하면, λc가 상수이므로 $TC(r,N)$을 최소화하는 r과 N을 구하기 위해서는 $T(r,N)$을 최소화하는 r과 N을 구하면 된다. $T(r,N)$을 최소화하는 r과 N을 구하기 위하여는 함수 $A(r,N)$과 $T(r,N)$의 특성을 규명하는 것이 중요하다. 함수 $A(r,N)$은 $\tau(r,N)$, $\zeta(r,N)$, $P_f(r,N)$으로 구성되어 있고 이들 함수들은 각각 $r=1$인 경우의 식으로 표현되므로 이들의 특성을 규명하기 위해서는 $\tau(1,k)$, $\zeta(1,k)$, $P_f(1,k)$의 특성을 우선적으로 규명하여야 한다.

보조정리 1.

$\tau(1,k)$는 k에 대해 볼록함수이다.

(증명) $\triangle\tau(1,k)=\tau(1,k)-\tau(1,k-1)$이라 정의하면, $\tau(1,k)$가 볼록함수임을 증명하기 위해서는 $\triangle\tau(1,k)$가 k에 대해서 증가함수임을 보이면 된다. 식(11.a)로 부터 $\triangle\tau(1,k)=\tau(1,k)-\tau(1,k-1)=-\frac{1}{\lambda}\sum_{j=k}^{\infty}\tilde{q}_j$이며, $\sum_{j=k}^{\infty}\tilde{q}_j$가 k에 대해 감소함수이므로 $\triangle\tau(1,k)$는 k에 대해 증가함수이다. ■

보조정리 2.

$\zeta(1,k)$는 k에 대해 볼록함수이다.

(증명) 식(11.c)로부터

$$\triangle\zeta(1,k)=\zeta(1,k)-\zeta(1,k-1)=\frac{1}{\lambda}\left\{k\sum_{j=k+1}^{\infty}\bar{q}_j+\sum_{j=1}^{k}j\bar{q}_j\right\}.$$

$\triangle\zeta(1,k)$가 k에 대해 증가함수임을 보이기 위해서는 다음과 같이 $\triangle\zeta(1,k)-\triangle\zeta(1,k-1)\ge 0$임을 보이면 충분하다.

$$\triangle\zeta(1,k)-\triangle\zeta(1,k-1)=\frac{1}{\lambda}\sum_{j=k}^{\infty}\tilde{q}_j\ge 0. \qquad ■$$

보조정리 3.

q_k가 k에 대하여 단조감소함수이면, $P_f(1,k)$는 k에 대해 볼록함수이다.

(증명) 식(11.b)로부터 $\triangle P_f(1,k)=P_f(1,k)-P_f(1,k-1)=-\tilde{q}_{k-1}$. $P_f(1,k)$가 볼록함수임을 증명하기 위해서는 $\triangle P_f(1,k)$가 단조증가함수임을 보이면 된다. q_k가 단조감소함수라 주어졌으므로 $\tilde{q}_k$도 단조감소함수이고 따라서 $-\tilde{q}_k$는 단조증가함수가 된다. ■

보조정리 4.

q_k가 k에 대해 단조감소함수이면 $A(1,k)$는 k에 대해 볼록함수이다.

(증명) $A(1,k)=(\pi-\lambda c)\tau(1,k)+(K_2-K_1)P_f(1,k)+h\zeta(1,k)$에서 $\pi-\lambda c>0$, $K_2-K_1>0$, $h>0$이므로 $A(1,k)$는 볼록함수들의 비음결합(nonnegative combination)으로 볼록함수가 된다. ■

보조정리 5.

(i) 검사간격이 지수분포나 초지수분포(hyper-exponential distribution)를 따르는 경우 q_k는 단조 감소함수이다.

(ii) 검사간격이 일정하거나 일양분포, 감마분포 등을 따르는 경우에는 q_k가 $k\geq n$의 범위에서 단조감소하는 정수 n이 존재한다.

(증명) 부록참조.

