Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol.21, No.4, December, 1995

일반 다중선택 선형배낭문제의 신속한 해법연구*

A Fast Algorithm for the Generalized Multiple Choice Linear Knapsack Problem

원 중 연**

Joong-Yeon Won**

Abstract

By finding some new properties, we develop an $O(r_{max}n^2)$ algorithm for the generalized multiple choice linear knapsack problem where r_{max} is the largest multiple choice number and n is the total number of variables. The proposed algorithm can easily be embedded in a branch-and-bound procedure due to its convenient structure for the post-optimization in changes of the right-hand-side and multiple choice numbers. A numerical example is presented.

1. 서론

일반 다중선택 선형배낭문제 (P)는 다음과 같이 표현된다.[13]

$$\text{(P)}\ \text{Minimize}\ \Sigma_{i\in I}\Sigma_{j\in N_i}c_{ij}x_{ij} \qquad (1.1a)$$
$$\text{subject to}\ \Sigma_{i\in I}\Sigma_{j\in N_i}a_{ij}x_{ij}\geq b, \qquad (1.1b)$$
$$\Sigma_{j\in N_i}x_{ij}=r_i,\ i\in I, \qquad (1.1c)$$
$$0\leq x_{ij}\leq 1,\ j\in N_i,\ i\in I. \qquad (1.1d)$$

여기서 선택집합 N_i들은 서로 중복되지 않고, $c_{ij}>0$, $a_{ij}>0$, $b>0$이다. 제약식 (1.1c)의 선택상수 r_i들은 다중선택의 의미를 지니므로 1에 가까운 작은 양의 정수로서 $1\leq r_i\leq\sqrt{n_i}$, $i\in I$,를 만족한다고 가정한다. 여기서 $n_i=|N_i|$이다. 또한, 각 선택집합 N_i별로 모든 변수들은 제약식 (1.1b)의 계수 a_{ij}가 가장 작은 것부터 시작하여 비감소하는 순으로 재배열된 것으로 가정한다. 다음의 기호들을 정의한다.

$n=\Sigma_{i\in I}n_i$, $n_{max}=\max_{i\in I}\{n_i\}$, $r_{max}=\max_{i\in I}\{r_i\}$.

문제 (P)에 정수제약이 부가된 일반 다중선택 정수배낭문제는 제약식 (1.1c)에 의해 각 선택집합 N_i마다 r_i개의 변수들이 1의 값

* 이 논문은 교비 해외파견(1992-1994) 연구지원에 의해 수행되었음.

** 경기대학교 산업공학과

을 갖도록 선택되어야 하는 다중선택 문제이다. 다중선택 제약구조를 갖는 정수문제들은 현실적으로 여러 분야에서 대부분 대형의 문제로 나타나고 있으며 [7], 특히 유연 생산계획분야에서 기계부품에 대한 작업할당등의 모형화에 빈번히 나타나고 있다[10]. 문제 (P)는 일반 다중선택 정수배낭문제의 LP 완화문제로서 좀더 복잡한 정수문제의 대용완화문제로 활용될 수 있다. 다중선택 제약은 상호독립 제약, 특수배열 제약, 일반상한 제약으로도 불리우고 있다.

문제 (P) 및 이의 특수한 문제들에 대해서 많은 연구가 있었다. 문제 (P)에서 제약식 (1.1c)의 선택상수 r_i들이 모두 1이 되는 특수경우의 문제는 다중선택 선형배낭문제라 불리우며 여러 연구에서 그 특성들과 해법들이 보고되었다.[1,2,3,4,5,6,8,9,11,12]

다중선택 선형배낭문제에 대한 해법들은 기본적으로 제약식 (1.1c) (단, 모든 $r_i=1$)의 구조적 특성으로 인하여 생기는 변수들간의 우월성을 활용하고 있다. 변수들간에 우월성이 성립하므로 열등한 변수들은 미리 제거될 수 있고, 각 선택집합별 계수들이 이루는 $(a_{ij}, c_{ij}) \in R^2$ 평면상에서 우월한 변수들중 이웃한 두 변수들이 연결되는 선분들은 아래로 볼록한 부분선형곡선을 형성한다. 각 선택집합마다 1의 값을 갖는 변수는 단지 한개이므로 쉽게 최적해의 도출이 가능하다.[9]

이 해법들은 각 선택집합마다 제약식의 계수 a_{ij}가 비감소하는 순서로 변수들을 재배열해야 하므로 최악상황하의 계산상 복잡도는 기본적으로 $O(nlogn)$이 소요된다.[1,2,4,5,6,8,9,11] Dyer[3]와 Zemel[12]은 복잡도가 $O(n)$인 신속한 해법을 제시하였으나 이 해법들은 열등한 변수들을 제거하지 않기 때문에 분지한계해법에 적용되기 어려운 것으로 보고되고 있다.[2,8]

문제 (P)에서 선택상수 r_i는 1보다 클 수 있으므로 최적해에서 각 선택집합마다 1의 값을 갖는 변수들이 여러 개 발생되고 따라서 변수들간의 우월성이 성립되지 않는다. 연구[13]에서는 변수들간의 우월성이 성립하지 않으나 우변상수 값의 증가에 따른 목적함수치가 아래로 볼록한 부분선형곡선을 형성한다는 점을 활용하여 우변상수에 대한 모수분석 특성을 연구하므로써 최악상황하의 복잡도가 $O((n_{\max}n)^2)$인 해법을 제시한 바 있다.