보조정리 5로부터 검사간격이 지수분포나 초지수분포를 따르는 경우에는 q_k는 단조감소함수가 된다. 또한 보조정리 5의 증명과정에서 알 수 있듯이 검사간격이 상수값으로 주어지거나 감마분포를 따르는 경우에는 단위기간당 충격도래률보다 단위기간당 검사율이 크면 q_k는 전구간에서 단조감소함수가 된다. 이 조건은 충족될 확률이 매우 높은 현실적인 조건으로 생각되나, 만일 이 조건이 위배될 경우에도 q_k는 첫 몇개항을 제외하면 그외의 범위에서는 단조감소하게 된다. q_k가 단조감소하면 $A(1,k)$는 볼록함수가 되며, 이러한 조건 하에서는 최적제어정책을 찾는데 큰 도움을 줄 수 있는 다음과 같은 보조정리들이 성립한다.

보조정리 6.

r이 주어질 경우 $T(r,N)$은 N에 대한 볼록함수이다.

(증명)

$A(r,N)=\sum_{j=0}^{r-1}\beta_j A(1,N-j)$에서 $A(1,N-j)$가 N에 대한 볼록함수이므로 r개의 볼록함수의 비음결합인 $A(r,N)$도 N에 대한 볼록함수이다.

$T(r,N)=\dfrac{K_1+A(r,N)}{L(r)}$에서 $L(r)$은 상수이므로 $T(r,N)$은 N에 대한 볼록함수이다. ■

만일 q_k가 전구간에서 단조감소하지 않더라도 $k\geq n$의 구간에서 $q_k\leq q_{k-1}$가 성립하면 $T(r,N)$은 $N\geq r+n-1$의 범위에서 볼록함수임이 보장되므로 이러한 성질은 최적해 탐색에 큰 도움이 될 수 있다.

보조정리 7.

$T(r,k)\leq T(r,k-1)$이면,

$T(r+1,k)\leq T(r+1,k-1)$.

(증명)

주어진 조건 $T(r,k)-T(r,k-1)\leq 0$으로부터 다음 부등식이 얻어진다.

$$A(r,k)-A(r,k-1)=\sum_{m=0}^{r-1}\beta_m\{A(1,k-m)-A(1,k-1-m)\}\le 0. \quad (15)$$

부등식(15)가 성립하기 위해서는 $A(1,k-m)-A(1,k-1-m)$은 증가함수이므로 $A(1,k-r+1)-A(1,k-r)\le 0$이 되어야만 한다.

$$T(r+1,k)-T(r+1,k-1)=\sum_{m=0}^{r}\beta_m\{A(1,k-m)-A(1,k-1-m)\}$$
$$=A(r,k)-A(r,k-1)+\beta r\{A(1,k-r)-A(1,k-1-r)\}$$

이 되며, 주어진 조건에서 $A(r,k)-A(r,k-1)\le 0$이고 $A(1,k-r+1)-A(1,k-r)\le 0$이므로 $A(1,k-r)-A(1,k-1-r)\le 0$이 된다. 따라서 $T(r+1,k)-T(r+1,k-1)\le 0$이다. ■

보조정리 8.

$T(1,k)\le T(1,k+1)$이면,

$T(r,k+r-1)\le T(r,k+r)$.

(증명)

주어진 조건으로부터 $A(1,k)\le A(1,k+1)$이므로 $A(1,k+r-j)-A(1,k+r-1-j)\ge 0$ for $j=0,1,\cdots,r-1$이 성립한다.

따라서, $A(r,k+r)-A(r,k+r-1)=\sum_{j=0}^{r-1}\beta_j\{A(1,k+r-j)-A(1,k+r-1-j)\}\ge 0$이다. ■

위 보조정리들은 최적해를 구하기 위한 효율적 탐색 기법을 설계하는데 큰 도움을 준다. 따라서 이러한 특성들을 효과적으로 이용하면 우수한 탐색기법의 설계가 가능하다. 그러나 만일 검사 간격이 지수분포를 따른다면 최적해 탐색에 결정적인 도움을 줄 수 있는 다음과 같은 비용함수의 특성을 규명할 수 있다.