문제 (P)에서 $r_i=1$인 선택집합 N_i에서는 우변상수의 증가에 따라 기저에 있던 한 변수가 탈락이 되면 다시는 기저에 재진입할 수 없다. 그러나 $r_i > 1$인 경우에는 탈락되었던 변수가 후에 재진입하는 경우가 발생이 된다. 본 연구에서는 기저를 떠난 변수가 기저에 재진입할 수 있는 최대회수는 r_i번 이라는 것을 보이고 이를 활용하여 복잡도가 $O(r_{\max}n^2)$인 신속한 해법을 제시한다.

2. 해법 및 분석

문제 (P)의 기저 가능해를 고려하자. 제약식 (1.1b), (1.1c)의 개수는 $|I|+1$개이며 각 제약식마다 기저변수가 하나씩 존재한다. 제약식 (1.1c)는 $|I|$개이고 해당되는 선택집합들은 서로 중복되지 않으므로 제약식 (1.1b)에 의해 임의의 한 선택집합에서 두개의 기저변수가 존재하게 된다.

이때 두 기저변수는 선택상수 r_i가 정수이므로 제약식 (1.1c) 및 (1.1d)에 의해 λ와 1-

λ의 분수해를 취한다.($0 \leq \lambda \leq 1$) 따라서 문제 (P)의 기저 가능해에는 최대로 두개의 변수만이 분수값을 취할 수 있으며 이 경우 두 변수는 같은 선택집합에서 동시에 발생한다.

문제 (P)의 한 선택집합 N_i에서 두 변수 x_{ij_1}과 x_{ij_2}가 이루는 비율 $\theta_i(j_1,j_2)$를 다음과 같이 정의한다. 단, $a_{ij_1}=a_{ij_2}$이면 $\theta \equiv \infty$로 정의한다.

$$\theta_i(j_1,j_2)=(c_{ij_2}-c_{ij_1})/(a_{ij_2}-a_{ij_1})$$

비율 $\theta_i(j_1,j_2)$는 평면 (a_{ij}, c_{ij})에서 두 변수 x_{ij_1}, x_{ij_2}에 해당되는 두점 (a_{ij_1}, c_{ij_1})과 (a_{ij_2}, c_{ij_2})가 이루는 선분의 기울기 값을 나타내고 있다.

문제 (P)의 각 선택집합 N_i마다 목적함수의 계수 c_{ij}가 가장 작은 r_i개 변수들을 찾고 해당하는 지수집합을 J_i라 하자. 그러면 $|J_i|=r_i$이다. 다음과 같은 해 x'을 고려하자.

$$x_{ij}'=1,\ j \in J_i,\ x_{ij}'=0,\ j \in N_i \backslash J_i,\ i \in I.$$

이 해는 제약식 (1.1c), (1.1d)를 만족시키며, 이 해의 목적함수치 z'는 문제 (P)의 최적목적치에 대한 하한치가 되고 있다. 자원양 $\bar{b}$를 $\bar{b}=\Sigma_{i \in I}\bar{b}_i=\Sigma_{i \in I}\Sigma_{j \in J_i}a_{ij}$ 라 하자. $\bar{b} \geq b$ 이면 해 x'은 최적해가 된다. 그러나, $\bar{b} < b$ 일 경우에는 제약식 (1.1b)가 만족되기 위해서 $\bar{b}$가 증가되어야 한다.

다음 보조정리 1은 자원양 $\bar{b}$가 α만큼 증가될 때 목적함수치의 증가가 최소로 이루어지도록 발생하는 새로운 해 및 이때 분수값을 갖게 되는 변수들을 결정한다.

보조정리 1 자원양 $\bar{b}$가 α만큼 증가함에 따라 분수값을 취하는 기저변수의 지수 f_1, f_2, 해당되는 선택집합의 지수 q 및 목적함수치가 최소로 증가하게 되는 비율 θ는 다음에 의해 결정된다.

$$\theta_q(f_1,f_2)=\min[\min_{i \in I}\min_{j_1 \in J_i}\min_{j_2 \in N_i \backslash J_i,\, j_2 > j_1}\{\theta_i(j_1,j_2)\}]$$