보조정리 9

검사 간격이 지수분포를 따르면 다음이 성립한다.

$T(r,k)\le T(r,k+1)$이면,

$T(r+1,k+1)\le T(r+1,k+2)$.

(증명)

검사간격이 지수분포를 따르면 식(7)과 (10)으로부터 $\beta_0=1$, $\beta_j=q_0, j\ge 1$가 됨을 보일 수 있다. 이러한 사실과 주어진 조건으로부터 다음 부등식이 얻어진다.

$$A(r,k+1)-A(r,k)=A(1,k+1)-A(1,k)+q_0\sum_{m=1}^{r-1}\{A(1,k+1-m)-A(1,k-m)\}\ge 0.$$

$A(1,k)$가 볼록함수라는 성질로부터 위 부등식을 만족하기 위해서는 $A(1,k+1)-A(1,k)\ge 0$이 되어야만 한다. 또한 $A(r+1,k+2)-A(r+1,k+1)$은 다음과 같이 표현된다.

$$A(r+1,k+2)-A(r+1,k+1)=A(1,k+2)-A(1,k+1)+q_0\sum_{m=1}^{r}\{A(1,k+2-m)-A(1,k+1-m)\}.$$

식(16)과 (17)으로부터 다음과 같은 관계를 얻게된다.

$$\{A(r+1,k+2)-A(r+1,k+1)\}=$$
$$\{A(r,k+1)-A(r,k)\}+\{A(1,k+2)-A(1,k+1)\}-$$
$$\{A(1,k+1)-A(1,k)\}+q_0\{A(1,k+1)-A(1,k)\}\ge 0.$$

마지막 부등식은 주어진 조건과 $A(1,k)$가 볼록함수라는 성질, 그리고 $A(1,k+1)-A(1,k)\ge 0$로부터 성립한다. ■

제어변수 r의 값이 주어졌을 경우 $T(r,N)$을

최소화하는 N의 값을 $N^*(r)$이라 하자. 만일 검사간격이 지수분포를 따른다면 보조정리 7과 9로부터 $N^*(r+1)$은 $N^*(r)$ 혹은 $N^*(r)+1$이 됨을 알 수 있으며 다음과 같은 중요한 성질을 또한 갖게 된다.

보조정리 10. 검사간격이 지수분포를 따르면 다음이 성립한다.

$A(r+2, N^*(r+2))-A(r+1, N^*(r+1))\geq$
$A(r+1, N^*(r+1))-A(r, N^*(r))$.

(증명) 부록참조

보조정리 10으로부터 극히 적은 노력으로 최적해의 탐색을 가능하게 하여주는 $T(r, N)$의 다음과 같은 성질을 증명할 수 있다. ■

정리 1.

$T(r, N^*(r))$은 r에 대해 *unimodal*하다.

(증명)

이를 증명하기 위해서는 다음이 성립함을 보임으로써 충분하다.

$T(r, N^*(r))\leq T(r+1, N^*(r+1))$이면

$$T(r+1, N^*(r+1))\leq T(r+2, N^*(r+2)). \tag{18}$$

$\theta_r=K_1+A(r, N^*(r))$, $\delta_r=A(r, N^*(r))-A(r-1, N^*(r-1))$으로 정의하면, $L(r+1)=L(r)+q_0L(1)$로부터 식(18)은 다음과 같다.

$\frac{\theta_r}{L(r)}\leq\frac{\theta_r+\delta_{r+1}}{L(r)+q_0L(1)}$이면,

$$\frac{\theta_r+\delta_{r+1}}{L(r)+q_0L(1)}\leq\frac{\theta_r+\delta_{r+1}+\delta_{r+2}}{L(r)+2q_0L(1)} \tag{19}$$

보조정리 10으로부터 $\delta_{r+2}\geq\delta_{r+1}$이고 식(19)의 모든 항은 양의 값을 가지므로 식(19)는 성립한다. ■

앞에서 설명된 보조정리와 정리로부터 검사 간격이 지수분포를 따를 경우 최적해를 구하기 위해 다음과 같은 알고리듬을 사용할 수 있다.

최적해를 구하기 위한 알고리듬

(case 1) $\pi\leq\lambda c$: 최적정책은 (-1, 0)이다.

(case 2) $\pi>\lambda c$:

1. $r=1$로 놓고 $k=2$에서부터 시작하여 $A(1, k)\geq A(1, k-1)$을 만족할때 까지 k값을 증가시킨다. $N^*(1)=k-1$으로 놓고 $T(1, N^*(1))$을 계산한다.
2. $r=r+1$로 놓는다.
   $A(r, N^*(r-1))$과 $A(r, N^*(r-1)+1)$의 값을 계산한 후 이값들을 비교하여 $N^*(r)$의 값들을 구한다.
   $T(r, N^*(r))$의 값을 계산한다.
3. 만일 $T(r, N^*(r))>T(r-1, N^*(r-1))$의 관계를 만족시키지 못하면 단계 2로 간다.
   위 관계를 만족하면 $T(r-1, N^*(r-1))<\pi-\lambda c$의 부등식이 만족되는지 살펴본다.
   위 부등식을 만족하면 최적정책은 $(r-1, N^*(r-1))$이고, 위 부등식을 만족하지 못하면 최적정책은 (-1, 0)이다.

위 알고리듬으로 얻어진 해는 검사 간격이 지수분포를 따를 경우에는 최적해임이 보장된다. 그러나 검사 간격이 지수분포를 따르지 않는 경우에는 보조정리 9,10 및 정리 1이 성립됨을 수학적으로 증명하지 못해 위 알고리듬에 의해 구해진 해가 최적해임을 보장할 수는 없다. 이 경우에는 $N^*(r)$을 구하기 위하여 알고리듬의 단계 2를 다음과 같이

수정할 수 있다.

$r=r+1$으로 놓는다.

$r=N^*(r-1)$으로부터 시작하여 $A(r,k)>A(r, k-1)$을 만족할때까지 k의 값을 증가시킨다.

$N^*(r)=k-1$으로 놓고 $T(r,N^*(r))$을 계산한다.

그러나 검사 간격이 지수분포를 따르지 않는 경우에도 많은 예제를 통한 실험결과, 위 알고리듬에 의해 얻어진 해는 모든 예제에서 최적해였음이 관측되었으며, 이러한 이유로 위 알고리듬은 검사간격이 지수분포를 따르지 않는 경우에도 유용하게 사용될 수 있을 것으로 판단된다.

위 알고리듬에서는 $N^*(r)$이 구해지면 1개의 $A(1,k)$즉 $A(1,N^*(r)+1)$만을 더 계산함으로써 $N^*(r+1)$이 구해진다. 또한 $A(1,N^*(r)+1)$은 $A(1,k)$의 순환적 구조에 의해 앞 단계에서 의미 구하여진 $k\leq N^*(r)$범위의 $A(1,k)$값들로 부터 간단히 계산된다. 따라서 극히 적은 계산 만이 부가됨으로써 $N^*(r+1)$의 값이 구해질 수 있으며, 이러한 부가적 계산을 수회 반복 수행하면 최적해를 찾을 수 있게되므로, 위 알고리듬은 매우 효율적이라 할 수 있다.

4. 적 용 예 제

본 연구에서 제안한 알고리듬의 효율성을 분석하고 검사 간격이 지수분포를 따르지 않는 경우에 본 연구에서 제안한 알고리듬이 최적해를 항상 산출해 주는 지를 검증하기 위하여 많은 예제를 통하여 실험하여 보았다. 그 결과 본 알고리듬에 의하여 구해진 해는 모든 실험예제에서 항상 최적해였고 최적해를 구하는데 소요되는 시간도 극히 짧았음이 관측되었다. 여기서는 검사 간격이 지수분포를 따를 경우, 어랑분포를 따를 경우, 일양분포를 따를 경우의 3가지 예제를 분석해 보도록 한다.