(증명) 자원양 $\bar{b}$일 때 현재의 해에서 1의 값을 취하고 있는 변수들의 지수집합은 J_i, $i \in I$, 이다. $|J_i|=r_i$, $i \in I$,이므로 자원양의 증가 α를 흡수하기 위해서는 한 J_i에 속한 지수 j_1에 해당하는 변수 x_{ij_1}의 값이 1에서 감소하여 분수값을 취하고, J_i에 속하지 않은 다른 지수 j_2 ($j_2 > j_1$, $j_2 \in N_i$)에 해당하는 변수 x_{ij_2}의 값이 0에서 양의 분수값으로 증가하여야 한다. 선택집합 N_i에서 제약식 (1.1b), (1.1c)의 열벡타로 이루어 지는 2×2 축소 기저행열 B를 정의하자. 분수값을 갖는 기저변수는 x_{ij_1}, x_{ij_2}, $j_1 \in J_i$, $j_2 \in N_i \backslash J_i$, $j_2 > j_1$,의 형태로 발생이 되므로 축소 기저행열 B는 기저벡타 (x_{ij_1}, x_{ij_2})에 대응된다. 선택집합 N_i에서 자원양이 α만큼 증가할 때 해당되는 목적함수치 z_i의 변화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z_i(\bar{b}_i+\alpha) &= z_i(\bar{b}_i)+\alpha c_B B^{-1} e_1 \\ &= z_i(\bar{b}_i)+\alpha(c_{ij_2}-c_{ij_1})/(a_{ij_2}-a_{ij_1}) \\ &= z_i(\bar{b}_i)+\alpha\theta_i(j_1,j_2) \end{aligned}$$

여기서 $c_B=(c_{ij_1}, c_{ij_2})$, $e_1=(1,0)^t$이다. 따라서 선택집합 N_i에서 목적함수치가 최소로 증가되는 비율은 다음과 같이 결정된다.

$$\min_{j_1 \in J_i}\min_{j_2 \in N_i \backslash J_i,\, j_2 > j_1}\{\theta_i(j_1,j_2)\}$$

이상으로부터 자원양 $\bar{b}$가 α만큼 증가할 때 모든 선택집합 N_i, $i \in I$,에 대해서 목적함수치가 최소로 증가하는 비율 및 이때의 분수값을 취하는 변수들은 본 정리의 식에 의해 결정된다. □

보조정리 1에서 α가 0으로부터 $(a_{qf_2}-a_{qf_1})$ 만큼 증가하게 되면 양의 분수값을 취하던 변수 x_{qf_1}은 0이 되고 변수 x_{qf_2}는 1의 값을 갖게 된다. 따라서 1의 값을 취하는 변수들의 새로운 지수집합 J_q에는 f_2가 포함되고 f_1은 탈락이 된다.

한 선택집합에서 두 변수 상호간에 계산될 수 있는 총 비율들의 수는 n_iC_2개이나 이중에서 부분선형곡선 형성에 대상이 되는 후보비율들의 수는 최대로 r_in_i개 만이 된다. 이것은 다음 정리2에서 보는 바와 같이 한번 기저를 떠난 변수가 기저에 재진입할 수 있는 최대회수는 r_i번이기 때문이다. 부분선형곡선 형성에는 각 비율들이 한번만 사용되므로 검색할 가치가 있는 비율들은 한 변수당 계산되는 비율들중에서 가장 작은 r_i개의 비율들이며 따라서 모든 변수들에 대해 최대로 r_in_i개가 된다.

정리 2 선택집합 N_i에서 자원양 $\bar{b}$가 증가함에 따라 기저에서 탈락된 변수가 기저에 재진입할 수 있는 최대회수는 r_i회이하이다.

(증명) 한 선택집합 N_i에서 $|J_i|=r_i$이고 임의의 $f_1\in J_i$가 현재 기저변수의 지수라고 하자. 자원양이 증가함에 따라 보조정리 1에 의하여 분수값을 취하던 변수 x_{if_1}이 기저를 떠나면서 0이 되면 J_i에서 탈락이 되고, 대신 다른 변수 x_{if_2} $(f_2 \rangle f_1,\ f_2\in N_i\backslash J_i)$가 기저로 진입되어 자원양이 증가됨에 따라 1의 값을 갖게 되면 f_2는 J_i에 속하게 된다. 따라서 탈락된 f_1이 다시 기저에 진입되고 J_i에 속하려면, f_1보다 작고 J_i에 속해 있는 다른 지수 f_1' $(f_1' \langle f_1,\ f_1'\in J_i)$이 대신 J_i에서 탈락이 되어야 한다. 이러한 f_1'은 r_i-1개를 넘지 않는다. 이 과정이 반복되면서 f_1이 J_i에 있는 지수들중 가장 작은 지수일 때 탈락이 되면 다시는 기저에 들어올 수 없다. 따라서 기저를 떠난 변수가 다시 기저에 재진입할 수 있는 최대회수는 r_i회이하가 된다. □

다음에는 각 선택집합별로 검색할 가치가 있는 r_in_i개의 비율들중 부분선형곡선에 실제 쓰이는 우월비율들을 찾는 우월비율 탐색해법을 제시한다. 이 해법의 적용결과는 각 선택집합 N_i로부터 부분선형곡선의 일부분이 되는 선분들의 비율집합인 목록 L_i가 구해진다.