〈예제 1〉

검사 간격은 평균 10/3인 지수분포를 따르며, 작동중인 부품이 고장날때까지 소요되는 시간은 평균 2인 지수분포를 따른다($\lambda=0.50$). 그 외에 시스템 운용비용과 관련된 정보는 다음과 같다.

$$c=10,\ K_1=20,\ K_2=120,\ \pi=10,\ h=1$$

〈예제 2〉

검사 간격은 평균 3인 3단계 어랑분포(3-stage Erlang distribution)를 따르며, 작동중인 부품이 고장날 때까지 소요되는 시간은 평균 2인 지수분포를 따른다($\lambda=0.5$). 그 외에 시스템 운용비용과 관련된 정보는 다음과 같다.

$$c=10,\ K_1=20,\ K_2=100,\ \pi=20,\ h=1.$$

〈예제 3〉

검사 간격은 [2,4]구간에서 정의되는 일양분포(uniform distribution)을 따르며, 작동중인 부품이 고장날 때까지 소요되는 시간은 평균 1인 지수분포를 따른다($\lambda=1$). 그 외에 시스템 운용비용과 관련된 정보는 다음과 같다.

$$c=10,\ K_1=20,\ K_2=300,\ \pi=20,\ h=1.$$

3가지 예제에 대한 결과가 표 1-3에 수록되어 있다. 예제 1, 2, 3 모두 $\pi > \lambda c$이므로 최적정책을 결정하기 위해서는 알고리듬에 의하여 최적 (r, N)정책을 구하여야 한다. 그 결과 예제 1은 (5,8), 예제 2는 (5,8), 예제 3은 (6,12)가 각각 최적 (r, N)정책임을 알수 있다. 이들 정책을 (-1, 0)정책과 비교해보면 예제1의 경우는 $TC(5,8)$의 값이 π보다 크므로 최적정책은 (-1, 0)가 되며 예제 2와 3에서는 $TC(r^*, N^*)$값이 모두 π보다 적으므로 이들 정책이 (-1, 0)정책보다 우수함을 알 수 있다.

Table 1. Result of Example 1

r	N*(r)	L(r,N*(r))	T(r,N*(r))	TC(r,N*(r))
1	6	5.3333	10.2688	15.2688
2	6	7.3333	9.3310	14.3310
3	7	9.3333	8.8315	13.8315
4	7	11.3333	8.6721	13.6721
5*	8	13.3333	8.5713	13.5713
6	9	15.3333	8.6272	13.6272
7	10	17.3333	8.7856	13.7856
8	10	19.3333	8.9407	13.9407
9	11	21.3333	9.1338	14.1338

(* represents the optimal (r,N) policy)

Table 2. Result of Example 2

r	N*(r)	L(r,N*(r))	T(r,N*(r))	TC(r,N*(r))
1	5	4.2632	10.2501	15.2501
2	6	6.5082	8.9384	13.9384
3	6	8.0106	8.3433	13.3433
4	7	10.0014	8.0726	13.0726
5*	8	12.0000	8.0603	13.0603
6	9	13.9999	8.1946	13.1946
7	9	16.0000	8.3549	13.3549

(* represents the optimal (r,N) policy)

Table 3. Result of Example 3

r	N*(r)	L(r,N*(r))	T(r,N*(r))	TC(r,N*(r))
1	9	3.1864	14.3014	24.3014
2	9	3.7185	13.4039	23.4039
3	9	4.5493	12.6772	22.6772
4	10	5.2592	12.2456	22.2456
5	11	6.5450	12.0698	22.0698
6*	12	7.5553	12.0600	22.0600
7	13	8.5573	12.1676	22.1676
8	13	9.5564	12.3097	22.3097

(* represents the optimal (r,N) policy)