우월비율 탐색해법

0. $J\leftarrow\phi,\ J_i\leftarrow\phi,\ R_j\leftarrow\phi,\ j=1,\cdots,n_i,\ M\leftarrow\phi, L_i\leftarrow\phi.$
1. (초기해) 각 선택집합 N_i에서 목적함수의 계수 c_{ij}가 가장 작은 r_i개 변수들을 찾아서 해당되는 지수집합을 J_i라 하고 $J\leftarrow J_i$라 놓는다.
2. (후보비율 계산) 각 지수 $j_1(j_1=1,\cdots,n_i-1)$에 대해 j_1보다 큰 모든 지수 j_2와의 비율 $\theta_i(j_1,j_2)$를 계산한다.

   $\theta_i(j_1,j_2)=(c_{ij_2}-c_{ij_1})/(a_{ij_2}-a_{ij_1}),\ j_2\rangle j_1,\ j_2\in N_i.$

   각 j_1에 대해 계산된 비율 $\theta_i(j_1,j_2),\ j_2\rangle j_1,\ j_2\in N_i$, 들 중에서 비율이 가장 작은 r_i개를 선택해서 비감소하는 순으로 비율목록 R_{j_1}에 넣는다.
3. (우월비율 탐색) 각 $j_1\in J$에 대해서 최소비율 $\theta_i(j_1,j_2)$ $(\theta_i(j_1,j_2)\in R_{j_1},\ j_2\in N_i\backslash J)$를 찾아 최소비율 집합 M에 넣는다. $M=\phi$이면 과정을 끝낸다.
4. (우월비율 선정) M의 비율들중 가장 작은 값을 찾고 해당되는 지수들을 $f_1,\ f_2$라

한다.

$\theta_i(f_1, f_2) = \min\{\theta_i(j_1, j_2) \mid \theta_i(j_1, j_2) \in M\}$

5. (우월비율 목록작성) 선정된 비율 $\theta_i(f_1,f_2)$를 목록 L_i에 넣고 J, M을 수정한다.

   $L_i \leftarrow L_i \cup \{\theta_i(f_1,f_2)\}$, $J \leftarrow J \cup \{f_2\} \backslash \{f_1\}$,

   $M \leftarrow \phi$

   단계 3으로 간다.

우월비율 탐색해법의 단계 1에서 목적함수의 계수값이 같은 변수가 여러개 존재하면 해당되는 제약식의 계수 a_{ij}가 가장 큰 변수를 선택한다. 또한, 단계 2에서 목록 R_{j_1}에 넣을 비율이 서로 같은 j_2가 여러개 존재하면 해당되는 a_{ij_2}가 가장 큰 지수의 비율을 선택하여 넣는다. 각 선택집합 N_i에 우월비율 탐색해법을 적용해서 얻어진 우월비율들의 집합인 목록 L_i와 초기해에서 1의 값을 갖는 지수집합 J_i는 다음 제시할 해법에서 문제 (P)의 최적해를 찾기 위한 목록 L의 작성에 사용된다.

해 법

1. 각 선택집합에 우월비율 탐색해법을 적용하여 L_i, J_i를 구한다. 그리고, $L \leftarrow \cup_{i \in I} L_i$, $\bar{b} \leftarrow \Sigma_{i \in I} \Sigma_{j \in J_i} a_{ij}$로 놓는다. 목록 L의 모든 비율들을 가장 작은 것부터 비감소하는 순서로 재배열한다.
2. $\bar{b} \geq b$ 이면 최적해는 다음과 같다. 해법과정을 끝낸다.

   $x_{ij} = 1,\ j \in J_i,\ x_{ij} = 0,\ j \in N_i \backslash J_i,\ i \in I.$

   $\bar{b} < b$ 이면 단계 3으로 간다.
3. 목록 L로부터 첫번째에 위치한 제일 작은 비율 $\theta_i(j_1,j_2)$를 선택하고 다음과 같이 $\bar{b}$를 수정한다. $L = \phi$이면 문제 (P)는 비가해이다. 해법과정을 끝낸다.

   $\bar{b} \leftarrow \bar{b} + (a_{ij_2} - a_{ij_1})$
4. $\bar{b} \geq b$ 이면 $q \leftarrow i$, $f_1 \leftarrow j_1$, $f_2 \leftarrow j_2$, $e \leftarrow \bar{b} - b$ 이라 하고 단계 5로 간다.

   $\bar{b} < b$ 이면 다음을 수행하고 단계 3으로 간다.

   $J_i \leftarrow J_i \cup \{j_2\} \backslash \{j_1\}$, $L \leftarrow L \backslash \{\theta_i(j_1,j_2)\}$
5. 최적해는 다음과 같다. 해법과정을 끝낸다.