또한 표를 통하여 $T(r, N^*(r))$은 r에 대하여 모두 unimodal 함을 확인할 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 N개의 부품이 대기구조로 연결되어있는 시스템의 예방교체정책에 대한 분석이 수행되었다. 예방교체정책으로는 고장난부품의 수가 r이상이 되는 최초의 검사시점에서 시스템의 교체가 이루어지는 한계치를 이용한 예방교체정책이 고려되었다. 본 연구에서는 선형비용구조를 가정한후 r과 N의 값이 주어졌을때 단위시간당 발생하는 기대비용을 효율적으로 계산할수 있는 식을 유도하였다. 또한, 비용함수가 갖는 중요한 수학적 특성들을 규명하였으며, 비용함수의 수학적 특성을 이용하여 단위시간당 발생하는 기대비용을 최소화하여주는 r과 N의 값을 찾기위한 효율적인 알고리듬을 제시하였다. 본 연구에서 개발된 분석기법 및 알고리듬은 시스템을 신뢰성있게 설계하고 경제적으로 운

용하는데 도움을 줄 수 있으리라 생각된다. 특히 본 연구는 시간이 지남에 따라 성능이 노후화되고 노후화 정도가 이산적인 형태로 표시되는 시스템과 직접적인 유이성(analogy)이 존재함으로, 이러한 경우의 예방교체정책으로도 이용될수 있으리라 판단된다.

참 고 문 헌

[1] Barlow, R.E. and F.Proschan, Mathematical Theory of Reliability, Wiley, New York (1965)

[2] Luss,H. "Maintenance Policies When Deterioration Can Be Observed By Inspection," Opns. Res., v24 (1976), pp.359-366.

[3] Lee, H. S., and M.M.Srinivasan, "Optimal Replacement Policies for Systems with Multiple Standby Components," IEEE Trans. on Rel., v43(1994), pp.414-422.

[4] Ross, S. M., Applied Probability Models with Optimization Applications, Holden-Day Inc., San Francisco, CA.(1970)

[5] Sherif, Y. and M.L. Smith, "Optimal Maintenance Models for Systems Subject to Failure - A Review," Naval Research Logistics Quarterly, v28(1981), pp.47-74.

[6] Srinivasan, M. M., and H. S. Lee, "Random Review Production/Inventory Systems with Compound Poisson Demands and Arbitrary Processing Times," Mgmt. Sci., v37(1991), pp.813-833.

[7] Tijms, H. C. and F. A. Van der Duyn Schouten, "A Markov Decision Algorithm for Optimal Inspection and Revisions in a Maintenance System with Partial Information," European J. of Opnl. Res., v21 (1985), pp.245-253.

[8] Valdez - Flores, C. and R. M. Feldman, "A Survey of Preventive Maintence Models for Stochastically Deteriorating Single - Unit Systems," Nav. Res. Logistics, v36(1989), pp.419-466.

[9] Zuckerman, D., "Inspection and Replacement Policies," Jour. of Applied Probability, v17 (1980), pp.168-177.

95년 7월 최초 접수, 95년 8월 최종 수정

부록 : 보조정리 5, 10증명

보조정리 5.

(i) 검사간격이 지수분포나 초지수분포를 따르는 경우 q_k는 단조감소함수이다.

(ii) 검사간격이 일정하거나 일양분포, 감마분포 등을 따르는 경우에는 q_k가 $k \geq n$의 범위에서 단조감소하는 정수 n이 존재한다.

(증명) 식(7)을 이용하면 q_k는 다음과 같이 $G(\cdot)$의 Laplace변환함수의 도함수식으로 표현된다.

$$q_k = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} dG(t) = \frac{(-\lambda)^k L^{(k)}(\lambda)}{k!}, \tag{A.1}$$

여기서 $L^{(k)}(s)$는 $G(t)$의 *Laplace*변환의 k차 도함수이다.

식(A.1)으로부터 검사간격의 분포형태에 따른 q_k값의 표현식을 다음과 같이 구할 수 있다.

(i) 검사간격이 지수분포를 따르는 경우

$G(t)$가 모수 ν인 지수분포를 따르는 경우 $L^{(k)}(s)$와 q_k의 값은 다음과 같다.

$L^{(k)}(s) = (-1)^k (k!)\nu(\nu+s)^{-(k+1)}$,

$$q_k = \left(\frac{\lambda}{\nu+\lambda}\right)^k \left(\frac{\nu}{\nu+\lambda}\right) = \frac{\lambda}{\nu+\lambda} q_{k-1}. \tag{A.2}$$

식(A.2)로부터 q_k는 k에 대한 단조감소함수임을 알 수 있다.