   $x_{qf_1} = e/(a_{qf_2} - a_{qf_1})$, $x_{qf_2} = (a_{qf_2} - a_{qf_1} - e)/(a_{qf_2} - a_{qf_1})$,

   $x_{qj} = 1,\ j \in J_q \backslash \{f_1\}$, $x_{qj} = 0,\ j \in N_q \backslash J_q \backslash \{f_2\}$,

   $x_{ij} = 1,\ j \in J_i,\ x_{ij} = 0,\ j \in N_i \backslash J_i,\ i \in I \backslash \{q\}.$

해법은 L에 있는 우월비율들을 가장 작은 것부터 비감소하는 순으로 탐색해 간다. 최적목적치의 하한치에 해당하는 초기해의 자원양 $\bar{b}$가 우변상수 b보다 크면 가능해가 되므로 곧 최적해이다. 아니면 매회마다 선정되는 최소 우월비율 $\theta_i(j_1,j_2)$의 자원양 $(a_{ij_2} - a_{ij_1})$만큼씩 증가해서 비가성 정도를 줄이고 있다. 목록 L의 총 비율 수는 최대로 $r_{\max}n$개 이하이므로 해법은 $r_{\max}n$회 이내에 최적해를 찾고 끝나게 되거나 비가해임을 알아낸다.

정리 3 최악상황하에서 해법의 계산상 복잡도는 $O(r_{\max}n^2)$이다.

(증명) 단계 1에서 목록 L을 구하기 위하여 각 선택집합 N_i마다 우월비율 탐색해법을 적용한다. N_i에 대한 우월비율 탐색해법의 단계 1에서는 $O(r_i n_i)$의 계산이 필요하다. 단계 2에서 비율계산에 $O(n_i^2)$이 소요되고 각 변수 j에 대해 R_j에 넣을 가장 작은 r_i개 비율선택에는 $O(r_i n_i)$로서 모든 변수에 대해 총 $O(r_i n_i^2)$의 계산이 필요하다. 단계 3에서 각 R_j의 비율 수는 r_i개이고 $|J| = r_i$이므로 집합 M

을 얻는데 $O(r_i^2)$의 계산이 필요하다. 단계 4의 계산에는 $O(r_i)$, 단계 5에서는 상수회의 계산이 소요된다. 우월비율 탐색해법의 주요 회전단계인 단계 3, 4, 5의 최대 회전수는 모든 R_j의 비율들 수의 총합보다 적으므로 $O(r_i n_i)$이다. 따라서 $O(r_i^3 n_i)$가 소요된다. 이상으로부터 우월비율 탐색해법은 단계 2에서 $O(r_i n_i^2)$, 주요 회전단계인 3, 4, 5에서 총 $O(r_i^3 n_i)$의 계산이 소요된다. 선택상수 r_i들은 $1 \le r_i \le \sqrt{n_i}$를 만족하므로 목록 L_i를 얻는데 소요되는 계산은 $\max\{O(r_i n_i^2), O(r_i^3 n_i)\} = O(r_i n_i^2)$이 된다. 그러므로 해법의 단계 1에서 모든 선택집합에 대한 L을 얻는데 $O(r_{\max} n^2)$이 필요하다. 목록 L의 원소들 수는 최대로 $r_{\max} n$개이므로 크기 순으로 배열하는데 $O(r_{\max} n \log n)$이 소요된다. 단계 2는 상수회에 계산된다. 해법의 주요 회전단계인 3, 4는 상수회에 계산되고 최대 회전수는 L의 최대 비율개수 $r_{\max} n$이다. 이상으로부터 해법은 단계 1에서 $\max\{O(r_{\max} n^2), O(r_{\max} n \log n)\} = O(r_{\max} n^2)$이, 주요 회전단계인 3, 4에서 $O(r_{\max} n)$이 소요되므로 해법의 최악상황하의 계산상 복잡도는 $O(r_{\max} n^2)$이다. □

3. 수치예제

다음 문제 (P)의 최적해를 구한다.

$$
\begin{aligned}
\text{(P) Minimize } & \textstyle\sum_{i \in I} \sum_{j \in N_i} c_{ij}\, x_{ij} \\
\text{s.t. } & \textstyle\sum_{i \in I} \sum_{j \in N_i} a_{ij}\, x_{ij} \ge 68, \\
& \textstyle\sum_{j \in N_i} x_{ij} = 2,\ i \in I = \{1,2\}, \\
& 0 \le x_{ij} \le 1,\ j \in N_i = \{1,\cdots,15\}, \\
& i \in I.
\end{aligned}
$$

여기서, 계수 c_{ij} 및 a_{ij}의 값은 다음 표와

i \ c_{ij}, a_{ij} \ j		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	c_{ij}	5	3	4	6	5	5	7	8	13	15	17	15	21	23	30
	a_{ij}	2	3	7	10	12	15	17	19	23	25	28	30	31	32	35
2	c_{ij}	4	2	3	4	5	7	9	6	8	11	13	13	14	19	20
	a_{ij}	1	2	4	5	7	9	11	12	13	14	15	16	17	18	19

같다.

〈1회〉

0.1 선택집합 N_1에 대한 L_1

(1회)

1. $J_1 = \{2,3\}$, $J = \{2,3\}$
2. $R_1 = \{\theta_1(1,4) = 0.125,\ \theta_1(1,7) = 0.133\}$
   $R_2 = \{\theta_1(2,6) = 0.17,\ \theta_1(2,5) = 0.22\}$
   $R_3 = \{\theta_1(3,6) = 0.13,\ \theta_1(3,5) = 0.2\}$
   $R_4 = \{\theta_1(4,7) = 0.14,\ \theta_1(4,8) = 0.22\}$
   $R_5 = \{\theta_1(5,7) = 0.4,\ \theta_1(5,8) = 0.43\}$
   $R_6 = \{\theta_1(6,12) = 0.67,\ \theta_1(6,8) = 0.75\}$
   $R_7 = \{\theta_1(7,8) = 0.5,\ \theta_1(7,12) = 0.62\}$
   $R_8 = \{\theta_1(8,12) = 0.64,\ \theta_1(8,11) = 1\}$
   $R_9 = \{\theta_1(9,12) = 0.29,\ \theta_1(9,11) = 0.8\}$
   $R_{10} = \{\theta_1(10,11) = 0.67,\ \theta_1(10,13) = 1\}$
   $R_{11} = \{\theta_1(11,13) = 1.33,\ \theta_1(11,14) = 1.5\}$
   $R_{12} = \{\theta_1(12,15) = 3,\ \theta_1(12,14) = 4\}$
   $R_{13} = \{\theta_1(13,14) = 2,\ \theta_1(13,15) = 2.25\}$
   $R_{14} = \{\theta_1(14,15) = 2.33\}$
   $R_{15} = \phi$
3. $M = \{\theta_1(2,6),\ \theta_1(3,6)\}$
4. $\theta_1(f_1, f_2) = \theta_1(3,6)$
5. $L_1 = \{\theta_1(3,6)\}$, $J = \{2,6\}$

   (2회)

3. $M = \{\theta_1(2,5),\ \theta_1(6,12)\}$
4. $\theta_1(f_1, f_2) = \theta_1(2,5)$
5. $L_1 = \{\theta_1(3,6),\ \theta_1(2,5)\}$, $J = \{5,6\}$

(3회)

3. $M=\{\theta_1(5,7),\ \theta_1(6,12)\}$

4. $\theta_1(f_1,f_2)=\theta_1(5,7)$

5. $L_1=\{\theta_1(3,6),\ \theta_1(2,5),\ \theta_1(5,7)\}$, $J=\{6,7\}$

(4회)

3. $M=\{\theta_1(6,12),\ \theta_1(7,8)\}$

4. $\theta_1(f_1,f_2)=\theta_1(7,8)$

5. $L_1=L_1\cup\{\theta_1(7,8)\}$, $J=\{6,8\}$

(5회)

3. $M=\{\theta_1(6,12),\ \theta_1(8,12)\}$

4. $\theta_1(f_1,f_2)=\theta_1(8,12)$

5. $L_1=L_1\cup\{\theta_1(8,12)\}$, $J=\{6,12\}$

(6회)

3. $M=\{\theta_1(6,8),\ \theta_1(12,15)\}$

4. $\theta_1(f_1,f_2)=\theta_1(6,8)$

5. $L_1=L_1\cup\{\theta_1(6,8)\}$, $J=\{8,12\}$

(7회)

3. $M=\{\theta_1(8,11),\ \theta_1(12,15)\}$

4. $\theta_1(f_1,f_2)=\theta_1(8,11)$

5. $L_1=L_1\cup\{\theta_1(8,11)\}$, $J=\{11,12\}$

(8회)

3. $M=\{\theta_1(11,13),\ \theta_1(12,15)\}$

4. $\theta_1(f_1,f_2)=\theta_1(11,13)$

5. $L_1=L_1\cup\{\theta_1(11,13)\}$, $J=\{12,13\}$

(9회)

3. $M=\{\theta_1(12,15),\ \theta_1(13,14)\}$

4. $\theta_1(f_1,f_2)=\theta_1(13,14)$

5. $L_1=L_1\cup\{\theta_1(13,14)\}$, $J=\{12,14\}$

(10회)

3. $M=\{\theta_1(12,15),\ \theta_1(14,15)\}$

4. $\theta_1(f_1,f_2)=\theta_1(14,15)$

5. $L_1=L_1\cup\{\theta_1(14,15)\}$, $J=\{12,15\}$

(11회)

3. $M=\{\theta_1(12,14)\}$

4. $\theta_1(f_1,f_2)=\theta_1(12,14)$

5. $L_1=L_1\cup\{\theta_1(12,14)\}$, $J=\{14,15\}$

(12회)

3. $M=\phi$, 우월비율 탐색해법 과정을 끝낸다.