(ii) 검사간격이 초지수분포를 따르는 경우

검사간격이 모수 ν_i인 지수분포를 따를 확률이 $P_i(i=1,2,\cdots,r)$로 주어질 경우 $L^{(k)}(s)$와 q_k의 값은 다음과 같다.

$$L^{(k)}(s) = \sum_{i=1}^{r} p_i(-1)^k k!\,\nu_i(\nu_i+s)^{-(k+1)},$$

$$q_k = \lambda^k \sum_{i=1}^{r} p_i \nu_i \left(\frac{1}{\nu_i+\lambda}\right)^{k+1},\ k \geq 0. \tag{A.3}$$

식(A.3)으로부터 다음과 같이 q_k가 단조함수임을 보일 수 있다.

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = \frac{\sum_{i=1}^{r} p_i \nu_i \left(\frac{1}{\nu_i+\lambda}\right)^k \left(\frac{\lambda}{\nu_i+\lambda}\right)}{\sum_{i=1}^{r} p_i \nu_i \left(\frac{1}{\nu_i+\lambda}\right)^k} < 1.$$

(iii) 검사 간격이 상수일 경우

검사간격이 d로써 항상 일정할 경우의 q_k는 다음과 같이 주어진다.

$$q_k = \frac{e^{-\lambda d}(\lambda d)^k}{k!} = \frac{\lambda d}{k} q_{k-1}.$$

따라서, $k \geq \lambda d$인 범위에서는 q_k는 단조감소함수이며 $\lambda d \leq 1$이면 q_k는 전구간에서 단조감소함수가 된다.

(iv) 검사간격이 감마분포를 따르는 경우

검사 간격이 모수 r, ν로 주어지는 감마분포를 따르는 경우 $L^{(k)}(s)$의 q_k값은 다음과 같다.

$$L^{(k)}(s) = (-1)^k \nu^r (\nu+s)^{-(r+k)} r(r+1)\cdots(r+k-1),$$

$$q_k = \frac{\lambda^k \nu^r (\nu+\lambda)^{-(r+k)} r(r+1)\cdots(r+k-1)}{k!} = \frac{r+k-1}{k} \frac{\lambda}{\lambda+\nu} q_{k-1}. \tag{A.4}$$

식 (A.4)로부터,

$k \geq \frac{\lambda(r-1)}{\nu}$의 구간에서는 q_k가 단조감소이며, $\nu \geq \lambda(r-1)$이면, q_k는 전구간에서 단조감소함수가 된다.

(v) 검사 간격이 일양분포를 따르는 경우

검사간격이 구간 $[c, d]$에서 일양분포를 따르는 경우 $L^{(k)}(s)$와 q_k의 값은 다음과 같다.

$$L^{(k)}(s) = \frac{1}{d-c} e^{-s(c+d)} \Big[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^k (c+d)^j (k-j)!\, s^{-(k-j+1)}\Big],$$

$$q_k = q_{k-1} + \frac{1}{\lambda(d-c)} \left\{ e^{-\lambda c} \frac{(\lambda c)^k}{K!} - e^{-\lambda d} \frac{(\lambda d)^k}{k!} \right\}. \tag{A.5}$$

식 (A.5)로부터

$k \geq \frac{\lambda(d-c)}{\text{In}d - \text{In}c}$의 구간에서는 q_k가 단조감소함수이며, $\text{In}\frac{d}{c} \geq \lambda(d-c)$이면 q_k는 전구간에서 단조감소함수가 된다. ■

보조정리 10.

검사간격이 지수분포를 따르면 다음이 성립한다.

$A(r+2, N^*(r+2)) - A(r+1, N^*(r+1)) \geq A(r+1, N^*(r+1)) - A(r, N^*(r))$

(증명) $N^*(r) = k$라 하자. 그러면 $N^*(r+1)$과 $N^*(r+2)$가 가질 수 있는 값은 다음 4경우에 국한된다.

i) $N^*(r+1) = k$, $N^*(r+2) = k$

ii) $N^*(r+1) = k$, $N^*(r+2) = k+1$

iii) $N^*(r+1) = k+1$, $N^*(r+2) = k+1$

iv) $N^*(r+1) = k+1$, $N^*(r+2) = k+2$

따라서 위에 열거된 4경우에 대해 보조정리 10이 성립함을 증명하면 된다.

i) $\{A(r+2,k)-A(r+1,k)\}-\{A(r+1,k)-A(r,k)\}$

$$=A(1,k)+q_0\sum_{j=1}^{r+1}A(1,k-j)-A(1,k)-q_0\sum_{j=1}^{r}A(1,k-j)-A(1,k)-$$

$$q_0\sum_{j=1}^{r}A(1,k-j)+A(1,k)+q_0\sum_{j=1}^{r-1}A(1,k-j)=q_0\{A(1,k-r-1)-A(1,k-r)\}.$$

위의 부호가 비음임을 다음과 같이 보일 수 있다.

$$A(r,k)-A(r,k-1)=A(1,k)-A(1,k-1)+q_0\sum_{j=1}^{r-1}\{A(1,k-j)-A(1,k-1-j)\}\le 0.$$

위의 부등식이 성립하기 위해서는 $A(1,k)$의 볼록성질로부터 $A(1,k-r+1)-A(1,k-r)\le 0$이 되어야만 하고 이로부터 $A(1,k-r)-A(1,k-r-1)\le 0$이 된다.

ii) $\{A(r+2,k+1)-A(r+1,k)\}-\{A(r+1,k)-A(r,k)\}$

$$=A(1,k+1)+q_0\sum_{j=1}^{r+1}A(1,k+1-j)-A(1,k)-q_0\sum_{j=1}^{r}A(1,k-j)-A(1,k)$$

$$-q_0\sum_{j=1}^{r}A(1,k-j)+A(1,k)+q_0\sum_{j=1}^{r-1}A(1,k-j)$$

$$=A(1,k+1)-A(1,k)+q_0\{A(1,k)-A(1,k-r)\}$$
$$=A(r+1,k+1)-A(r+1,k)\ge 0.$$

iii) $\{A(r+2,k+1)-A(r+1,k+1)\}-\{A(r+1,k+1)-A(r,k)\}$

$$=A(1,k+1)+q_0\sum_{j=1}^{r+1}A(1,k+1-j)-A(1,k+1)-q_0\sum_{j=1}^{r}A(1,k+1-j)$$

$$-A(1,k+1)-q_0\sum_{j=1}^{r}A(1,k+1-j)+A(1,k)+q_0\sum_{j=1}^{r-1}A(1,k-j)$$

$$=\{A(1,k)-A(1,k+1)\}+q_0\{A(1,k-r)-A(1,k)\}$$
$$=A(r+1,k)-A(r+1,k+1)\ge 0.$$

iv) $\{A(r+2,k+2)-A(r+1,k+1)\}-\{A(r+1,k+1)-A(r,k)\}$

$$=A(1,k+2)-q_0\sum_{j=1}^{r+1}A(1,k+2-j)-A(1,k+1)-q_0\sum_{j=1}^{r}A(1,k+1-j)$$

$$-A(1, k+1)-q_0\sum_{j=1}^{r}A(1, k+1-j)-A(1,k)+q_0\sum_{j=1}^{r-1}A(1, k-j)$$

$$=\{A(1, k+2)-A(1, k+1)\}-\{A(1, k+1)-A(1, k)\}+q_0\{A(1, k+1)-A(1, k)\}.$$

위 식에서 $A(1, k)$가 볼록함수이므로 항 $\{A(1, k+2)-A(1, k+1)\}-\{A(1, k+1)-A(1, k)\}\geq 0$이다. 또한 두번째 항은

$$A(r, k+1)-A(r, k)=A(1, k+1)-A(1, k)+q_0\sum_{j=1}^{r-1}\{A(1, k+1-j)-A(1, k-j)\}\geq 0$$

으로부터 $A(1, k+1)-A(1, k)\geq 0$이 되어야만 한다. ■