$L_1=\{\theta_1(3,6),\ \theta_1(2,5),\ \theta_1(5,7),\ \theta_1(7,8),\ \theta_1(8,12),\ \theta_1(6,8),\ \theta_1(8,11),\ \theta_1(11,13),\ \theta_1(13,14),\ \theta_1(14,15),\ \theta_1(12,14)\}$

0.2 선택집합 N_2에 대한 L_2

(1회)

1. $J_2=\{2,3\}$, $J=\{2,3\}$

2. $R_1=\{\theta_2(1,5)=0.17,\ \theta_2(1,8)=0.18\}$

$R_2=\{\theta_2(2,8)=0.4,\ \theta_2(2,3)=0.5\}$

$R_3=\{\theta_2(3,8)=0.38,\ \theta_2(3,9)=0.56\}$

$R_4=\{\theta_2(4,8)=0.29,\ \theta_2(4,5)=0.5\}$

$R_5=\{\theta_2(5,8)=0.2,\ \theta_2(5,9)=0.5\}$

$R_6=\{\theta_2(6,9)=0.25,\ \theta_2(6,10)=0.8\}$

$R_7=\{\theta_2(7,10)=0.67,\ \theta_2(7,12)=0.8\}$

$R_8=\{\theta_2(8,13)=1.6,\ \theta_2(8,12)=1.75\}$

$R_9=\{\theta_2(9,13)=1.5,\ \theta_2(9,12)=1.67\}$

$R_{10}=\{\theta_2(10,13)=1,\ \theta_2(10,15)=1.8\}$

$R_{11}=\{\theta_2(11,13)=0.5,\ \theta_2(11,15)=1.75\}$

$R_{12}=\{\theta_2(12,13)=1,\ \theta_2(12,15)=2.33\}$

$R_{13}=\{\theta_2(13,15)=3,\ \theta_2(13,14)=5\}$

$R_{14}=\{\theta_2(14,15)=1\}$

$R_{15}=\phi$

3. $M=\{\theta_2(2,8),\ \theta_2(3,8)\}$

4. $\theta_2(f_1,f_2)=\theta_2(3,8)$

5. $L_2=\{\theta_2(3,8)\}$, $J=\{2,8\}$

(2회)

3. $M=\{\theta_2(2,3),\ \theta_2(8,13)\}$

4. $\theta_2(f_1,f_2)=\theta_2(2,3)$

5. $L_2=\{\theta_2(3,8),\ \theta_2(2,3)\}$, $J=\{3,8\}$

(3회)

3. $M=\{\theta_2(3,9),\ \theta_2(8,13)\}$

4. $\theta_2(f_1, f_2) = \theta_2(3,9)$
5. $L_2 = \{\theta_2(3,8),\ \theta_2(2,3),\ \theta_2(3,9)\}$, $J = \{8,9\}$
(4회)
3. $M = \{\theta_2(8,13),\ \theta_2(9,13)\}$
4. $\theta_2(f_1, f_2) = \theta_2(9,13)$
5. $L_2 = L_2 \cup \{\theta_2(9,13)\}$, $J = \{8,13\}$
(5회)
3. $M = \{\theta_2(8,12),\ \theta_2(13,15)\}$
4. $\theta_2(f_1, f_2) = \theta_2(8,12)$
5. $L_2 = L_2 \cup \{\theta_2(8,12)\}$, $J = \{12,13\}$
(6회)
3. $M = \{\theta_2(12,15),\ \theta_2(13,15)\}$
4. $\theta_2(f_1, f_2) = \theta_2(12,15)$
5. $L_2 = L_2 \cup \{\theta_2(12,15)\}$, $J = \{13,15\}$
(7회)
3. $M = \{\theta_2(13,14)\}$
4. $\theta_2(f_1, f_2) = \theta_2(13,14)$
5. $L_2 = L_2 \cup \{\theta_2(13,14)\}$, $J = \{14,15\}$
(8회)
3. $M = \phi$, 우월비율 탐색해법 과정을 끝낸다.

$L_2 = \{\theta_2(3,8),\ \theta_2(2,3),\ \theta_2(3,9),\ \theta_2(9,13),\ \theta_2(8,12),\ \theta_2(12,15),\ \theta_2(13,14)\}$

이상으로부터

$L = \{\theta_1(3,6),\ \theta_1(2,5),\ \theta_2(3,8),\ \theta_1(5,7),\ \theta_1(7,8),\ \theta_2(2,3),\ \theta_2(3,9),\ \theta_1(8,12),\ \theta_1(6,8),\ \theta_1(8,11),\ \theta_1(11,13),\ \theta_2(9,13),\ \theta_2(8,12),\ \theta_1(13,14),\ \theta_1(14,15),\ \theta_2(12,15),\ \theta_1(12,14),\ \theta_2(13,14)\}$

$J_1 = \{2,3\}$, $J_2 = \{2,3\}$, $\bar{b} = 3+7+2+4 = 16$

1. $\bar{b} < b(=68)$이므로 단계 2로 간다.
2. $\theta_1(3,6)$ 선택, $\bar{b} = 16+8 = 24$
3. $\bar{b} < 68$이므로 $J_1 = \{2,6\}$, $L = L \backslash \{\theta_1(3,6)\}$
〈2회〉
2. $\theta_1(2,5)$ 선택, $\bar{b} = 24+9 = 33$
3. $\bar{b} < 68$ 이므로 $J_1 = \{5,6\}$, $L = L \backslash \{\theta_1(2,5)\}$
〈3회〉
2. $\theta_2(3,8)$ 선택, $\bar{b} = 33+8 = 41$
3. $\bar{b} < 68$ 이므로 $J_2 = \{2,8\}$, $L = L \backslash \{\theta_2(3,8)\}$
〈4회〉
2. $\theta_1(5,7)$ 선택, $\bar{b} = 41+5 = 46$
3. $\bar{b} < 68$ 이므로 $J_1 = \{6,7\}$, $L = L \backslash \{\theta_1(5,7)\}$
〈5회〉
2. $\theta_1(7,8)$ 선택, $\bar{b} = 46+2 = 48$
3. $\bar{b} < 68$ 이므로 $J_1 = \{6,8\}$, $L = L \backslash \{\theta_1(7,8)\}$
〈6회〉
2. $\theta_2(2,3)$ 선택, $\bar{b} = 48+2 = 50$
3. $\bar{b} < 68$ 이므로 $J_2 = \{3,8\}$, $L = L \backslash \{\theta_2(2,3)\}$
〈7회〉
2. $\theta_2(3,9)$ 선택, $\bar{b} = 50+9 = 59$
3. $\bar{b} < 68$ 이므로 $J_2 = \{8,9\}$, $L = L \backslash \{\theta_2(3,9)\}$
〈8회〉
2. $\theta_1(8,12)$ 선택, $\bar{b} = 59+11 = 70$
3. $\bar{b} > 68$ 이므로 $q = 1$, $f_1 = 8$, $f_2 = 12$, $e = 2$, 단계 4로 간다. ($J_1 = \{6,8\}$, $J_2 = \{8,9\}$)
4. 최적해는 다음과 같다.

$x_{18} = 2/11$, $x_{1,12} = 9/11$, $x_{16} = 1$, $x_{1j} = 0$, $j \neq 6,8,12$,

$x_{28} = x_{29} = 1$, $x_{2j} = 0$, $j \neq 8,9$.

4. 결론 및 토의

본 연구에서는 일반 다중선택 선형배낭문제를 고려하고 새로운 특성을 찾아내므로써 최악상황하의 계산상 복잡도가 기존의 해법보다[13] 보다 신속한 $O(r_{\max} n^2)$의 해법을 제시하였다.

이 해법은 분지한계과정에 수반되는 우변상수 b 및 선택상수 r_i의 변화에 효율적으로 사용되도록 개발되었다. 분지과정중에 발생

되는 여러 후보문제들의 LP최적해는 원 문제에 대해 이미 만들어진 우월비율 집합으로부터 효율적으로 작성된다.

참 고 문 헌

[1] Armstrong, R. D., D. S. Kung, P. Sinha, and A. A. Zoltners, "A Computational Study of a Multiple-Choice Knapsack Problem," *J. ACM.* 9, pp. 184-198, 1983.

[2] Dudzinski, K. and S. Walukiewicz, "A Fast Algorithm for the Linear Multiple-Choice Knapsack Problem," *Opns. Res. Letters* 3, pp. 205-209, 1984.

[3] Dyer, M. E., "An O(n) Algorithm for the Multiple-Choice Knapsack Linear Problem," *Math. Progr.* 29, pp. 57-63, 1984.

[4] Glover, F. and D. Klingman, "A O (nlogn) Algorithm for LP Knapsacks with GUB Constraints," *Math. Progr.* 17, pp. 345-361, 1979.

[5] Ibaraki, T., K. Teranaka, J. Iwase, T. Hasegawa, "The Multiple-Choice Knapsack Problem," *J. of Opns. Res. Soc. of Japan* 21, pp. 59-93, 1978.

[6] Johnson, E. L. and M. W. Padberg, "A Note on the Knapsack Problem with Special Ordered Sets," *Opns. Res. Letters* 1, pp. 18-22, 1981.

[7] Johnson, E. L., M. M. Kostreva, and U. H. Suhl, "Solving 0-1 Integer Programming Problems Arising from Large Scale Planning Models," *Opns. Res.* 33, pp. 803-819, 1985.

[8] Sarin, S. and M. K. Karwan, "The Linear Multiple Choice Knapsack Problem," *Opns. Res. Letters* 8, pp. 95-100, 1989.

[9] Sinha, P. and A. A. Zoltners, "The Multiple Choice Knapsack Problem," *Opns. Res.* 27, pp. 503-515, 1979.

[10] Stecke, K. E., "Formulation and Solution of Nonlinear Integer Production Planning Problems for Flexible Manufacturing Systems," Mangt. Sci. 29, pp. 273-288, 1983.

[11] Zemel, E., "The Linear Multiple Choice Knapsack Problem," *Opns. Res.* 28, pp. 1412-1423, 1980.

[12] Zemel, E., "An O(n) Algorithm for the Linear Multiple Choice Knapsack Problem and Related Problems," *Inform. Proc. Letters* 18, pp. 123-128, 1984.

[13] 원 중연, 정 성진, "일반 다중선택 선형배낭문제에 대한 효율적인 해법," 한국경영과학회지, 제15권, 제2호, pp. 33-44, 1990.

[14] 원 중연, 정 성진, "다분할 선형배낭문제," 대한산업공학회지, 제17권, 제1호, pp. 127-130, 1991.

95년 5월 최초 접수, 95년 7월 최종 수정